1904/2.

A GEOMETRIA ALAPJAIRÓL

MÁSODIK KÖTET

PROJEKTÍV GEOMETRIA

ÍRTA

Dr. KERÉKJÁRTÓ BÉLA

EGYETEMI NY. R. TANÁR

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA L. TAGJA

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KIADÁSA

1944

ELŐSZÓ.

A geometria alapjairól írt munkám első kötetében az euklidesi geometria elemi, axiomatikus felépítését tárgyaltam. A jelen, második kötet tárgya a projektív geometria. Ennek klasszikus elméletét részletesen kifejtem, hogy munkám a projektív geometria tankönyvéül is szolgáljon. A klasszikus anyag tárgyalásában is súlyt helyezek a modern, csoportelméleti módszerekre; ezek alapján ismertetem a projektív geometriának a nem-euklidesi geometriákkal és a körgeometriával való kapcsolatát. Az axiómarendszer mélyebb elemzése, könyvem utolsó fejezetében, alkalmat nyujt néhány újabb topologiai és csoportelméleti módszer megismertetésére.

Könyvem kiadásáért hálás köszönettel tartozom a Magyar Tudományos Akadémiának. A korrektúra-olvasás során értékes segítséget nyujtottak Szőkefalvi Nagy Gyula, Lipka István, Hajós György, Fejes László, vitéz Szép Jenő, Fáry István kedves munkatársaim; mindnyájuknak hálás köszönetem fejezem ki szíves segítségükért s hasznos tanácsaikért.

Budapest, 1944. május hó.

Kerékjártó Béla.

TARTALOMJEGYZÉK.

III. A sík projektív geometriája.

IV. A tér projektív geometriája.

V. Másodrendű görbék.

VI. Másodrendű felületek.

VII. Projektív mérték.

VIII. A projektív geometria axiómáról.

BEVEZETÉS.

1. A geometria őstörténetére vonatkozóan inkább feltevéseink vannak, mint pontos ismereteink. Az emberi értelem fejlődésével párhuzamosan alakultak ki azok az ismeretek, amelyek a geometria felfedezéséhez vezettek. A geometria tudománya azzal kezdődött, hogy a tapasztalati tárgyakból absztrakcióval megalkották a geometriai idom fogalmát, s megismerték az elvont fogalmak közti kapcsolatokat, melyek tapasztalati tényeket tükröznek vissza. EUKLIDES elemei, amelyek a geometria tudományos fejlődésének alapjait adták, igen hosszú tapasztalati és tudományos fejlődésnek eredményeit foglalják magukban.

Majd kétezer éven át tartotta meg az euklidesi geometria egyeduralkodó szerepét, sőt még ma is sokan azt hiszik, hogy ezt a geometriát maga a Természet alkotta meg, s minden más, azóta keletkezett geometria emberi találmány. Bizonyos, hogy a természet át meg át van szőve geometriával, de ez nem okvetlenül euklidesi geometria. Az emberi értelem felfedezte a természetben rejlő geometriát, vagy inkább geometriákat ; a tudomány ezek közül minden esetben azt alkalmazza, mely leginkább célravezető. A természeti jelenségeknek, nevezetesen a mozgásoknak leírásához célszerű az euklidesi geometria ; a relativitás elvén alapuló, modern mechanika céljainak már jobban megfelel a nem-euklidesi geometria. A tárgyak ábrázolásához egy egészen másfajta geometriára, a projektív geometriára van szükség.

Érdekes visszatekinteni a projektív geometria megszületésére s fejlődésére. Nem hivatásos geométrák, hanem a renaissance művészei alapozták meg ezt a tudományt. A középkor festőinek minden perspektívát nélkülöző képei arról tanúskodnak, hogy alkotóik (VALÉRY kifejezése szerint) inkább láttak az értelmükkel, mint a szemükkel. A renaissance művészei ismerték fel először s alkalmazták a perspektíva szabályait. Két, általánosan ismert műre emlékeztetek erre vonatkozóan.

LEONARDO DA VINCI «Utolsó vacsorája» a művészi eszmény tökéletességén kívül példaképe a perspektív ábrázolásnak. A kép hátterében levő három ablak közül a középsőt körív alakú párkányzat ékesíti ; a körív folytatását képező kör középpontjában van a Megváltó feje ; ide futnak össze a kép összes nagy vonalai (kivéve az asztal vonalával párhuzamos, vízszinteseket). Sokan titokzatosságot találtak, vagy találnak még ma is a kompoziciónak ebben a megragadó szabályszerűségében. VALÉRY azt mondja : ha van titokzatosság, ez csupán abban áll, hogyan találhatnak titokzatosnak ilyen kompoziciót ; s ez — attól tart — megmagyarázható. (Introduction à la méthode de Léonard de Vinci). Valóban nem titokzatosságról van itt szó, hanem a perspektíva szabályainak helyes alkalmazásáról, amely szerint párhuzamos egyeneseket egy ponthoz összetartó (vagy párhuzamos) egyenesek ábrázolnak. A perspektíva középpontjának szerencsés megválasztása pedig a művészi hangsúlyozás kitűnő eszköze.

A perspektív ábrázolás másik klasszikus példája MICHELANGELO római Capitoliuma. A térperspektíva szabályainak helyes alkalmazásával eléri, hogy az épületek övezte tér valóságos méreteinél sokkal nagyobbnak, mélyebbnek látszik.

2. Évszázadokkal később, különösen PONCELET műveiben s azok nyomán alakult ki az ábrázoló geometria és a projektív geometria tudománya ; ezt a *látás* geometriájának tekinthetjük, ellentétben az euklidesi geometriával, mely a *tapintás* geometriája. A látás geometriáját nagyjából a következő tények jellemzik : minden egyenest egyenesnek (vagy pontnak) látunk ; párhuzamos egyenesek olyanoknak tűnnek, mintha egy pontba futnának össze ; nem tudjuk megítélni, vajjon két távolság egyenlő, vagy két szög egyenlő egymással, mert ezeket különböző helyzetekben különböző nagyságúaknak látjuk.

A projektív geometria tudományos rendszere az euklidesi geometriából bizonyos általánosítással keletkezett. Ma sincs helyesebb mód a projektív geometria megismertetésére, mint az, amelyet a történeti fejlődés nyujtott, hiszen a mai ember épenúgy az euklidesi geometria dogmáiban nő fel, amint ebben élt kétezer év óta az emberiség.

3. *Az euklidesi geometria.* Az első kötetben az euklidesi geometria rendszeres felépítésével foglalkoztunk. Meghatározott sorrendben, amely lényegében HILBERTtől származik, bevezettük az összetartozási,

rendezési, egybevágósági axiómákat, majd az euklidesi párhuzamossági axiómát, végül a folytonosság axiómáit. Részletesen kifejtettük az egyes axiómacsoportokból levezethető tételeket. Az összetartozási axiómákból igen kevés és egyszerű tételt kaptunk. Az összetartozás és rendezés axiómái alapján tárgyaltuk az egyenesen a pontok elrendezésére vonatkozó tételeket, s a sík és a tér összetartozási és rendezési tételeit. Ezeknek és az egybevágósági axiómáknak alapján egy, a párhuzamossági axiómától természetesen független, úgynevezett abszolut geometria tételeit fejtettük ki. Az erre vonatkozó tárgyalásunk azért nem lehetett teljes, mert az egyenesen a pontok elrendezését jellemző axiómáinkat az euklidesi geometria céljainak megfelelően korlátozott alakban vettük fel s ezzel már eleve kizártuk a nem-euklidesi elliptikus geometriát. — Az előbbi axiómacsoportok és az euklidesi párhuzamossági axióma alapján az euklidesi geometria jellegzetes tételeit is bebizonyíthattuk, ú. m. a PYTHAGORAS-féle tételt, a háromszögek hasonlóságára vonatkozó tételeket, sőt bevezethetünk egy analitikus geometriát, mely azonban a szokásos DESCARTES-féle analitikus geometriától abban különbözik, hogy koordinátákként valós számok helyett szakasznagyságok, mint egy általános absztrakt számtest elemei szerepelnek. A folytonossági axiómák bevezetésével elértük végül, hogy a geometriának megfelelő számtest a valós számoknak egy résztestével, illetve a valós számok összességével megegyezzék.

4. *Az euklidesi geometria általánosítása.* Az euklidesi geometriának az első kötet **I**—**V** axiómacsoportjai alapján felépített rendszere teljes : a nevezett axiómák egyértelműen meghatározzák az euklidesi geometriát. Ugyancsak teljes az a rendszer is, amelyet mint euklidesi síkgeometriát az **I. 1—3, II**—**V** axiómák határoznak meg. De ha az axióma-csoport egyes axiómáit elhagyjuk, a megmaradó axiómák általában nem értelmeznek teljes geometriai rendszert. Például azt az abszolut geometriát, melynek tételeit az **I, II, III** axióma-csoportok alapján az első kötet III. fejezetében fejtettük ki, nem tekinthetjük másnak, mint egyik vagy másik felépítendő teljes geometriai rendszer töredékének.

Az euklidesi geometria általánosításán olyan általánosabb, teljes geometriai rendszert értünk, amely tartalmazza az euklidesi geometria rendszerét. Az általánosításnak többféle módja adható meg ; egy ilyen általánosító eljárás szempontjait kívánjuk a következőkben megvilágítani KLEIN Félix híres «Erlangeni programm»-ja szellemében. Egyszerűség kedvéért általában a síkgeometriára szorítkozunk.

5. *Az euklidesi síkgeometria csoportja.* (Lásd első kötet 86. és 255. o.) Az euklidesi sík mozgásai : a sík önmagában való eltolásai és forgásai csoportot alkotnak, abban az értelemben, hogy bármely két mozgás összetétele (vagy szorzata) s bármely mozgás inverze ugyancsak mozgás. Az euklidesi sík önmagára való kongruens leképezései szintén csoportot alkotnak ; ez a csoport a sík mozgásainak csoportjából azáltal származik, hogy ahhoz hozzáfűzzük a sík egyeneseire vonatkozó tükrözéseket s az ezeknek mozgásokkal való összetételéből származó leképezéseket. A sík kongruens leképezéseiből álló csoport alcsoportként tartalmazza a sík mozgáscsoportját.

A sík kongruens leképezéseiből álló csoport további bővítése a sík hasonlósági csoportjához vezet. A síknak az O középpontra vonatkozó, az irányítást megtartó hasonlósági leképezését két egymásnak megfelelő, O-tól különböző A és A' pont határozza meg a következő módon : a sík minden P pontjának azt a P' képpontot feleltetjük meg, amelyre nézve az OAP és $OA'P'$ háromszögek hasonlók és irányításuk megegyezik. Ennek a leképezésnek és az OA' egyenesre vonatkozó tükrözésnek szorzata a síknak olyan, az irányítást megfordító hasonlósági leképezése, amelynek szintén O a hasonlósági középpontja, s az A pontnak képe A'. A sík önmagára való kongruens és hasonlósági leképezései alkotják a sík *hasonlósági csoportját* ; ez alcsoportként tartalmazza a kongruens leképezések csoportját.

Két alakzatot egy csoport szerint *aequivalens*nek nevezünk, ha a csoport valamely leképezése az egyik alakzatot a másikba viszi át. Az előbb felsorolt három csoport közül az euklidesi sík mozgáscsoportja szolgáltatja az aequivalencia legszűkebb fogalmát ; két háromszög akkor aequivalens a mozgáscsoport szerint, ha egybevágók és megegyezik az irányításuk ; a kongruens leképezések csoportja szerint : ha egybevágók ; a hasonlósági csoport szerint : ha hasonlók.

Egymással aequivalens alakzatok közös tulajdonságait az illető csoport szerint *invariáns tulajdonságok*nak nevezzük. Például a sík mozgáscsoportjának invariánsa bármely két pont távolsága ; ez egyenlő a csoport bármely leképezésénél származó képpontok távolságával. További invariánsok két egyenes egymással bezárt szöge, s három, nem egy egyenesen fekvő pont által a síkban meghatározott irányítás. A sík kongruens leképezéseiből álló csoportnál ugyancsak változatlanok a távolságok és a szögek, de az irányítás nem. A sík hasonlósági csoportjánál változatlanok a szögek, de megváltoznak a távolságok; viszont bármely két távolság aránya változatlan marad. Nyilvánvaló, hogy minden olyan geometriai tulajdonság, mely invariáns a hasonlósági csoportnál, ugyancsak invariáns a kongruens leképezések csoportjánál, valamint a mozgáscsoportnál is, de nem megfordítva. Ez az állítás közvetlenül következik abból, hogy a hasonlósági csoport alcsoportként tartalmazza a másik két csoportot. A hasonlósági csoport alapján értelmezett síkgeometria ebben az értelemben általánosítása a kongruenciacsoport, illetve a mozgáscsoport alapján értelmezett euklidesi síkgeometriának. Az általánosítás ebben az esetben olyan módon történt, hogy a geometria elemeit (pontjait, egyeneseit) változatlanul megtartottuk, de kibővítettük azt a csoportot, mellyel az alakzatok aequivalenciáját értelmeztük.

Az euklidesi síkgeometriát általánosíthatjuk azonban az elemek összességének és a csoportnak egyidejű bővítésével. Erre példaként az euklidesi sík- és térgeometria viszonyát említjük meg.

6. *Az euklidesi térgeometria síkbeli képe.* Tekintsük megadottnak az euklidesi síkgeometriát, amint azt az **I. 1—3, II—V** axiómák értelmezik; ennek a síkgeometriának alapján akarjuk értelmezni az euklidesi térgeometriát.

Térbeli ponton az adott α síkban fekvő, meghatározott irányítású kört értünk; az α sík pontjait nulla sugarú köröknek fogjuk tekinteni. Az α sík valamely P pontjában az α síkra emelt merőleges egyenes a P középpontú körök seregéből áll. Az α síkkal párhuzamos egyenes olyan körök összessége, amelyeknek középpontja az α sík egy egyenesén fekszik s amely köröknek irányítása megegyezik és sugaruk egyenlő. Az α síkhoz ferde egyenesek értelmezése a következő: körök olyan serege, amelyeknek középpontja az α sík egy egyenesén fekszik s amelyeknek közös érintője egy meghatározott irányított egyenes. — Az α síkkal párhuzamos síkot megegyező irányítású és egyenlő sugarú körök összessége alkotja. Az α síkra merőleges sík olyan köröknek összessége, amelyeknek középpontja az α síknak egy egyenesén fekszik. Az α síkot valamely e egyenese mentén metsző ferde síkok értelmezése a következő: felvesszük az α síkban az e-re merőleges (f) egyenes-sereget s egy e-hez ferde (g) egyenes-sereget, amely párhuzamos, megegyező irányú egyenesekből áll; tekintsük azoknak a köröknek összességét, amelyekre nézve a kör középpontján átmenő f egyenes s az irányított kört érintő g egyenes metszéspontja e-hez tartozik ; ezeknek az irányított köröknek összessége alkotja az értelmezendő síkot.

Az egyenesen a pontok elrendezésére a következő értelmezések szolgálnak. Legyen P_1, P_2, P_3 három, egy egyenesen fekvő térbeli pont, s legyenek k_1, k_2, k_3 az ezeket az α síkban ábrázoló irányított körök. Ha a körök P'_1, P'_2, P'_3 középpontja egymástól különbözik, akkor a három középpontnak a rajtuk átmenő egyenesen való elrendezése értelmezés szerint megegyezik a megfelelő P_1, P_2, P_3 pontok elrendezésével. Ha pedig a három kör középpontja egybeesik, akkor az α sík két irányítása közül az egyiket pozitívnak, a másikat negatívnak véve, mindegyik kör sugarát pozitív vagy negatív előjellel veszszük a kör irányítása szerint s a k_1, k_2, k_3 körök sugarának nagyság szerint való elrendezésével megegyezőnek vesszük fel a P_1, P_2, P_3 pontok elrendezését.

A P és Q térbeli pontok távolságát következőképpen értelmezzük. Legyen k és k' az a két irányított kör, amely az adott pontokat ábrázolja ; szerkesztünk egy derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója a két kör P' és Q' középpontját összekötő $P'Q'$ szakasz, s másik befogója egyenlő a k és k' irányított körök sugarának különbségével (ez a különbség a két nem irányított kör sugarának különbségével vagy összegével egyenlő, a szerint, hogy irányításuk megegyező, vagy ellenkező). A szerkesztett háromszög átfogója értelmezés szerint egyenlő a P, Q pontok PQ távolságával.

Az olvasóra bízzuk annak igazolását, hogy a fent értelmezett térgeometria kielégíti az **I**—**V** axiómákat. A térbeli elemeknek fent ismertetett síkbeli ábrázolása az ábrázoló geometria egyik fejezetének : a *ciklográfiá*nak tárgya.

Az α sík önmagában való mozgásainak értelmezését könnyen kiterjeszthetjük a tér pontjaira, továbbá értelmezhetjük a tér mozgásait mint a pontok távolságát és az irányítást megtartó leképezéseket. A tér mozgáscsoportja alcsoportként tartalmazza az α sík önmagában való mozgásaiból és kongruens leképezéseiből álló csoportokat ; az α síknak valamely egyenesére vonatkozó tükrözését ugyanis a térnek az illető egyenes körül való félforgása származtatja.

A fenti általánosító eljárással, mellyel az euklidesi síkgeometria alapján értelmeztük az euklidesi térgeometriát, csupán szemléltetni akartuk, hogyan juthatunk el egy megadott geometriából egy általánosabb geometriához az elemeknek és a csoportnak egyidejű bővítésével. Valójában nem volt szükségünk erre az eljárásra az euklidesi térgeometria értelmezése céljából, hiszen azt az euklidesi síkgeometria önálló létezésére való hivatkozás nélkül is megalapoztuk az **I**—**V** axiómacsoportokkal. Ebben az esetben tehát az általánosítás két ismert geometria egymáshoz való viszonyát jellemezte. A következőkben új geometriák megismerésére fogjuk alkalmazni a fent bemutatott eljárást.

7. *Affin geometria.* Az euklidesi geometria tételeit különböző szempontok szerint csoportosíthatjuk ; igen természetesnek tűnik egy olyan csoportosítás, mely az alapul vett axiómák fogalomkörének felel meg. A párhuzamossági axiómát e tekintetben az összetartozási axiómákkal együvé soroljuk, hiszen az abban előforduló alapfogalom ugyancsak az összetartozás fogalma (tagadó értelemben : két egyenesnek nincs közös pontja).

Az euklidesi geometriának azok a tételei, amelyek az elemek összetartozására vonatkoznak, bizonyos értelemben önálló testet alkotnak az euklidesi geometria tételeinek összességében. Egy ilyen jellegzetes tétel a Desargues féle tétel, amelyet az első kötetben (234. o.) a következő alakban fogalmaztunk meg :

Ha egy síkban fekvő két háromszög megfelelő csúcsait összekötő egyenesek egy ponton mennek át, vagy egymással párhuzamosak, akkor a megfelelő oldalpárok közül kettőnek a párhuzamosságából következik a harmadik oldalpár párhuzamossága.

A Desargues féle tételben leírt alakzatot, mely két háromszög csúcsaiból, páronkint párhuzamos oldalaiból s a megfelelő csúcsokat összekötő, egy ponton átmenő vagy egymással párhuzamos egyenesekből áll, Desargues féle alakzatnak nevezzük.

A síknak egy másik síkra, vagy önmagára való kongruens vagy hasonlósági leképezésénél bármely Desargues féle alakzatnak ugyanilyen alakzat felel meg. Ugyanez érvényes azonban még akkor is, ha az egyik síkot párhuzamosan vetítjük egy tetszőleges másik síkra bármely olyan irányban, mely a két sík közül egyikkel sem párhuzamos. Ennél a leképezésnél ugyanis az egyik sík minden egyenesének a másik síkban egyenes felel meg, továbbá egymást metsző egyeneseknek egymást metsző egyenesek, s párhuzamosaknak párhuzamosak felelnek meg.

Két különböző, vagy egymással azonos sík *affin vonatkozásán* olyan megfelelést értünk, amely egy vagy több párhuzamos vetítéssel származtatható. A sík önmagára való affin leképezései csoportot alkotnak, mely alcsoportként tartalmazza a sík hasonlósági csoportját. A *sík affin csoportja* (azaz a sík önmagára való affin leképezéseinek csoportja) értelmezi a sík *affin geometriá*ját ; ennek tárgya az affin csoportnál invariáns tulajdonságok vizsgálata. Az affin geometria az euklidesi geometriának általánosítása : ha két idom aequivalens az euklidesi geometriában, akkor az affin geometriában is, de nem megfordítva. Például két tetszőleges háromszög aequivalens egymással az affin geometriában, de az euklidesi geometriában csak akkor, ha egybevágók, vagy tágabb értelemben akkor, ha hasonlók. Egy négyzet és egy tetszőleges parallelogramma aequivalens az affin geometriában, de egy parallelogramma nem aequivalens egy általános négyszöggel.

A sík önmagára való affin leképezéseinél általában megváltozik a szakaszok és szögek nagysága, sőt két nem párhuzamos szakasz egymáshoz való aránya is ; két párhuzamos szakasz aránya változatlan marad, s nevezetesen bármely szakasz középpontjának affin leképezésnél a megfelelő szakasz középpontja felel meg.

A sík affin leképezésének jellemző tulajdonsága, hogy egyeneseket egyenesekbe visz át. Ugyanezzel a tulajdonsággal értelmezzük a tér affin leképezéseit mint a tér önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezéseit, amelyek minden egyenest egyenesbe (s mint ebből könnyen levezethető : minden síkot síkba) visznek át. A tér affin leképezései csoportot alkotnak, mely alcsoportként tartalmazza az euklidesi tér kongruens és hasonlósági leképezéseiből álló csoportot.

A fenti meggondolásokat összefoglalva, az affin geometria szerepét így jellemezhetjük : az affin geometria az euklidesi geometriának az az általánosítása, mely az euklidesi geometria összetartozási tételeit foglalja egybe.

8. *Projektív geometria.* Az affin geometriát tovább általánosíthatjuk azáltal, hogy két síkidomot akkor is aequivalensnek tekintünk, ha nem éppen párhuzamos, hanem valamely középpontból való vetítéssel, vagy ilyen vetítések összetételével vihetjük át őket egymásba.

Ha két egymást metsző α és β síkot egy ezekhez nem tartozó O pontból egymásra vetítünk, akkor a két sík pontjai között nem kapunk kivétel nélkül egyértelmű megfelelést. Az α síknak azok a pontjai ugyanis, amelyeket az O pontból vetítő sugarak a β síkkal párhuzamosak, nem felelnek meg a β sík egy pontjának sem ; hasonlóképpen az O ponton át α-val párhuzamosan fektetett sík és β metszésvonalán fekvő pontok kivételes pontok, ezeknek nem felel meg az α síkban egy pont sem. Szemléltetés céljából tegyük fel, hogy α vízszintes és β függőleges ; az α síkban fekvő idomokat ábrázolni akarjuk a β képsíkon, ahogyan az O pontból látjuk. Ha az α síkban egy változó pont minden határon túl eltávolodik, például egy olyan egyenes mentén, amely nem párhuzamos a β síkkal, akkor az O pontból a β síkra való vetülete mindjobban megközelíti annak a vízszintes egyenesnek valamely pontját, melyben az O ponton átfektetett vízszintes sík metszi a β képsíkot ; ezt az egyenest *horizontvonal*nak nevezzük. Ha két párhuzamos egyenesen egy-egy változó pont minden határon túl eltávolodik, képeik a horizontvonalnak ugyanahhoz a pontjához közelednek. Ezek a megállapítások indokolják, ha az egyenes minden határon túl eltávolodó pontjáról azt mondjuk, hogy az egyenes *végtelen távoli pont*jához tart, és hogy két párhuzamos egyenesen minden határon túl eltávolodó pontok ugyanahhoz a végtelen távoli ponthoz tartanak. Az α sík végtelen távoli pontjai és a horizontvonal pontjai kölcsönösen egyértelmű módon felelnek meg egymásnak az O középpontból való vetítéssel.

A fenti előírással minden egyeneshez hozzárendeltünk egy végtelen távoli pontot, két párhuzamos egyeneshez ugyanazt, két különböző irányú egyeneshez két különböző végtelen távoli pontot. A sík egyeneseihez rendelt végtelen távoli pontok összességét a sík végtelen távoli egyenesének nevezzük. A sík pontjainak és egyeneseinek összességét kibővítjük a végtelen távoli pontokkal és egyenessel, így kapjuk a *projektív sík*ot. Két projektív sík egymásra való vetítésénél már nincsenek kivételes pontok : az egyik sík bármely pontjának megfelel a másik síkban egy és csak egy pont, s az egyik sík bármely egyenesének a másik síkban egy egyenes.

A két projektív sík közti vonatkozást, melyet egy hozzájuk nem tartozó pontból való vetítés származtat, a két sík *perspektív vonatkozás*ának nevezzük. A párhuzamos vetítés a középpontból való vetítésnek olyan speciális esete, amelyben a vetítés középpontja valamely végtelen távoli pont, mely nem tartozik sem az egyik, sem a másik sík végtelen távoli egyeneséhez.

Két sík olyan megfelelését, amely egy vagy több perspektív vonatkozásból származik, *projektív vonatkozás*nak nevezünk. A sík önmagára való projektív leképezései csoportot alkotnak, melyet a *sík projektív csoportjá*nak nevezünk. A *sík projektív geometriájá*nak tárgya a projektív csoportnál invariáns tulajdonságok vizsgálata. A projektív geometria az affin geometriának s ezért az euklidesinek is általánosítása. Például két tetszőleges négyszög aequivalens egymással a projektív geometriában, azaz átvihetjük az egyiket a másikba egy vagy több perspektív leképezés alkalmazásával.

A projektív és az affin geometria viszonyának megvilágítására jegyezzük meg, hogy mindaddig még az affin geometriánál tartunk s nem jutottunk el a projektív geometriához, amíg a végtelen távoli pontok bevezetését csak kifejezésmódnak tekintjük (t. i. két egyenesről azt mondjuk, hogy közös a végtelen távoli pontjuk, a helyett, hogy azt mondanók: párhuzamosak). Az euklidesi, vagy az affin geometria alapján értelmezett projektív geometria azzal kezdődik, hogy, miután bevezettük a végtelen távoli elemeket, megszüntetjük ezeknek kivételes szerepét.

A projektív geometriát az euklidesi és az affin geometriából olyan általánosítással kaptuk, melynek során kibővítettük az elemek összességét és a csoportot is. Ennek az általánosításnak elméleti szempontból fontos előnye az, hogy egyszerűsíti és egységesíti az affin geometriának olyan tételeit, amelyeket egymástól csak a végtelen távoli egyenes kivételes szerepe különböztet meg, azaz amelyekben egymást metsző, illetve párhuzamos egyenesek megegyező módon szerepelnek. Példaképpen megemlítjük a DESARGUES-féle tétel általános alakját, mely általánosítja a 7. szakaszban megfogalmazott tételt s összefoglalja annak váltakozó feltételeit:

Ha az egy síkban fekvő, egymástól különböző AA', BB', CC' egyenesek egy ponton mennek át, akkor az AB és $A'B'$, az AC és $A'C'$ s a BC és $B'C'$ egyenespárok C'', B'', A'' metszéspontjai egy egyenesen feküsznek.

A síknak önmagára vagy egy másik síkra való projektív leképezését az a tulajdonság jellemzi, hogy egyeneseket egyenesekbe visz át. Ugyanezzel a tulajdonsággal értelmezzük a végtelen távoli elemekkel kiegészített, *projektív tér* önmagára való projektív leképezéseit. Tekintettel jellemző tulajdonságukra, ezeket a leképezéseket *kollineációk*nak is nevezzük. A tér projektív leképezéseiből álló csoport alapján értelmezzük a tér projektív geometriáját.

Az egyenesnek önmagára vagy egy másik egyenesre való projektív leképezéseit perspektív leképezések (azaz vetítések) szorzataként értelmezzük. Az egyenesen bármely négy pontnak kettősviszonya projektív invariáns, azaz egyenlő egy tetszőleges projektív leképezésnél származó képpontjuknak megfelelő sorrendben vett kettősviszonyával. Az euklidesi geometria alapján felépített projektív geometriában ez a jellemző tulajdonsága az egyenes projektív leképezéseinek. A projektív geometriának egy másik egységesítő elvét, a dualitás elvét a részletes tárgyalás során fogjuk ismertetni.

A projektív geometriának az euklidesi és az affin geometria alapján való értelmezése lényeges kerülőt jelent az axiomatikus tárgyalás szempontjából ; az euklidesi geometria felépítésekor ugyanis bevezettük az egybevágóság fogalmát s erre, valamint a párhuzamos egyenesekre vonatkozó axiómákat, viszont az affin geometria értelmezésekor kiküszöböltük az egybevágóság fogalmát, a projektív geometria bevezetésekor pedig a párhuzamos egyenesekét. A projektív geometria lényegesen egyszerűbben építhető fel közvetlenül, összetartozási axiómák, továbbá rendezési (vagy azokat helyettesítő összetartozási) axiómák alapján, melyekhez a folytonossági axiómákat kapcsolhatjuk.

Ha a projektív geometriát közvetlenül építjük fel, önként felvetődik a kérdés, hogyan juthatunk el a projektív geometriától az affin és az euklidesi geometriához. Meg kell találnunk és ellenkező irányban végigjárnunk azt az utat, melyen az euklidesi geometriától a projektív geometriához jutottunk. Erre vonatkozóan ad felvilágosítást a következő szakasz.

9. *A projektív csoport alcsoportjai.* Tekintsük megadottnak a projektív síkgeometriát. A síknak egy tetszőleges egyenesét nevezzük végtelen távoli egyenesnek ; ennek kitüntetésével az affin síkhoz jutunk. Az affin csoport a projektív csoportnak az az alcsoportja, melynek elemei a végtelen távoli egyenest önmagába viszik át.

Legyen a és b a projektív sík két különböző egyenese ; jelöljük $\mathbf{G}_a$-val és $\mathbf{G}_b$-vel a projektív csoportnak azokat az alcsoportjait, amelyeknek invariáns egyenese a illetve b. Legyen $\mathbf{S}$ a $\mathbf{G}_a$ csoport valamely eleme, és $\mathbf{T}$ a projektív csoport olyan leképezése, amely az a egyenest b-be viszi át ; az $\mathbf{S}$ *leképezésnek* $\mathbf{T}$-*vel való transzformáltján* értjük a $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{T}$ leképezést, azaz $\mathbf{T}$ inverzének, $\mathbf{S}$-nek és $\mathbf{T}$-nek szorzatát. Mivel $\mathbf{T}$ inverzénél a b egyenes a-ba, $\mathbf{S}$-nél a önmagába és $\mathbf{T}$-nél b-be megy át, ezért a $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{T}$ leképezés a b egyenest önmagába viszi át, azaz a $\mathbf{G}_b$ csoporthoz tartozik. A $\mathbf{G}_a$ csoport elemeinek a $\mathbf{T}$-vel való transzformálásnál kölcsönösen egyértelmű módon felelnek meg a $\mathbf{G}_b$ csoport elemei, s bármely két elem szorzatának a megfelelő elemeknek ugyanabban a sorrendben vett szorzata felel meg ; ezt röviden úgy fejezzük ki, hogy a **T**-vel való transzformálás a G_a és a G_b csoport között *izomorf* vonatkozást létesít. Ha ugyanis S_1 és S_2 a G_b csoport két különböző eleme, akkor a $T^{-1}S_1T$ és $T^{-1}S_2T$ elemek is különböznek egymástól ; az S_1S_2 szorzatnak **T**-vel való transzformáltja pedig $T^{-1}(S_1S_2)T=T^{-1}S_1T.T^{-1}S_2T$; ez S_1 és S_2 transzformáltjainak szorzata. A helyett a kifejezés helyett, hogy a G_a csoport elemeinek **T**-vel való transzformáltjai alkotják a G_b csoportot, röviden azt fogjuk mondani, hogy a G_b csoport a G_a csoportnak **T**-vel való transzformáltja. A projektív csoport G_a és G_b alcsoportjait, amelyek közül az egyik a másiknak a projektív csoport egy alkalmas elemével való transzformáltja, *aequivalens alcsoportok*nak nevezzük.

Az affin csoportnak, mint a projektív csoport alcsoportjának jellemzésére vonatkozóan a fentiek szerint a következőket jegyezhetjük meg : *habár a projektív sík két különböző a és b egyenesének végtelen távoli egyenesként való felvétele két különböző affin csoporthoz vezet, ezek a projektív csoportnak aequivalens alcsoportjai.*

Az affin geometriából az euklidesi geometriát a merőlegesség fogalmának bevezetésével kapjuk meg. Ennek értelmezése céljából felvesszük a végtelen távoli egyenesnek egy olyan önmagára való projektív leképezését, amely involutorius, azaz megegyezik inverzével ; ezt *abszolut involució*nak nevezzük és **J**-vel jelöljük. Két egyenest *merőleges*nek nevezünk, ha végtelen távoli pontjaik **J**-nél egymásba mennek át. Az a feltevésünk, hogy **J** involutorius, a merőlegesség szimmetrikus tulajdonságát fejezi ki : ha az a egyenes merőleges b-re, akkor b is merőleges a-ra ; az a feltevés pedig, hogy **J** projektív leképezés, aequivalens az euklidesi geometria következő tulajdonságával : egy tetszőleges parallelogramma s ennek két átlója a sík negyedforgásánál (azaz derékszöggel való elforgatásánál) egy parallelogrammába s ennek két átlójába megy át.

Az affin síkban csak olyan szakaszokat hasonlíthatunk össze egyenlőség tekintetében, amelyek ugyanazon az egyenesen, vagy párhuzamos egyeneseken feküsznek. Ennek és a merőlegesség fogalmának alapján értelmezhetjük az egyenesekre vonatkozó merőleges tükrözéseket, ezek segítségével pedig nem párhuzamos szakaszok egyenlőségét : az OA és OB szakaszok egyenlők, ha egy, az O ponton átmenő egyenesre vonatkozó merőleges tükrözésnél egymásba mennek át.

Az euklidesi sík hasonlósági csoportja az affin csoportnak az az alcsoportja, melynek elemei merőleges egyeneseket merőlegesekbe visznek át, vagyis amelyek felcserélhetők a végtelen távoli egyenes **J** involuciójával. A **J** abszolut involució különböző megválasztásainak megfelelő hasonlósági csoportok az affin csoportnak aequivalens alcsoportjai.

Az euklidesi sík kongruenciacsoportját (vagyis a kongruens leképezésekből álló csoportot) mint a hasonlósági, vagy az affin csoport alcsoportját a következő tulajdonság jellemzi: ha P és Q két tetszőleges pont, s p és q egy-egy a P, illetve a Q ponton átmenő irányított egyenes, akkor a kongruenciacsoportban pontosan két olyan leképezés van, mely a P pontot Q-ba s a p irányított egyenest q-ba viszi át. A projektív csoportnak három különböző típusú olyan alcsoportja van, melyre ugyanez a feltétel érvényes; ezek az euklidesi, a hiperbolikus, illetve az elliptikus sík kongruenciacsoportjával aequivalensek. E szerint a projektív síkgeometria egyaránt általánosítása az euklidesi, valamint a hiperbolikus és elliptikus, nem-euklidesi síkgeometriának.

10. *Euklidesi és nem-euklidesi geometria.* Az euklidesi, a hiperbolikus és az elliptikus geometriát, mint egymást kizáró rendszereket, az egy síkban fekvő egyenesek metszésére vonatkozó feltételek különböztetik meg; ezek a feltételek a következők:

a) Egy a egyeneshez egy hozzá nem tartozó P ponton át egy és csak egy olyan egyenes fektethető az a-n és P-n átmenő síkban, mely az a egyenest nem metszi. (Euklides-féle párhuzamossági axióma.)

b) Egy a egyeneshez egy hozzá nem tartozó P ponton át egynél több olyan egyenes fektethető az a-n és P-n átmenő Pa síkban, mely a-t nem metszi. A P ponton áthaladó és a Pa síkban fekvő egyenesek összességében van két olyan egyenes, amely az a-t metsző egyeneseket az a-t nem metsző egyenesektől elválasztja. (Bolyai—Lobacsefszkij-féle, vagy hiperbolikus párhuzamossági axióma.)

c) Minden a P ponton áthaladó és a Pa síkban fekvő egyenes metszi az a egyenest. (Riemann-féle, vagy elliptikus geometria axiómája.)

Az euklidesi és a nem-euklidesi geometriák közvetlen felépítésének alapjául összetartozási, rendezési és egybevágósági axiómákat veszünk fel, ezenkívül a metsző és nem metsző egyenesekre vonatkozó feltételek közül az egyiket, végül folytonossági axiómákat. Mint már fent megjegyeztük, az első kötetben foglalt **I, II, III** axiómacsoportok és az elliptikus geometria axiómája nem férnek meg egymással, ellenmondáshoz vezetnek ; bebizonyítottuk ugyanis az I–III axiómák alapján két, egymást nem metsző és egy síkban fekvő egyenes létezését (első kötet, 99. o., 109. tétel). A három geometria egységes tárgyalása céljából meg kell tehát változtatni a rendezési axiómákat olyan módon, hogy azok az egyenesen a pontok lineáris és ciklikus rendezését egyaránt megengedjék ; az ilyen módon módosított első három axiómacsoporthoz majd hozzákapcsolhatjuk a párhuzamossági axiómát, vagy az azt helyettesítő másik két axióma közül bármelyiket. Az egybevágósági axiómáknak ilyen értelemben való módosítását lásd ennek a kötetnek 436—438. oldalán.

11. *Körgeometria.* Az euklidesi és a nem-euklidesi síkgeometriáknak másik közös általánosítása a körgeometria ; ezt mint az euklidesi geometria általánosítását fogjuk előbb ismertetni.

Az euklidesi síkgeometriának azokban a tételeiben, amelyek egyenesek és körök metszésére vonatkoznak, teljes egységet érhetünk el azáltal, hogy az egyenest a kör elfajuló esetének tekintjük. E végett az euklidesi síkot egy végtelen távoli ponttal bővítjük ki, amely értelmezés szerint hozzátartozik a sík valamennyi egyeneséhez. Az ilyen módon kibővített síkot *zárt komplex sík*nak, vagy *függvénytani sík*nak nevezzük ; ennek bármely három pontján egy és csak egy (valóságos vagy elfajult) kör megy át. A függvénytani sík, szerkezetét tekintve, megegyezik a gömbbel, amelyre a síkot sztereográfikus vetítéssel képezzük le ; a vetítésnél a sík minden körének (ideszámítva az egyeneseket is) a gömbön kör felel meg és megfordítva.

A *körgeometria csoportját* a függvénytani síknak azok a kölcsönösen egyértelmű leképezései alkotják, amelyek a körök összességét önmagába viszik át ; ezeket a leképezéseket homográfiáknak vagy antihomográfiáknak nevezzük, a szerint, hogy megtartják, vagy megfordítják a sík irányítását. Az euklidesi síkon bevezetünk egy (x, y) derékszögű koordinátarendszert s ennek alapján értelmezzük a komplex síkban a $z=x+iy$ komplex koordinátát, ahol i az imaginárius egységet jelenti. A homográfikus leképezéseket a z komplex koordináta lineáris tört transzformációi fejezik ki, amelyeknek együtthatói komplex számok ; az antihomográfikus leképezések kifejezését ezekből z-nek komplex konjugáltjával való helyettesítésével kapjuk meg.

A körgeometria csoportjának az az alcsoportja, melynél a végtelen távoli pont fixpont, azaz önmagának felel meg, azonos az euklidesi sík hasonlósági csoportjával. A körgeometria csoportja tartalmaz olyan alcsoportokat, amelyek az euklidesi és a nem-euklidesi síkgeometriák kongruenciacsoportjával aequivalensek ; ezeket hasonló feltétellel jellemezhetjük mint a sík projektív csoportjának megfelelő alcsoportjait. Ennek a kötetnek tárgyalásai során a körgeometriát a projektív térgeometria keretében fogjuk megismerni. A gömbbel a projektív csoport szerint aequivalens, ú. n. elliptikus másodrendű felületek önmagukra való projektív leképezései olyan csoportot alkotnak, mely megegyezik a körgeometria csoportjával. A körgeometriának és a nem-euklidesi geometriáknak közvetlen tárgyalására más alkalommal térünk vissza.

12. *Komplex projektív geometria.* A közönséges, vagy valós projektív geometria analitikus tárgyalása, nevezetesen a projektív leképezések analitikus kifejezése alkalmat nyujt a projektív geometriának egy fontos általánosítására. A projektív egyenesen és síkon homogén koordinátákként bevezethetünk valós számpárokat, illetve számhármasokat ; ezeknek homogén lineáris transzformációi fejezik ki a projektív leképezéseket. A komplex projektív geometria értelmezése céljából a valós számpárok és számhármasok helyett komplex számpárokat és számhármasokat vezetünk be, ezek összességét nevezzük komplex projektív egyenesnek, illetve síknak, s a koordinátáknak vagy komplex konjugáltjaiknak komplex együtthatókkal képezett homogén lineáris transzformációit projektív leképezéseknek. (A komplex projektív egyenes projektív csoportja ezek szerint megegyezik a körgeometria csoportjával.)

A komplex projektív geometriában egységes alakban jelennek meg a valós projektív geometriának egyes fogalmai és tételei. Ennek az egységesítésnek elérésére szokásos már magában a valós projektív geometriában is imaginárius (azaz komplex) elemekről beszélni; például az egyenes egymással felcserélhető elliptikus leképezéseiről azt mondhatjuk, hogy közösek az imaginárius fixpontjaik (lásd 18. § és 98. §, 476. oldalon). A valós projektív geometriában azonban ez csak kifejezésmód, mivel az elemek összességét (t. i. a valós elemekét) axiómáinkkal meghatároztuk s ezért tárgyalásunk csakis ezekre az elemekre vonatkozhatik. Ha pedig az elemek összességét imaginárius elemek bevezetésével rendszeresen kibővítjük, ezáltal egy új geometriai rendszerhez, t. i. épen a komplex projektív geometriához jutunk. Ezek a szempontok indokolják, hogy a valós projektív geometria tárgyalásában mellőzzük az imaginárius elemek alkalmazását. Külön foglalkozunk azonban az egyik szakaszban a komplex projektív geometria analitikus értelmezésével.

Mivel a komplex számok összességében nincs természetes (lineáris vagy ciklikus) rendezés, a komplex projektív geometria axiomatikus felépítésében nem alkalmazhatunk rendezési axiómákat. Az összetartozási axiómák, alkalmasan megválasztott topologiai, azaz folytonossági axiómákkal együtt viszont közös alapját adják a valós és a komplex projektív geometriának; erre a kérdésre a könyv utolsó fejezetében térünk rá.

13. *Topologia.* A geometria eddigi általánosításaiban az elemi felépítés szempontjának megfelelően az euklidesi sík kongruencia- vagy hasonlósági csoportját olyan csoporttá bővítettük, amely — mint a projektív csoport — változatlanul hagyja az egyenesek összességét, vagy — mint a körgeometria csoportja — önmagába visz át egy másik, egyszerűen értelmezett vonalrendszert: a körök és egyenesek összességét. Láttuk, hogyan lehet egy bővebb csoport alcsoportjaként jellemezni magát az euklidesi síkgeometria kongruenciacsoportját, s ezzel együtt a nem-euklidesi síkgeometriák kongruenciacsoportját is. Minél általánosabb, azaz bővebb csoportból indulunk ki, annál nagyobb változatosságot nyujt az alcsoportok meghatározása s ezért annál tökéletesebben, mélyebben ismerhetjük meg a különböző geometriák egymáshoz való viszonyát.

Bár ennek a kötetnek tárgyalása a projektív geometria keretében marad, a bevezetésünkben ismertetett elvek megvilágítása céljából felsoroljuk az eddig említetteknél általánosabb, következő csoportokat.

A sík biracionális transzformációinak csoportja. Legyen (x, y) egy derékszögű koordinátarendszer a síkban; a sík biracionális transzformációján olyan leképezést értünk, amelynél bármely (x, y) pont képének (x', y') koordinátái x-nek és y-nak racionális függvényei s megfordítva, x és y is racionális függvényei x'-nek és y'-nek. A sík önmagára való biracionális transzformációi csoportot alkotnak; az ennél a csoportnál invariáns tulajdonságok vizsgálata alkotja az *algebrai geometria* tárgykörét. Az algebrai geometria szerves felépítése szükségessé teszi a valós számtestnek komplex számtestté való kibővítését.

A sík analitikus leképezéseinek csoportja, továbbá az *n-szer foly-*

tonosan differenciálható leképezések csoportja azokból a kölcsönösen egyértelmű, folytonos leképezésekből áll, melyeknél az (x, y) pont képének x', y' koordinátái x-nek és y-nak analitikus, illetve n szer folytonosan differenciálható függvényei s ugyanilyen függvényei x és y az x' és y' változóknak. Ezeknek a csoportoknak a *differenciálgeometria* különböző fejezetei felelnek meg.

A sík topologikus leképezéseinek csoportja. Topologikus leképezéseknek nevezzük a kölcsönösen egyértelmű és folytonos leképezéseket. A sík önmagára való topologikus leképezései csoportot alkotnak, mely alcsoportként tartalmazza az előbb említett csoportokat. *A sík topologiája* az az általános geometria, mely síkbeli alakzatoknak a topologikus csoportnál invariáns tulajdonságaival foglalkozik.

Első pillanatban úgy látszik, mintha túlságosan messzire mentünk volna az általánosítás során, midőn a topologikus csoportot vettük fel egy geometriát értelmező csoportnak, hiszen topologikus leképezéseknél egy olyan tulajdonság sem változatlan, mellyel szokás szerint foglalkozunk a geometriában. Az egyenes fogalma nem invariáns, mivel egy egyenest topologikus leképezéssel átvihetünk egy görbe vonalba ; a kört átvihetjük egy ellipszisbe, vagy egy görbevonalú négyszögbe. A távolság vagy szög mértéke sem nyujt invariáns adatot ; két tetszőleges pontot átvihetünk két másik, tetszőleges pontba, s egy szög két szárát egy pontból kiinduló két görbe vonalba.

Mielőtt rátérnénk néhány topologiai invariáns ismertetésére, még általánosítjuk a *topologiai aequivalencia* fogalmát. Két alakzatot topologiailag aequivalensnek nevezünk, ha megadható pontjaik között egy topologikus vonatkozás. A sík topologikus csoportja szerint való aequivalencia erősebb a most megfogalmazott feltételnél ; két síkbeli ponthalmaznak a sík topologikus csoportja szerint való aequivalenciájához nem elégséges, hogy létezik pontjaik között egy topologikus vonatkozás, hanem az is szükséges, hogy egy ilyen vonatkozás kiterjeszthető legyen az egész sík önmagára való topologikus leképezésévé. Egy alakzat *abszolut tulajdonság*ának nevezzük minden olyan topologiai tulajdonságát, mely annak összes topologikus leképezéseinél változatlan, azaz közös tulajdonsága a megadottal aequivalens valamennyi alakzatnak. Egy síkbeli ponthalmaznak a síkra vonatkozó *relatív tulajdonság*ának nevezzük minden olyan topologiai tulajdonságát, mely az őt tartalmazó síknak önmagára, vagy egy másik síkra való topologikus leképezéseinél változatlan. A relatív tulajdonságok magának a halmaznak a szerkezetén kívül annak a síkban való elhelyezésére is vonatkoznak. Hasonló módon értelmezzük egy térbeli ponthalmaznak a térre vonatkozó relatív tulajdonságait.

Topologiai invariánsok példájaként a következőket említjük meg. *Összefüggő* halmaznak minden topologikus képe is összefüggő ; például az euklidesi síkon az ellipszis összefüggő, a hiperbola nem, ezért nem lehet ezeket egymásra topologikusan leképezni. — Egy alakzatot *önmagában kompakt*nak nevezünk, ha bármely, végtelen sok pontból álló részhalmazának van legalább egy, az alakzathoz tartozó sűrűsödési pontja ; önmagában kompakt alakzatnak minden topologikus képe is ilyen alakzat. Például a projektív sík és a függvénytani sík önmagában kompakt, az euklidesi sík nem ; az utóbbi nem aequivalens a két előbbi közül egyikkel sem. — Az euklidesi sík és a függvénytani sík *irányítható*, a projektív sík *nem-irányítható ;* ebből következik, hogy a projektív sík nem aequivalens a függvénytani síkkal. Az eddig felsoroltak abszolut tulajdonságok.

A síkra vonatkozó relatív tulajdonságok példájaként említjük a következőket. Egy síkbeli ponthalmazt *nyílt halmaz*nak nevezünk, ha bármely pontjának egy síkbeli környezete is a halmazhoz tartozik ; nyílt halmaznak a képe bármely olyan topologikus leképezésnél, mely a halmazt egy síkbeli ponthalmazba viszi át, szintén nyílt halmaz. — A körvonalnak a síkra vonatkozó topologiai tulajdonságai a következők : a síkot két tartományra, azaz két összefüggő nyílt halmazra osztja fel s minden pontja közös határpontja a két tartománynak. Ugyanez az állítás érvényes a síkban fekvő bármely *egyszerű zárt görbé*re (vagy Jordan-féle görbére) vonatkozóan, melyet a körvonalnak tetszőleges topologikus leképezésnél származó képeként értelmezünk (Jordan-*féle görbetétel*). Egy alakzat részeinek a megadott alakzatra vonatkozó relatív tulajdonságai magának az alakzatnak abszolut tulajdonságait is értelmezhetik. Például a gömböt s a vele a projektív csoport szerint aequivalens elliptikus másodrendű felületeket jellemzi az a tulajdonság, hogy minden a felületen fekvő egyszerű zárt görbe azt kettéosztja ; a másodrendű vonalfelületen megadható olyan egyszerű zárt görbe, amely nem osztja szét a felületet. Ebből következik, hogy az elliptikus másodrendű felületek topologiailag nem aequivalensek a másodrendű vonalfelületekkel.

14. *Az euklidesi geometria topologiai jellemzése.* Miután láttuk, hogyan lehet az euklidesi síkgeometria csoportját a projektív csoportnak, vagy a körgeometria csoportjának alcsoportjaként jellemezni,

felmerül az a kérdés, mely — természetesen topologiai jellegű — feltételekkel jellemezhetjük a topologikus csoportnak az euklidesi síkgeometria csoportjával aequivalens alcsoportjait. A projektív geometria és a körgeometria önálló felépítése elvezet a sík fogalmához s a geometria csoportjának értelmezéséhez. Az euklidesi síkgeometria topologiai felépítésénél azonban megadottnak kell tekinteni a sík fogalmát, vagy jellemezni kell topologiai feltételekkel. Megemlítjük, hogy a sík topologiai jellemzésének kérdése megoldható, sőt bizonyos módon már megoldott feladat ; ennek ismertetése messzire vezetne, tekintsük ezért megadottnak a számsík fogalmát.

Ponton értünk minden (x, y) számpárt és *számsík*on az (x, y) pontok összességét. Az (x, y) pont környezetét azok az (x', y') pontok alkotják, melyeknek x' és y' koordinátái kevéssel különböznek rendre x-től és y-tól.

A síknak mint az (x, y) számpárok összességének értelmezése önmagában még nem elégséges egy síkgeometria értelmezéséhez. Azt mondhatná ugyan valaki, nevezzük egyenesnek olyan számpárok összességét, amelyek kielégítenek egy lineáris egyenletet ; de hátha poláris koordinátákat jelentenek x és y, vagy pedig az euklidesi geometriának megfelelő derékszögű koordináták két tetszőleges egyértelmű folytonos függvényét? Gondoljuk el az eddigi adatokat a következő módon : legyen megadva az euklidesi síkgeometria, egyeneseivel, távolságok egyenlőségével stb. ; vigyük át a síkot egy topologikus leképezéssel egy másik euklidesi síkra. Az új síkon az egyeneseknek görbe vonalak, egyenlő távolságú pontpároknak különböző távolságú pontpárok felelnek meg ; az eredeti geometria a másik síkon egy eltorzult, amorf képben jelenik meg. A számsík bevezetése tehát nem jelent egyebet, mint a sík pontjainak s azok környezetének ismeretét.

Legyen α és α' két sík, legyen továbbá **T** az α nak, **T**$'$ az α' nek önmagára való topologikus leképezése. A két leképezést *topologiailag aequivalens*nek nevezzük, ha megadható az α síknak α' re olyan **S** topologikus leképezése, amellyel való transzformálás a **T** leképezést **T**$'$ be viszi át. — Legyen továbbá **G** az α síknak, **G**$'$ az α' síknak önmagára való topologikus leképezéseiből álló valamely csoport. A két csoportot topologiailag aequivalensnek nevezzük, ha az α síknak az α' síkra való, alkalmasan választott **S** topologikus leképezésével való transzformálás a **G** csoportot a **G**$'$ csoportba viszi át.

Két, egymással aequivalens leképezésnek közös tulajdonságai például a következők : ha az egyik leképezésnek van fixpontja, akkor a másiknak is van ; pontosabban : **T** bármely fixpontjának **S**-nél származó képe a $\mathbf{T}'=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{S}$ leképezésnek fixpontja ; ha **T** periodikus leképezés, vagyis n-edik hatványa minden pontot önmagának feleltet meg, akkor **T'** is periodikus és periodusa ugyanaz az n szám ; ha **T** megtartja a sík irányítását, akkor **T'** is. Két általános topologikus leképezés aequivalenciájának kérdése megoldhatatlan feladat. Egyszerű alkatú leképezések topologiai jellemzésének kérdését ismertetjük a következő példával.

Legyen **T** az euklidesi síknak az az eltolása, amelyet az (x, y) derékszögű koordinátákkal az $x'=x+1$, $y'=y$ képletek fejeznek ki. Meghatározandók azok a topologiai feltételek, amelyek a **T**-vel aequivalens **T'** leképezéseket jellemzik. Ha **T'** aequivalens **T**-vel, akkor egy olyan **S** leképezést, amely **T**-t **T'**-be transzformálja, felhasználhatunk az α síkban értelmezett (x, y) koordinátáknak az α síkra való átvitelére ; ezekkel a koordinátákkal a **T'** leképezést ugyanazok a képletek fejezik ki. Kérdésünk tehát így fogalmazható : mely, a **T'** leképezésre vonatkozó topologiai feltételek esetében lehet bevezetni az α' síkban egy olyan (x, y) koordinátarendszert, amellyel a **T'** leképezést az $x'=x+1$, $y'=y$ képletek fejezik ki?

Az euklidesi sík eltolásaiból álló csoport topologiai jellemzésének kérdését a fentihez hasonló, következő módon fogalmazhatjuk meg : ha **G'** az α' sík önmagára való topologikus leképezéseiből álló valamely csoport, mely topologiai feltételek esetében vezethetünk be az α' síkban egy olyan (x, y) koordinátarendszert, amellyel a **G'** csoport leképezéseit az $x'=x+a$, $y'=y+b$ képletek fejezik ki?

Hasonló módon fogalmazhatjuk meg az euklidesi sík mozgás-, kongruencia-, vagy hasonlósági csoportjának topologiai jellemzésére vonatkozó kérdést. Ha valaki a sík topologikus csoportjában létező nagy általánosságra (vagy talán zűrzavarra) gondolva a kérdés bonyolult megoldását várja, akkor azt meg fogja lepni, hogy a nevezett csoportokat igen egyszerű tulajdonságok jellemzik. Például az *euklidesi sík hasonlósági csoportjának jellemzését* a következő tétel adja :

Legyen **G** a sík önmagára való topologikus leképezéseinek a síkon kétszeresen tranzitív, folytonos csoportja ; ez azt jelenti, hogy bármely két A, B és A', B' pontpárnak a csoportban egy és csak egy olyan leképezés felel meg, amely az A pontot A'-be és B t B'-be viszi át s ez a leképezés folytonos módon változik az A', B' pontpárral. A **G** csoport topologiailag aequivalens az euklidesi sík irányítását megtartó hasonlósági leképezések csoportjával.

Ezzel a tétellel kapcsolatban rámutatunk az euklidesi geometria topologiai jellemzésének és az első kötetben tárgyalt elemi felépítésnek viszonyára. Nem tekintve azt, hogy az axiómák sorrendje fordított: az elemi felépítésben a folytonossági axiómák voltak a zárókövek, s a topologiai felépítésben a folytonosság fogalma az első alapfogalom, a fenti tételt az euklidesi geometria elemi megalapozásával egyenlőrangú eredménynek tekinthetjük; nevezetesen olyan megalapozásnak, melyben alapfogalmakként a *folytonosság* és a rendezett ponthármasokra (azaz irányított háromszögekre) értelmezett *hasonlóság* (jele: $\sim$) szerepelnek, s teljesülnek a következő axiómák:

1. Ha $(A, B, C) \sim (A', B', C')$, akkor $(B, C, A) \sim (B', C', A')$.

2. Ha $(A, B, C) \sim (A' B', C')$, akkor $(A', B', C') \sim (A, B, C)$.

3. Ha $(A, B, C) \sim (A', B', C')$ és $(A', B', C') \sim (A'', B'', C'')$, akkor $(A, B, C) \sim (A'', B'', C'')$.

4. Minden (A, B, C) ponthármasnak és (A', B') pontpárnak megfelel egy és csak egy olyan C' pont, melyre $(A, B, C) \sim (A', B', C')$.

5. Ha $(A, B, C) \sim (A', B', C')$ és $(A, B, D) \sim (A', B', D')$, s ha a D pont a C pont elég kis környezetéhez tartozik, akkor D' a C' pontnak tetszőleges kis környezetéhez tartozik.

6. Ha $(A, B, C) \sim (A', B', C')$, s ha A' az A-nak és B' a B-nek elég kis környezetéhez tartozik, akkor C' a C-nek tetszőleges kis környezetéhez tartozik.

A fenti axiómákkal értelmezett geometria az euklidesi sík hasonlósági geometriája.

Az itt ismertetett tételek tárgyalására más alkalommal fogunk visszatérni.

Ezekkel a kérdésekkel kapcsolatban említjük meg végül a geometriának olyan feltételekkel való jellemzését, melyek a megfelelő *csoport szerkezetére* vonatkoznak, esetleg folytonossági tulajdonságok nélkül. Például, az euklidesi síkgeometria jellemzése céljából, soroljuk fel a kongruenciacsoport néhány olyan szerkezeti tulajdonságát, melyek együttesen jellemzik a csoportot; ilyen tulajdonságok: involutorius elemek (t. i. félforgások és tükrözések) létezése, ezeknek egymással és a csoport többi elemével való kapcsolatai stb. Ahhoz, hogy ilyen természetű feltételekkel jellemezhessük a közönséges euklidesi geometriát, ismét szükséges lesz a folytonosságnak valamilyen alakban való bevezetése; de ez itt, ugyanúgy mint az elemi felépítésben, utoljára marad.

I. A projektív geometria alapjai.

Ennek a fejezetnek bevezető tárgyalásában megadottnak tekintjük az euklidesi geometriát az első kötet **I—V** axiómacsoportjai alapján. A Bevezetésben ismertetett elvek szerint fogjuk tárgyalni az affin és a projektív geometriát, mint az euklidesi geometria általánosítását.

A tárgyalás módját illetően a következőket jegyezzük meg. Az összetartozási axiómák (**I**) és a párhuzamossági axióma (**IV**) alapján értelmezünk végtelen távoli elemeket; az ezekkel kibővített rendszer összetartozási és rendezési alaptételeit levezetjük az euklidesi geometria összetartozási és rendezési axiómáiból (**II**); ezek alapján ismertetjük a projektív geometria tételeit. Közben ideiglenesen felhasználjuk az euklidesi egybevágósági axiómákat (**III**), ezek alapján értelmezzük a kettősviszonyt, s a kettősviszony tulajdonságaiból vezetjük le a projektív vonatkozások alaptételét (**5**.5 tétel).[1] Később a folytonossági axiómák (**V**) felhasználásával az alaptételnek a kettősviszony fogalmától független bebizonyítását adjuk. Ezáltal a projektív geometriának az összetartozási, rendezési és folytonossági axiómák alapján való tárgyalásához jutunk.

Könnyebb áttekinthetőség céljából a szakaszok címe után zárójelben feltüntetjük az euklidesi, illetve a projektív geometriának azokat az axiómacsoportjait, melyeken az illető szakasz tárgyalása alapul. Azokat a tételeket, amelyeknek levezetésében az egybevágóság fogalma szerepel, sorszámuk előtt *-gal jelöljük meg.

1. §. Végtelen távoli elemek értelmezése. (I és IV).

É r t e l m e z é s. Minden egyenesnek megfeleltetünk egy és csak egy végtelen távoli pontot, melyet *az egyenes végtelen távoli pontjá*nak nevezünk. Két egyenes végtelen távoli pontja akkor és csak akkor

[1] Utalásoknál az első, vastag szám jelenti a szakasz sorszámát, a második az illető szakaszban alkalmazott sorszámot; például **5** 7 jelenti az 5. §-ban 7. sorszámmal jelölt részt vagy tételt.

közös, ha a két egyenes párhuzamos egymással. Egy sík végtelen távoli pontjain értjük a síkhoz tartozó egyenesek végtelen távoli pontjait; ezeknek összességét *a sík végtelen távoli egyenesé*nek nevezzük. A tér egyeneseinek végtelen távoli pontjait a tér végtelen távoli pontjainak s ezek összességét *a tér végtelen távoli síkjá*nak nevezzük.

Megjegyzés. A fenti értelmezéssel aequivalens a következő, mely logikailag teljesebb, viszont kifejezését illetően nehézkesebb. Végtelen távoli ponton egy egyenessel párhuzamos egyenesek összességét értjük; a végtelen távoli pont ennek az összességnek mindegyik egyeneséhez tartozik. Végtelen távoli egyenesen egy síkkal párhuzamos síkok összességét értjük; ezek közül a síkok közül mindegyiken rajta fekszik az illető végtelen távoli egyenes. Végtelen távoli síkon az értelmezett végtelen távoli pontok és egyenesek összességét értjük. Egy végtelen távoli pont akkor tartozik egy végtelen távoli egyeneshez, ha a pontot értelmező egyenesek párhuzamosak a végtelen távoli egyenest értelmező síkokkal.

Értelmezés. Az egyenesből, a síkból, illetve a térből végtelen távoli elemeik hozzáfűzésével származó alakzatokat *affin* vagy *projektív egyenes*nek, *sík*nak, illetve *tér*nek nevezzük, mégpedig a szerint, hogy megtartjuk vagy megszüntetjük ezekben a végtelen távoli elemek kivételes szerepét.

Az euklidesi geometria összetartozási axiómái (**I. 1**—**7**) és párhuzamossági axiómája (**IV**), valamint a fenti értelmezések alapján bebizonyítjuk *a projektív geometria összetartozási axiómáit*, melyekben pont, egyenes és sík a projektív geometria elemeit jelenti. — Miként az euklidesi geometria felépítése során tettük, a projektív geometria összetartozási axiómáiban is a pont és egyenes, valamint a pont és sík összetartozását vesszük fel alapfogalomnak. Értelmezés szerint egy egyenes akkor tartozik egy síkhoz, ha az egyenes minden pontja a síkhoz tartozik. (Lásd erre vonatkozóan a 103. §-t is.)

A projektív geometria összetartozási axiómáinak következő csoportját **P I**-gyel fogjuk jelölni.

a) *Bármely két ponthoz tartozik egy és csak egy egyenes.*

a') *Bármely két síkhoz tartozik egy és csak egy egyenes.*

b) *Bármely egyeneshez tartozik legalább három pont.*

b') *Bármely egyenesen legalább három sík megy át.*

c) *Bármely síkhoz tartozik három, nem egy egyenesen fekvő pont.*

c') *Bármely ponton átmegy három, nem egy egyenesen átmenő sík.*

d) *Ha egy egyenes két pontja egy síkhoz tartozik, akkor az egyenes ehhez a síkhoz tartozik.*

d') *Ha egy egyenesen átmenő két sík tartalmaz egy pontot, akkor ez a pont az egyeneshez tartozik.*

e) *Bármely három, nem egy egyenesen fekvő pont egy és csak egy síkhoz tartozik.*

e') *Bármely három síknak, melynek nincs közös egyenese, egy és csak egy közös pontja van.*

f) *Egy egyenes és egy hozzá nem tartozó pont egy és csak egy síkhoz tartozik.*

f') *Egy egyenesnek és egy ezt nem tartalmazó síknak egy és csak egy közös pontja van.*

g) *Két olyan egyenesnek, mely egy síkhoz tartozik, van egy és csak egy közös pontja.*

g') *Két olyan egyenesen, mely egy ponton megy át, átmegy egy és csak egy sík.*

h) *Van legalább négy pont, mely nem tartozik egy síkhoz.*

h') *Van legalább négy sík, mely nem megy egy ponton át.*

Az **a)** tétel bizonyítása a következő. Legyen A és B két közönséges (azaz végesben fekvő) pont ; az **I.2** axióma szerint van egy és csak egy AB egyenes, ez végtelen távoli pontjával kiegészítve az AB projektív egyenes. Ha A végesben fekvő, B pedig végtelen távoli pont, akkor legyen b olyan egyenes, melynek végtelen távoli pontja B ; az A ponton átmegy a **IV** axióma szerint egy és csak egy, b-vel párhuzamos egyenes ; ez B-vel kiegészítve adja az AB egyenest. Ha A és B végtelen távoli pont, akkor egy végesben fekvő C ponton át felvesszük azt az a és b egyenest, melynek végtelen távoli pontja A, illetve B. Az a és b egyeneseken átfektetett sík végtelen távoli egyenese, mely az első kötet 37. §-ában foglalt eredmények szerint független a C pont megválasztásától, az A, B végtelen távoli pontok által meghatározott AB egyenes.

Az **a')** tétel bizonyítása a következő. Ha α és β két közönséges (azaz a végtelen távoli síktól különböző) sík, akkor vagy metszik egymást egy $\alpha\beta$ egyenesben, vagy párhuzamosak egymással, s ekkor közös végtelen távoli egyenesük az $\alpha\beta$ egyenes. Ha α közönséges sík, β pedig a végtelen távoli sík, akkor az α sík végtelen távoli egyenese a két sík közös $\alpha\beta$ egyenese.

A **b)** tétel igazolására jegyezzük meg, hogy egy egyeneshez az

I.1 axióma szerint legalább két pont tartozik ; ez a két pont s a végtelen távoli pont a projektív egyenesnek három pontját adja.

A **b'**) tétel igazolása a következő. Legyen először a egy közönséges egyenes, A és B ennek két, végesben fekvő pontja. Az **I.3** és **7** axióma folytán van legalább egy olyan C pont, mely nem tartozik az a egyeneshez, s egy olyan D pont, mely nem tartozik az A, B, C pontok által az **I.4** axióma értelmében meghatározott ABC síkhoz. A CD egyenes nem párhuzamos a-val, tehát a CD egyenes végtelen távoli E pontja nem tartozik a-hoz. Az ABC és ABD síkok, továbbá az ABE sík, vagyis az a egyenesen átfektetett s a CD egyenessel párhuzamos sík különböznek egymástól s átmennek az a egyenesen (**I. 5**). Ha másodszor a egy végtelen távoli egyenes, legyen A, B, C, D négy, nem egy síkban fekvő közönséges pont, és α egy olyan sík, melynek végtelen távoli egyenese a. Az A, B, C, D pontokon átmenő, α-val párhuzamos síkok nem lehetnek azonosak egymással ; van tehát ezek között két különböző ; ez a két sík s a végtelen távoli sík három különböző, az a egyenesen átmenő síkot ad.

A fentiekhez hasonló meggondolásokkal adódik a többi, felsorolt tétel. Ezeknek igazolását az olvasóra bízzuk ; csak azt jegyezzük meg, hogy *a fenti tételek nem függetlenek egymástól,* hanem közülök néhányat levezethetünk a többiből az euklidesi geometria axiómáira, vagy a végtelen távoli elemek értelmezésére való hivatkozás nélkül is.

A helyett a kifejezés helyett, hogy két elem (pont, egyenes vagy sík) közül egyik a másikhoz tartozik, azt is fogjuk használni, hogy a két elem *egyesített helyzetű.*

A fenti összetartozási tételekben a pont és a sík szerepe szimmetrikus ; az ugyanazzal a betűvel jelölt tételek közül bármelyikből a másikat kapjuk, ha benne a pont és a sík szerepét felcseréljük egymással. Ezt a szabályszerűséget úgy fejezzük ki, hogy a projektív térgeometria összetartozási tételeiben érvényes a *dualitás elve,* amely szerint :

1.1. *A projektív térgeometria tételeiben a pont és a sík szerepe felcserélhető.*

A projektív síkgeometria összetartozási axiómái a következők :

Bármely két ponthoz tartozik egy és csak egy egyenes.
Bármely két egyenesnek egy és csak egy közös pontja van.
Bármely egyeneshez tartozik legalább három pont.

Bármely ponton átmegy legalább három egyenes.
Van a síkban három, nem egy egyenesen fekvő pont.
Van a síkban három, nem egy ponton átmenő egyenes.

Ezek az axiómák a projektív térgeometria fenti összetartozási axiómáiban foglaltatnak vagy azokból könnyen levezethetők. A projektív síkgeometria összetartozási axiómáiban a pont és az egyenes szerepe szimmetrikus. A síkgeometriára vonatkozó dualitás elve a következő:

1.2. *A projektív síkgeometria tételeiben a pont és az egyenes szerepe felcserélhető.*

A projektív síkgeometria dualitási elvének a térbeli dualitás szerint az egy pontra vonatkozó következő dualitási elv felel meg:

1.3. *A projektív geometriának olyan tételeiben, melyek egy ponton áthaladó egyenesekre és síkokra vonatkoznak, az egyenesek és síkok szerepe felcserélhető.*

Megjegyzés. Félreértés elkerülése végett megjegyezzük, hogy a fent megfogalmazott dualitási elveket nem bizonyítottuk be; csupán megállapítottuk, hogy a felsorolt összetartozási axiómákban ezek az elvek érvényesek. A projektív geometria felépítése során ügyelni fogunk arra, hogy az axiómákban is, s az alkalmazott módszerekben is érvényesüljön a dualitás elve; ebből majd önként következik, hogy a fent megfogalmazott dualitási elv a maga általánosságában érvényes. Midőn pedig egy bebizonyított tétel duálisát bizonyítás nélkül kimondjuk, utalunk arra, hogy a tétel bizonyításának a dualitás elve szerint való átalakítása szolgáltatja a duális tétel bebizonyítását.

2. §. A projektív geometria elemi alakzatai. (P I).

A dualitás elvének megfelelően a következő módon értelmezzük a projektív geometria elemi alakzatait.

1) *Pontsor:* egy egyeneshez tartozó pontok összessége.

2) *Síksor:* egy egyenesen áthaladó síkok összessége.

3) *Sugársor:* egy síkban fekvő s egy ponton áthaladó egyenesek összessége.

A fenti három alakzatot, melyek közül 1) és 2) egymásnak, és 3) önmagának felel meg a dualitás elve szerint, *elsőfajú elemi alakzat*nak nevezzük. A síksor közös egyenesét *tengely*nek, a sugársor közös pontját *középpont*nak nevezzük.

4) *Pontmező:* egy síkban fekvő pontok összessége.
5) *Sugármező:* egy síkban fekvő egyenesek összessége.
6) *Sugárnyaláb:* egy ponton áthaladó egyenesek összessége.
7) *Síknyaláb:* egy ponton áthaladó síkok összessége.

A most felsorolt négy alakzatot *másodfajú elemi alakzat*nak nevezzük; ezek közül 4) és 7) s ugyancsak 5) és 6) egymásnak felel meg a dualitás elve szerint. A sugárnyaláb, illetve a síknyaláb közös pontját *középpont*nak nevezzük.

8) *Ponttér:* a tér pontjainak összessége.
9) *Síktér:* a térben fekvő síkok összessége.

Ez a két, *harmadfajú elemi alakzat* egymásnak felel meg a dualitás értelmében.

3. §. Projektív alapműveletek. (P I).

A projektív geometria alapvető műveleteit: a *vetítést* és a *metszést* a projektív geometria összetartozási axiómái alapján s a dualitás elvének megfelelően következőképpen értelmezzük.

Értelmezés. Az *O pontból való vetítés* az a leképezés, mely minden, O-tól különböző A pontnak az OA egyenest, s minden, O-n át nem haladó a egyenesnek az O pont és az a egyenes által meghatározott Oa síkot felelteti meg. Az *s egyenesről való vetítés* minden, s-hez nem tartozó A pontnak az As síkot és minden, s-et metsző a egyenesnek az as síkot felelteti meg.

Az O pontból való vetítésnél az O-t nem tartalmazó a egyenesen fekvő pontsornak az Oa síkban fekvő, O középpontú sugársor felel meg.

Ha a és s torz (azaz nem egy síkhoz tartozó) egyenesek, akkor az s egyenesről való vetítésnél az a egyenesen fekvő pontsornak az s tengelyhez tartozó síksor felel meg.

Értelmezés. A *σ síkkal való metszés* az a leképezés, mely minden, σ-tól különböző α síknak a σ és α síkok $\sigma\alpha$ metszésvonalát, s minden, σ-hoz nem tartozó a egyenesnek σ és a közös σa pontját felelteti meg. Az *s egyenessel való metszés* minden, s-en át nem haladó α síknak α és s metszéspontját s minden, s-sel egy síkban fekvő a egyenesnek a és s metszéspontját: az as pontot felelteti meg.

A σ síkkal való metszésnél egy olyan síksornak, melynek a tengelye nem tartozik a σ síkhoz, egy a σ síkban fekvő sugársor felel meg; ennek középpontja σ és a metszéspontja.

Ha a és s torz egyenesek, akkor az s egyenessel va ó metszés az a tengelyhez tartozó síksornak az s egyenesen fekvő pontsort felelteti meg.

Egy síknak egy rajta kívül fekvő O pontból való vetítésénél a síkban fekvő pontmezőnek az O ponthoz tartozó sugárnyaláb, a síkban fekvő vonalmezőnek az O ponthoz tartozó síknyaláb felel meg. Az O ponthoz tartozó sugárnyalábnak és síknyalábnak egy O-n át nem haladó σ síkkal való metszésnél a σ síkban fekvő pontmező, illetve vonalmező felel meg.

Értelmezés. Két elemi alakzatról azt mondjuk, hogy egymással *perspektív vonatkozásban* van, ha az egyik a másikból vetítéssel vagy metszéssel, vagy mindkettő egy harmadik elemi alakzatból vetítéssel vagy metszéssel származik. Másszóval két elemi alakzatnak olyan vonatkozását, mely vagy egy vetítéssel vagy egy metszéssel, vagy egy vetítés és egy metszés összetételéből származik, perspektív vonatkozásnak nevezzük.

Legyen például a egy egyenes, O egy hozzá nem tartozó pont; jelöljük α-val az Oa síkot. Az O pontból való vetítésnél az a-n fekvő pontsornak az α síkban fekvő, O középpontú sugársor felel meg; a pontsor és a sugársor perspektív vonatkozásban van. Messük a sugársort egy, az α síkban fekvő a' egyenessel, mely nem megy át az O ponton; ezáltal a sugársor és az a'-n fekvő pontsor között létesítettünk perspektív vonatkozást. A két vonatkozás összetétele a fenti értelmezés szerint az a és a' pontsorok közti perspektív vonatkozás, melyet *az a egyenesnek az a' egyenesre az O pontból való vetítésé*nek nevezünk. Az O pontot, melyen az a és a' pontsor megfelelő pontjait összekötő egyenesek átmennek, a *perspektivitás középpontjá*nak nevezzük. Hasonlóan értelmezzük egy síknak egy másik síkra való vetítését egy rajtuk kívül fekvő pontból.

Másik példaként a fentinek duálisát említjük meg. Legyen a egy egyenes és σ egy a-t nem tartalmazó sík; jelöljük S-sel a és σ közös pontját. Az a-n áthaladó síksornak a σ síkkal való metszésénél a σ síkban fekvő, S középpontú sugársor felel meg. Legyen a' egy másik, az S ponton áthaladó, nem a σ síkban fekvő egyenes. Az a' egyenesről való vetítésnél a σ síkban fekvő, S középpontú sugársornak az a'-n áthaladó síksor felel meg. Az a és a' tengelyhez tartozó síksorok között ilyen módon egy perspektív vonatkozást létesítettünk; a σ síkot, melyhez a két síksor megfelelő síkjainak metszésvonalai tartoznak, a *perspektivitás síkjá*nak nevezzük.

Egy síkban fekvő két pontsor perspektív vonatkozásának a síkbeli dualitás elve szerint egy síkban fekvő két sugársor perspektív vonatkozása felel meg. Legyen az α síkban s egy egyenes, A és A' két különböző, az s egyeneshez nem tartozó pont. Az A középpontú sugársort messük s-sel, az s-en fekvő pontsort vetítsük A'-ből; ezáltal az A és az A' középpontú sugársor között egy perspektív vonatkozást létesítettünk. Az s egyenest, melyen a megfelelő egyenesek metszéspontjai feküsznek, a *perspektivitás tengelyé*nek nevezzük.

Értelmezés. Két elemi alakzat *projektív vonatkozásá*n a két alakzat elemeinek olyan kölcsönösen egyértelmű vonatkozását értjük, mely véges sok perspektív vonatkozás összetételéből származik. Legyen Π és Π' a két megadott alakzat, s legyenek $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_n$ ugyanolyan fajú elemi alakzatok, melyek közül Π_0 Π-vel és Π_n Π'-vel azonos. Legyen $\mathbf{T}_\nu$ $\Pi_{\nu-1}$-nek Π_ν-re való perspektív leképezése ($\nu=1, 2, \ldots, n$). A $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_n$ leképezések $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\ldots\mathbf{T}_n$ szorzata Π-nek Π'-re való *projektív leképezése.*

3.1. Tétel. *Két elsőfajú elemi alakzat között megadható olyan projektív vonatkozás, mely az egyik alakzat három tetszőleges elemének a másik alakzat három tetszőleges elemét felelteti meg.*

Bizonyítás. Ha a két megadott alakzat közül az egyik (vagy mindkettő) sugársor vagy síksor, ennek egy pontsort feleltetünk meg egy egyenessel való metszés által; a sugársor vagy síksor és a pontsor között ezáltal egy projektív (sőt perspektív) vonatkozást létesíetttünk. A tétel bebizonyítását e szerint elegendő két pontsor esetére korlátoznunk. Tegyük fel *először*, hogy a két pontsor két torz a és a' egyenesen fekszik. Legyen A, B, C az a-nak, A', B', C' az a'-nek három-három tetszőleges pontja. Felveszünk az AA' egyenesen egy tetszőleges, A-tól és A'-től különböző A'' pontot; a nem egy egyenesen fekvő A'', B, B' pontok meghatároznak egy síkot, ennek a CC' egyenessel való metszéspontja legyen C''. Az $A''C''$ és BB' egyenesek egy síkban feküsznek, ezeknek van tehát egy és csak egy B'' közös pontja. Az $a''=A''B''C''$ egyenes az AA', BB', CC' páronkint torz egyenesek *közös tranzverzálisa* (vagy metszője). Az a'' egyenesről vetítjük az a egyenest a'-re, azaz a minden P pontjának megfeleltetjük az a'' egyenes és a P pont által meghatározott síknak az a' egyenessel való P' metszéspontját. Az a egyenesnek a''-ről az a' egyenesre való vetítésénél, melyet az a'' tengelyű síksor közvetít, az A, B, C pontnak rendre A', B', C' felel meg. *Másodszor,* ha a két pontsort tartalmazó egyenesek egy síkban feküsznek, akkor az egyik pontsort egy hozzá torz egyenesről egy másik torz egyenesen fekvő pontsorra vetítjük; ezt az esetet ilyen módon az előbbire vezettük vissza.

A tétel bizonyításából nem derült ki (az A'' pont tetszőleges felvétele miatt), vajjon az A, B, C és A', B', C' egymásnak megfelelő pontok egyértelműen meghatározzák-e az a és a' egyenesek közti projektív vonatkozást; lásd erre vonatkozóan az **5**.5 és **5**.7 tételt, valamint a 12. §-t.

4. §. A projektív geometria rendezési axiómái. (I, II, IV).

Legyen α egy közönséges sík, és O ennek egy végesben fekvő pontja. Az (O, α) *sugársor,* vagyis az O ponton áthaladó és az α síkban fekvő egyenesek összessége a **II.1—4** axiómák alapján *ciklikusan rendezhető,* azaz négy tetszőleges, a sugársorhoz tartozó a, b, c, d egyenesre fennáll az $(abcd)$, $(acbd)$, $(abdc)$ ciklikus elrendezések közül az egyik és csak az egyik (l. első kötet, 43. o.). Az $(acbd)$ ciklikus elrendezés egyértelmű azzal, hogy az a, b és c, d egyenespárok a síkban elválasztják egymást, vagyis, hogy az a, b egyenesek által meghatározott egyik csúcsszögpárhoz tartozik a c, a másikhoz a d egyenes.

Ha e az α síkban fekvő, az O ponton át nem haladó közönséges egyenes, s A, B, C, D ennek négy, végesben fekvő pontja, melyeknek az egyenesen való lineáris elrendezése $ABCD$, akkor az $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, $OD=d$ egyenesek ciklikus elrendezése $(abcd)$ (l. első kötet 40. o., 36. és 37. tétel). E szerint az (O, α) sugársor ciklikus rendezése s az e egyenes pontjainak lineáris rendezése egymásnak felel meg az O pontból való vetítésnél; ennél a vetítésnél az e egyenes végtelen távoli pontjának az (O, α) sugársornak e-vel párhuzamos egyenese felel meg.

Ha e végtelen távoli egyenes és O végesben fekvő pont, akkor e négy tetszőleges A, B, C, D pontjának ciklikus elrendezését úgy értelmezhetjük, hogy az megegyezik az OA, OB, OC, OD egyenesek ciklikus elrendezésével. De igazolnunk kell, hogy ez az értelmezés független az O pont választásától. Legyen tehát O' egy másik, végesben fekvő pont; tegyük fel, hogy O és O' nem tartoznak ugyanahhoz az e egyenesen átfektetett síkhoz. Az OO' tengelyhez tartozó síksornak elemei az $OO'A, OO'B, OO'C, OO'D$ síkok, s ezeknek ciklikus elrendezése megegyezik az OA, OB, OC, OD egyenesek, s ugyancsak az $O'A$, $O'B$, $O'C, O'D$ egyenesek ciklikus elrendezésével (l. első kötet, 48. o.). Ha pedig az O és O' közönséges pontok ugyanahhoz az e egyenesen átfektetett síkhoz tartoznak, felveszünk egy, ehhez a síkhoz nem tartozó, végesben fekvő O'' pontot, s az iménti eredményt alkalmazva az O-t és O''-t, majd az O''-t és O'-t a négy adott ponttal összekötő egyenesekre, megállapítjuk, hogy az A, B, C, D végtelen távoli pontok ciklikus elrendezése az O, O'' és O' pontokra vonatkozóan ugyanaz. (Ha az O, O' pontok egy, az e egyenesen átmenő síkban feküsznek, akkor a fenti állítás levezethető a következő tételből, mely a síkra vonatkozó **I. 1—3, II, IV** axiómák következménye: Ha az $OPO'P'$ parallelogramma $O'P'$ oldalának valamely pontja Q, az O' ponton átmenő, s az OQ egyenessel párhuzamos egyenes metszi a parallelogramma OP oldalát.)

Ezeknek a megjegyzéseknek megfelelően a projektív egyenes pontjainak ciklikus rendezését az euklidesi geometria **I, II, IV** axiómái alapján a következő módon értelmezzük.

Értelmezés. Ha A, B, C, D az e egyenes közönséges pontjai, s ezeknek lineáris elrendezése $ABCD$, akkor a *négy pont ciklikus elrendezése* $(ABCD)$. Ha az e egyenes végesben fekvő A, B, C pontjainak lineáris elrendezése ABC, s ha D az e egyenes végtelen távoli pontja, akkor ciklikus elrendezésük $(ABCD)$. Ha az e végtelen távoli egyenes négy pontja A, B, C, D, s ha egy végesben fekvő O pontból való vetítésnél ezeknek megfelelő, egy sugársorhoz tartozó egyenesek ciklikus elrendezése (OA, OB, OC, OD), akkor a négy pont ciklikus elrendezése $(ABCD)$.

Értelmezés. Egy sugársorhoz tartozó *négy a, b, c, d egyenes ciklikus elrendezését* következőképpen értelmezzük. Ha a sugársor O középpontja végesben fekszik, akkor a négy egyenes ciklikus elrendezése megegyezik az euklidesi síkban meghatározott ciklikus elrendezésükkel. Ha a, b, c, d egy síkban fekvő négy párhuzamos egyenes, s az euklidesi síkra vonatkozó lineáris elrendezésük $abcd$ (azaz b elválasztja a síkban a-t és c-t, c pedig b-t és d-t), akkor ciklikus elrendezésük $(abcd)$. Ha az egy síkban fekvő a, b, c párhuzamos egyenesek lineáris elrendezése abc, s ha d ennek a síknak végtelen távoli egyenese, akkor ciklikus elrendezésük $(abcd)$. Végül, ha a, b, c, d végtelen távoli egyenesek, melyeknek közös pontja az O végtelen távoli pont, legyen e egy, az O ponton átmenő közönséges egyenes; az a, b, c, d egyenesek ciklikus elrendezése értelmezés szerint megegyezik annak a négy síknak az euklidesi térben meghatározott ciklikus elrendezésével, melyek az e egyenesről vetítik az a, b, c, d egyeneseket.

Az utóbbi értelmezés indokolására jegyezzük meg, hogy az a, b, c, d végtelen távoli egyenesek ciklikus elrendezése megegyezik annak a négy a', b', c', d' egyenesnek ciklikus elrendezésével, melyben az ae, be, ce, de síkokat egy, az e egyenesen át nem menő közönséges α sík metszi. Az α síknak az a, b, c, d egyenessel való metszéspontja legyen A, B, C, D; ezeknek ciklikus elrendezése megegyezik az a', b', c', d' egyenesekével. Ha e' az O ponton átmenő másik közönséges egyenes, az ae', be', ce', de' síkoknak α-val való a'', b'', c'', d'' metszésvonalaira ugyanaz a ciklikus elrendezés áll fenn, mint az A, B, C, D pontokra. Ebből következik, hogy az O közös ponttal bíró a, b, c, d végtelen távoli egyenesek ciklikus elrendezése független az értelmezésben felvett e egyenes választásától.

Értelmezés. Egy síksorhoz tartozó *négy $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sík ciklikus elrendezése,* ha a síksor tengelye egy közönséges egyenes, értelmezés szerint ugyanaz, mint ezeknek a síkoknak az euklidesi térben való ciklikus elrendezése. Ha a négy sík párhuzamos egymással, s az euklidesi térben való lineáris elrendezésük $\alpha\beta\gamma\delta$, akkor ciklikus elrendezésük $(\alpha\beta\gamma\delta)$. Végül, ha az α, β, γ párhuzamos síkok lineáris elrendezése az euklidesi térben $\alpha\beta\gamma$, s ha δ a végtelen távoli sík, akkor ciklikus elrendezésük értelmezés szerint $(\alpha\beta\gamma\delta)$.

A fenti értelmezésekből s a hozzájuk fűzött indokolásokból közvetlenül következik, hogy ha két elsőfajú elemi alakzat között vetítéssel, illetve metszéssel perspektív vonatkozást létesítünk, akkor az egyik alakzat négy tetszőleges elemének ciklikus elrendezése megegyezik a másik alakzat megfelelő négy elemének ciklikus elrendezésével.

A projektív geometria rendezési axiómáit a fentiek értelmében következőképpen foglalhatjuk össze a **P II** axiómacsoportba.

A 1. *Minden elsőfajú elemi alakzatban (pontsor-, sugársor-, síksorban) megadható az elemeknek egy ciklikus rendezése, mely szerint bármely négy különböző A, B, C, D elem elrendezése vagy $(ABCD)$, vagy $(ACBD)$, vagy $(ABDC)$.*

A 2. *Ha $(ABCD)$, akkor $(BCDA)$ és $(DCBA)$.*

A 3. *Ha $(ABCD)$ és $(ABDE)$, akkor $(BCDE)$.*

Ezekből levezethetők a következő tételek (l. első kötet 44. o.):

A 4. *Ha* $(ABCD)$ *és* $(ABDE)$, *akkor* $(BCDE)$, $(ABCE)$, $(ACDE)$; *ebben az esetben azt mondjuk, hogy az öt elemre fennáll az* $(ABCDE)$ *ciklikus elrendezés.*

A 5. *Egy elsőfajú elemi alakzat öt tetszőleges, egymástól különböző eleme jelölhető* A, B, C, D, E*-vel oly módon, hogy ciklikus elrendezésük* $(ABCDE)$ *legyen.*

A 6. *Egy elsőfajú elemi alakzat* n *tetszőleges, egymástól különböző eleme jelölhető* $A_1, A_2, \ldots, A_n$*-nel olyan módon, hogy ha* k_1, k_2, k_3, k_4 *tetszőleges pozitív egész számok, melyekre* $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 \leqq n$, *akkor fennáll az* $(A_{k_1}A_{k_2}A_{k_3}A_{k_4})$ *ciklikus elrendezés. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az* n *elem ciklikus elrendezése* $(A_1A_2 \ldots A_n)$.

Az **A 6** tétel bizonyítása ugyanazzal a meggondolással adódik az **A 5** tételből, mint a lineáris rendezésre vonatkozó megfelelő tétel (l. első kötet, 7. o., 4. tétel).

B. *Ha* A, B, C *egy elsőfajú elemi alakzatnak három tetszőleges, egymástól különböző eleme, akkor van legalább egy olyan* D *eleme, melyre az* $(ABCD)$ *ciklikus elrendezés érvényes.*

Ebből az **A 6** tétel alapján következik, hogy *minden elsőfajú elemi alakzatnak végtelen sok eleme van* (l. első kötet, 8. o., 6. tétel).

C. *Ha két elsőfajú elemi alakzat között vetítéssel, illetve metszéssel perspektív vonatkozást létesítünk, ennél a ciklikus rendezés megmarad, vagyis az egyik alakzat négy tetszőleges* A, B, C, D *elemének, melyeknek ciklikus elrendezése* $(ABCD)$, *a másik alakzat négy olyan* A', B', C', D' *eleme felel meg, amelyekre fennáll az* $(A'B'C'D')$ *ciklikus elrendezés.*

4.1. Ebből közvetlenül következik, hogy *két elsőfajú elemi alakzat bármely projektív vonatkozásánál megmarad a ciklikus rendezés,* mivel a projektív vonatkozás az értelmezés szerint perspektív vonatkozások összetételéből származik, s ezek a **C** axióma szerint megtartják a ciklikus rendezést.

4.2. Értelmezés. Legyen A, B, C egy projektív egyenes három tetszőleges pontja és D az egyenesnek olyan pontja, melyre fennáll az $(ACBD)$ ciklikus elrendezés. *Az egyenesnek az* A, B *pontok által meghatározott, s a* C *pontot tartalmazó szakaszán* értjük, s ACB-vel jelöljük az egyenes ama P pontjainak összességét, melyekre fennáll az $(APBD)$ ciklikus elrendezés. Az ADB szakasz azoknak a P pontoknak az összessége, melyekre az $(ACBP)$ elrendezés érvényes.

4.3. A fenti értelmezés szerint *a projektív egyenest bármely két A, B pontja két szakaszra osztja fel.* Két, az A-tól és B-től különböző P és Q pont ugyanahhoz a szakaszhoz tartozik, ha az $(APQB)$ vagy az $(AQPB)$ elrendezés áll fenn; különböző szakaszokhoz tartozik P és Q, ha az $(APBQ)$ elrendezés érvényes. Például, ha A, B végesben fekvő pontok, akkor a projektív egyenesen az A, B pontok által meghatározott két szakasz közül az egyik azokból a pontokból áll, melyek a lineáris rendezés értelmében az AB szakaszhoz tartoznak; a másik pedig az AB szakasz külsejében fekvő pontokból és a végtelen távoli pontból áll. Ha A végesben fekvő, B pedig végtelen távoli pont, akkor az A pont által meghatározott két félsugár a projektív egyenesnek az A, B pontok által meghatározott két szakasza.

4.4. A projektív egyenes pontjainak ciklikus rendezése alapján *a projektív egyenes bármely AB szakaszának pontjaira fennáll egy lineáris rendezés.* Ha P, Q, R az AB szakasz három pontja, melyeknek az A, B pontokkal való ciklikus elrendezése $(APQRB)$, akkor az AB szakaszon való lineáris elrendezésük PQR.

4.5. A projektív egyenes pontjainak ciklikus elrendezése alapján értelmezzük *a projektív egyenes (ciklikus) irányítását* az első kötet 116. oldalán adott értelmezés mintájára, a következő módon.

Értelmezés. A projektív egyenes három különböző A, B, C pontjának valamely sorrendje (vagy permutációja) meghatározza *a projektív egyenesnek egyik irányítását.* Az (ABC), (BCA), (CAB) permutáció ugyanazt az irányítást, a (BAC) permutáció az ezzel ellenkező irányítást határozza meg. Ha A, B, C, D az egyenes négy különböző pontja, s ezeknek ciklikus elrendezése $(ABCD)$, akkor az (ABC) és a (BCD) permutáció az egyenesnek ugyanazt az irányítását határozza meg.

4.6. Értelmezés. Az egyenesnek önmagára való, kölcsönösen egyértelmű s a ciklikus rendezést megtartó leképezéséről[1] azt mondjuk, hogy *megtartja, illetve megfordítja az irányítást,* a szerint, hogy az egyenes A, B, C pontjai, s ezek A', B', C' képe által meghatározott (ABC) és $(A'B'C')$ ciklikus irányítások megegyezők vagy ellenkezők. A leképezésnek ez a tulajdonsága, mint könnyen belátható, független az A, B, C pontok választásától.

Hasonlóan értelmezzük a szakasz és az irányítás fogalmát, vala-

[1] Lásd: első kötet, 77. és 94. o.

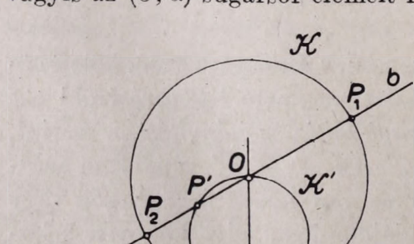
mint az irányítást megtartó és megfordító leképezéseket a többi elsőfajú elemi alakzatra vonatkozóan.

M e g j e g y z é s. A projektív geometria fent felsorolt rendezési axiómáiban külön értelmeztük a pontsor, a sugársor és a síksor ciklikus rendezését, s a **C** axiómában előírtuk, hogy a vetítésnél és a metszésnél megmaradjon a ciklikus rendezés. Ez az eljárás, mely lényegében ENRIQUEstől származik, megfelel a dualitás elvének. Ha figyelmen kívül hagyjuk a dualitás elvének megfelelő szimmetria követelményeit, s például *a ciklikus rendezést csak a pontsorra vonatkozóan* akarjuk axiomatikusan előírni, a többi elsőfajú elemi alakzatra pedig ebből levezetni, akkor fel kell vennünk a PASCH-*féle axiómát* a projektív geometriának megfelelő, következő alakban:

4.7. *Ha A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok, s AB az AB egyenesnek, BC a BC egyenesnek egy-egy szakasza, akkor van az AC egyenesnek olyan AC szakasza, hogy bármely az ABC síkban fekvő, s az A, B, C pontokon át nem menő a egyenesnek, melynek a nevezett AB, BC, AC szakaszok közül valamelyikkel van közös pontja, van ezek közül a szakaszok közül még egy másikkal is közös pontja.*

Ennek az axiómának a felhasználásával értelmezhetjük a sugársor és a síksor ciklikus rendezését, s igazolhatjuk a **C** axiómát, vagyis a ciklikus rendezésnek a projektív alapműveleteknél való megmaradását.

A projektív egyenes alkatát az euklidesi geometria **I, II, III, IV** axiómái alapján egy körre való leképezéssel a következő módon szemléltethetjük. Legyen O az α síknak egy közönséges pontja és a az O ponton át nem haladó egyenes az α síkban. Az O pontból való vetítéssel az a egyenes pontjainak az O ponton áthaladó egyeneseket, vagyis az (O, a) sugársor elemeit feleltetjük meg. Egy O középpontú $\mathcal{K}$ körnek az α síkban minden, az O-n áthaladó b egyenessel két átellenes P_1, P_2 pontja közös; ezeket feleltetjük meg az a és b egyenes P metszéspontjának (1. ábra). Az a projektív egyenes minden P pontjának ilyen módon a $\mathcal{K}$ körnek egy átellenes (P_1, P_2) pontpárja felel meg, és megfordítva. E szerint a projektív egye-



1. ábra.

nest, alkatát illetően, olyannak tekinthetjük, mintha egy körből az átellenes pontok azonosításával állott volna elő.

Megfeleltethetjük azonban a projektív egyenes és a körvonal pontjait kölcsönösen egyértelmű módon is, a ciklikus rendezés megtartásával. Feltesszük, hogy O végesben fekvő pont, és a az O ponton át nem menő közönséges egyenes az α síkban. O-ból merőlegest bocsátunk a-ra, ennek talppontja legyen N; legyen $\mathcal{K}'$ az a kör, melynek átmérője ON (1. ábra). Az a egyenes minden közönséges P pontjának az OP egyenes és a $\mathcal{K}'$ kör közös P' pontját feleltetjük meg (l. első kötet 143. o.); a végtelen távoli pontjának pedig az O pontot. Ezáltal *az a egyenes és a $\mathcal{K}'$ kör pontjai között kölcsönösen egyértelmű, s a ciklikus rendezést megtartó vonatkozást létesítettünk.*

5. §. Osztásviszony és kettősviszony. (I, II, III, IV).

Az euklidesi geometria egybevágósági axiómáinak felhasználásával értelmezzük a projektív egyenesen az osztásviszonyt és kettősviszonyt.

Értelmezés. Egy egyenes három közönséges A, B, C pontjának (ABC) *osztásviszonyán* az AC és BC irányított szakaszok hányadosát értjük (l. első kötet 241. és 246. o.), azaz:

$$(ABC)=\frac{AC}{BC}\cdot$$

Az értelmezés szerint az (ABC) osztásviszony előjellel ellátott szakasznagyság, melyet az A, B, C pontok egyértelműen meghatároznak. Az A, B pont és az (ABC) osztásviszony egyértelműen meghatározza az AB egyenes C pontját, a következő szerkesztés szerint. Jelöljük e-vel vagy 1-gyel az egységszakaszt, és legyen a egy tetszőleges szakasznagyság. Két különböző, egymással párhuzamos egyenest fektetünk az A, illetve a B ponton át, s ezekre rámérjük rendre az A ponttól az $a=AA'$, és a B ponttól az $e=BB'$ szakaszt, az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán vagy ellenkező oldalán, a szerint, hogy a pozitív vagy negatív. A két szakasz A', B' végpontját összekötő egyenes olyan C pontban metszi az AB egyenest, melyre $(ABC)=a$. Ugyanis $AA'C$ és $BB'C$ hasonló s az euklidesi síkra vonatkozóan megegyező irányítású háromszögek.

A fenti szerkesztésből kiderül, hogy ha $a=1$, akkor C az AB egyenes végtelen távoli pontja; ha $a=-1$, akkor C az AB szakasz középpontja, s ha $a=0$, akkor $C=A$. Egyik a szakasznagyságnak sem felel meg a $C=B$ pont; ezért bevezetünk egy új, ***végtelen szakasznagyság***ot s ezt feleltetjük meg a $C=B$ pontnak. Ilyen módon a két megadott A, B pontra vonatkozó (ABC) *osztásviszonyt mint koordinátát* vezettük be az AB egyenesen: minden C pontnak megfelel egy meghatározott szakasznagyság és viszont.

Ha az egyenes A, B, C közönséges pontjai közül C az AB szakasz belsejében fekszik, akkor AC és BC ellenkező irányítású szakaszok, s ezért az (ABC) osztásviszony negatív; ha pedig C az AB szakasz külsejéhez tartozik, akkor AC és BC előjele megegyező, tehát (ABC) pozitív. A szerint, hogy C az AB szakasznak A vagy B felől való meghosszabbításán fekszik, az (ABC) osztásviszony kisebb vagy nagyobb mint 1.

Értelmezés. Egy egyenes négy közönséges A, B, C, D pontjának ($ABCD$) *kettősviszonyán* értjük az (ABC) és (ABD) osztásviszonyok hányadosát:

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD}.$$

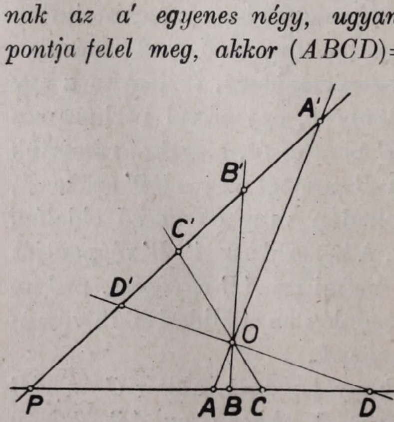
Ebből az értelmezésből közvetlenül következik, hogy

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA),$$

és

$$(ABDC) = (BACD) = \frac{1}{(ABCD)}.$$

*5.1. *Ha az a egyenesnek az a′ egyenesre egy rajtuk kívül fekvő O pontból való vetítésénél az a egyenes négy közönséges A, B, C, D pontjának az a′ egyenes négy, ugyancsak végesben fekvő A', B', C', D' pontja felel meg, akkor $(ABCD)=(A'B'C'D')$.*



2. ábra.

Ha a és a' párhuzamos egymással, vagy ha O egy végtelen távoli pont, akkor a fenti állítás háromszögek hasonlósága alapján könnyen adódik. Ha a és a' egy végesben fekvő P pontban metszi egymást, s O ugyancsak végesben fekszik, akkor alkalmazzuk a Menelaus-féle tételt (l. első kötet, 242. o., 209. tétel) a PAA' háromszögre s a CC', majd a DD' egyenesre; ugyanúgy a PBB' háromszögre s a DD' és CC' egyenesre (2. ábra); a következő egyenlőségeket kapjuk:

$$AC.A'O.PC' = A'C'.AO.PC, \quad AD.A'O.PD' = A'D'.AO.PD$$
$$BD.B'O.PD' = B'D'.BO.PD, \quad BC.B'O.PC' = B'C'.BO.PC.$$

Az egymás alatt álló egyenlőségek megfelelő oldalát szorozzuk meg egymással, így a következőt kapjuk:

$$AC.BD.(A'O.B'O.PC'.PD') = A'C'.B'D'.(AO.BO.PC.PD),$$
$$BC.AD.(A'O.B'O.PC'.PD') = B'C'.A'D'.(AO.BO.PC.PD).$$

Ennek a két egyenletnek megfelelő oldalát osszuk el egymással s egyszerűsítsünk a zárójelbe írt tényezőkkel; így kapjuk az

$$(ABCD) = (A'B'C'D')$$

egyenlőséget.

Ha D' az a' egyenes végtelen távoli pontja, akkor a fenti eljárással arra az eredményre jutunk, hogy az $(ABCD)$ kettősviszony egyenlő az $(A'B'C')$ osztásviszonnyal. Ennek megfelelően kiterjesztjük a kettősviszony értelmezését.

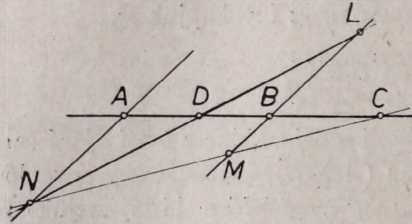
Értelmezés. Ha az A, B, C, D pontok egy közönséges a egyenesen feküsznek, s ha a végtelen távoli pontja D, akkor $(ABCD)$ kettősviszonyon az (ABC) osztásviszonyt értjük. Ha A, B, C, D egy végtelen távoli egyenes négy pontja, akkor egy végesben fekvő O pontból vetítsük a négy pontot egy közönséges a' egyenes A', B', C', D' pontjaiba; a megadott négy pont kettősviszonyán értjük az $(A'B'C'D')$ kettősviszonyt.

Az utóbbi értelmezés igazolására jegyezzük meg, hogy a fenti bizonyítás szerint az $(A'B'C'D')$ kettősviszony független az a' egyenes választásától. Következőképpen látjuk be, hogy az O pont választásától is független az ilyen módon értelmezett $(ABCD)$ kettősviszony. Legyen O'' egy másik közönséges pont; messük az $O''A, O''B, O''C, O''D$ egyeneseket egy a'-vel párhuzamos a'' egyenessel az A'', B'', C'', D'' pontokban. Ha az a'' egyenest úgy vesszük fel, hogy $OA' = O''A''$, akkor az $OA'B'C'D'$ és az $O''A''B''C''D''$ idomok egybevágók és $(A'B'C'D') = (A''B''C''D'')$.

Fenti eredményünk s az értelmezések alapján adódik a következő:

***5.2. Tétel.** *Ha két egyenesnek egy hozzájuk nem tartozó pontból egymásra való vetítésénél az egyik egyenes A, B, C, D pontjának a másik* *egyenes A', B', C', D' pontja felel meg, akkor ezeknek megfelelő sorrendben vett kettősviszonya egyenlő: $(ABCD)=(A'B'C'D')$.*

Ha A, B, C egy egyenes három pontja, akkor az egyenes tetszőleges negyedik D pontjának ezekre vonatkozó $(ABCD)$ *kettősviszonya koordináta jellegű.* Ugyanis minden D pontnak egyértelműen megfelel egy $(ABCD)$ kettősviszony; az osztásviszonyra vonatkozó hasonló tulajdonságból következik, hogy két különböző D és D' pontnak megfelelő kettősviszonyok különbözők. Minden a szakasznagyságnak megfelel egy D pont, melyre $(ABCD)=a$, a következő szerkesztés szerint, melyben feltesszük, hogy A, B, C végesben fekvő pontok. Egy, a B ponton áthaladó, AB-től különböző egyenesre a B ponttól rámérjük az a és az $e=1$ szakaszt, a B pontnak ugyanazon az oldalán vagy különböző oldalán, a szerint, hogy a pozitív vagy negatív; legyen $BL=a$, $BM=e$ (3. ábra). Az A ponton át az LM egyenessel párhuzamosat fektetünk; ennek a CM egyenessel való metszéspontja legyen N, az LN egyenesnek az AB egyenessel közös pontja pedig D. A szerkesztett hasonló háromszögek megfelelő oldalának arányosságából adódik:



3. ábra.

$$AN : BM = AC : BC, \text{ s mert } BM = e, \text{ tehát } AN = (ABC);$$

$$BL : AN = BD : AD, \text{ tehát } a = BL = (ABC)\cdot\frac{BD}{AD} = (ABCD).$$

E szerint az a szakasznagyságnak az A, B, C pontokra vonatkozóan egy és csak egy olyan D pont felel meg, amelyre $(ABCD)=a$.

Ha egy közönséges egyenes négy végesben fekvő pontja A, B, C, D, az (ABC) és (ABD) osztásviszonyok megegyező vagy ellenkező előjelűek, a szerint, hogy a C és a D pont a projektív egyenesnek az A, B pontok által meghatározott két szakasza közül ugyanahhoz, vagy két különböző szakaszhoz tartozik. Másszóval az $(ABCD)$ kettősviszony akkor és csak akkor negatív, ha az A, B és C, D pontpárok elválasztják egymást a projektív egyenesen. Mivel a perspektív leképezés az egyenes pontjainak ciklikus rendezését is, a kettősviszonyt is változatlanul hagyja, bármely egyenes négy tetszőleges pontjára is érvényes ez a megállapításunk, vagyis:

***5**.3. *Egy egyenes négy A, B, C, D pontjának $(ABCD)$ kettős viszonya akkor és csak akkor negatív, ha az A, B és C, D pontpárok elválasztják egymást az egyenesen.*

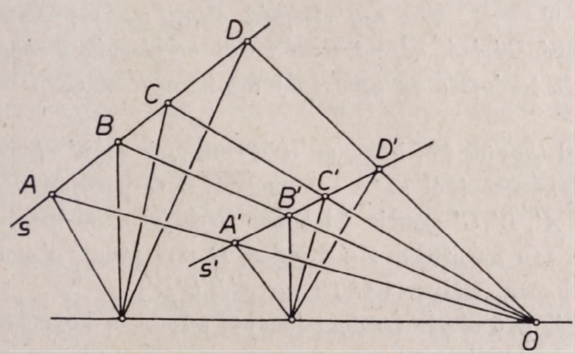
A kettősviszony értelmezését sugársorra és síksorra következőképpen terjesztjük ki.

Értelmezés. Egy sugársorhoz tartozó *négy a, b, c, d egyenes kettősviszonyán* négy olyan A, B, C, D pontnak a kettősviszonyát értjük, melyben egy, a sugársor középpontján át nem haladó s egyenes metszi az a, b, c, d egyeneseket.

Az **5**.2 tétel folytán az $(abcd)$ kettősviszony független az s egyenes választásától.

Értelmezés. Egy síksorhoz tartozó *négy $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sík kettősviszonyán* egy, a síksor tengelyén át nem menő σ síkkal való (egy sugársorhoz tartozó) a, b, c, d metszésvonaluknak a kettősviszonyát értjük.

Igazolnunk kell, hogy ez a kettősviszony független a σ sík választásától. Legyen σ' egy másik sík, mely nem megy át a síksor tengelyén,



4. ábra.

s legyen a', b', c', d' ennek a síknak az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ síkkal való metszés vonala. Legyen továbbá s egy, a σ síkban fekvő egyenes, mely nem megy át az a, b, c, d egyenesek közös pontján, és O a síksor tengelyének olyan pontja, mely sem σ-hoz, sem σ'-höz nem tartozik (4. ábra). Az a, b, c, d egyeneseknek s-sel való metszéspontja legyen A, B, C, D; az értelmezés szerint $(abcd)=(ABCD)$. Az O ponton és az s egyenesen átfektetett síknak a σ' síkkal való metszésvonala legyen s'; az A, B, C, D pontoknak az O pontból való vetítésnél az s' egyenes olyan A', B', C', D' pontjai felelnek meg, melyekre az **5**.2 tétel szerint $(ABCD)=(A'B'C'D')$. Mivel az A', B', C', D' pontok az a', b', c', d' egyeneseknek az s' egyenessel való metszéspontjai, az értelmezés szerint $(a'b'c'd')=(A'B'C'D')$. A fentiekből következik, hogy

$$(abcd) = (a'b'c'd').$$

A megadott értelmezésekből s az **5**.2 tételből következik az

***5**.4. Tétel. *Bármely két elsőfajú elemi alakzat projektív vonatkozásánál a kettősviszony változatlan marad; azaz bármely négy elem kettősviszonya egyenlő a megfelelő négy elem megfelelő sorrendben vett kettősviszonyával.*

Ebből a tetelből a kettősviszony koordináta jellegét tekintve, előbb a pontsorokra s ennek alapján a többi elsőfajú elemi alakzatokra is adódik a következő

***5**.5. Tétel. *Ha két elsőfajú elemi alakzat két projektív vonatkozása három-három elemre nézve megegyező, akkor a két vonatkozás azonos egymással.*

Ennek korolláriuma a következő

***5**.6. Tétel. *Ha egy elsőfajú elemi alakzat önmagára való projektív leképezésénél három elem közül mindegyik önmagának felel meg, akkor a leképezés az azonosság* (azaz minden elem önmagának felel meg).

Például tegyük fel, hogy az a egyenesnek az a' egyenesre való projektív leképezésénél az a egyenes A, B, C pontjának rendre az a' egyenes A', B', C' pontja felel meg; ezáltal a leképezés egyértelműen meg van határozva: a minden D pontjának a'-nek az a D' pontja felel meg, melyre $(ABCD)=(A'B'C'D')$.

A **3**.1 és **5**.5 tétel összefoglalásából adódik a következő

***5**.7. Tétel. *Két elsőfajú elemi alakzat között van egy és csak egy olyan projektív vonatkozás, mely az egyik alakzat három tetszőleges elemének rendre a másik alakzat három tetszőleges elemét felelteti meg.*

6. §. Egyenesek projektív leképezései. (I, II, III, IV).

Az egyenes önmagára, vagy egy másik egyenesre való projektív leképezése az értelmezés szerint véges sok perspektív leképezés, vagyis vetítés és metszés összetételéből származik. Következő tételeink két egyenes projektív vonatkozásainak egyenesek közti perspektív vonatkozásokból való összetételével foglalkoznak.

Az ebben a szakaszban adott tételeknek és bizonyításoknak az alapja a projektív geometria összetartozási és rendezési axiómáin kívül az **5**.5. tétel. Az utóbbit a kettősviszony alkalmazásával, vagyis az euklidesi geometria egybevágósági axiómái alapján bizonyítottuk be. Mihelyt sikerül ezt a tételt a kettősviszony fogalmának felhasználása nélkül, azaz projektív alapon bebizonyítani, a jelen szakasz tárgyalása is függetlenné válik az átmenetileg felhasznált metrikus fogalmaktól (lásd 12. §).

***6**.1. Tétel. *Két torz egyenes projektív vonatkozása perspektív egy tengelyre vonatkozóan.*

Bizonyítás. Legyen A, B, C az a egyenes három tetszőleges pontja, s A', B', C' a megadott projektív vonatkozásnál az a' egyenesen megfelelő három pont. A **3**.1. tétel bizonyítása szerint van az AA', BB', CC' páronkint torz egyeneseknek egy közös a'' tranzverzálisa, s az a''-ről való vetítésnél az A, B, C pontoknak rendre az A', B', C' pontok felelnek meg. Az **5**.5 tétel szerint tehát a megadott projektív vonatkozás megegyezik az a egyenesnek a''-ről az a' egyenesre való vetítésével. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Ha az AA', BB', CC' páronkint torz egyeneseknek a-tól, a'-től s egymástól különböző két közös tranzverzálisa a'' és a''', akkor a **6**.1 tétel szerint a-nak a'-re ugyanazt a leképezését származtatja az a''-ről és az a'''-ről való vetítés. Ez másszóval azt jelenti, hogy a és a' egy-egy megfelelő D és D' pontját összekötő egyenes metszi a''-t és a'''-t. Az **5**.5 tétel alapján levezettük tehát a következő tételt:

***6**.2. Tétel. *Ha b, c, d három, páronkint torz egyenes, és a, a', a'' ezeknek három közös tranzverzálisa, ha továbbá e az a, a', a'' egyeneseknek és a''' a b, c, d egyeneseknek bármely közös tranzverzálisa, akkor e-nek és a'''-nek van közös pontja.*

Megfordítva, a **6**.2 tételből levezethető az **5**.5 tétel a fentihez hasonló meggondolással. Ezzel a tétellel a PAPPUS-féle tétel tárgyalása során fogunk ismét foglalkozni (l. **6**.10 és 107. §).

A **6**.1 tétel duálisa a következő

***6**.3. Tétel. *Két torz egyeneshez tartozó síksorok projektív vonatkozása perspektív, azaz létezik olyan pontsor, melynek a két síksorral való metszése származtatja a megadott projektív leképezést.*

Egy síkban fekvő két egyenes projektív leképezésére vonatkoznak a következő tételek:

*6.4. Tétel. *Két, egymást metsző egyenes projektív vonatkozása akkor és csak akkor perspektív, ha a két egyenes metszéspontja önmagának felel meg.*

Bizonyítás. A perspektív vonatkozás értelmezéséből nyilvánvaló, hogy az a egyenesnek az a' egyenesre való perspektív leképezésénél a két egyenes metszéspontja önmagának felel meg. Megfordítva, legyen adva a-nak a'-re olyan projektív leképezése, melynél a két egyenes közös A pontja önmagába megy át. Ha B és C az a egyenes két, A-tól különböző pontja, s B', C' az ezeknek megfelelő képpontok, akkor az egy síkban fekvő BB' és CC' egyeneseknek van egy és csak egy közös O pontja. Az O pontból való vetítésnél az a egyenes A, B, C pontjának rendre az a' egyenes A, B', C' pontja felel meg, ugyanúgy, mint a megadott projektív leképezésnél. Az 5.5 tétel szerint tehát a megadott leképezés az a egyenesnek az O pontból az a' egyenesre való vetítésével azonos.

A 6.4 tételnek a térbeli, illetve a síkbeli dualitás elve szerint a következő tételek felelnek meg:

*6.5. Tétel. *Két síksornak, melynek tengelyei metszik egymást, projektív vonatkozása akkor és csak akkor perspektív, ha a két tengelyen átfektetett sík önmagának felel meg* (ez a sík ugyanis mindkét síksornak eleme). Ebben az esetben van egy és csak egy olyan, a tengelyek metszéspontján átmenő sík, mely az egymásnak megfelelő síkok metszésvonalait tartalmazza *(perspektivitás síkja).*

*6.6. Tétel. *Egy síkban fekvő két sugársornak projektív vonatkozása akkor és csak akkor perspektív, ha a középpontokat összekötő egyenes, mely mindkét sugársornak eleme, önmagának felel meg.* A megfelelő sugarak metszéspontjai egy egyenesen (a *perpektivitás tengelyén*) feküsznek.

*6.7. Tétel. *Egy síkban fekvő két különböző egyenes projektív, de nem perspektív vonatkozása előállítható egy ugyanabban a síkban fekvő harmadik egyenessel való két perspektív vonatkozás összetételéből.*

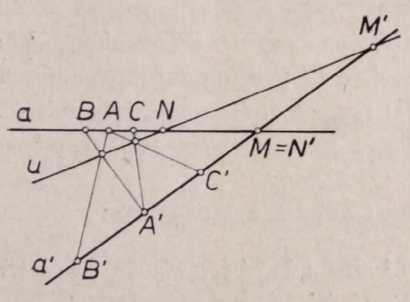
Bizonyítás. Legyen a és a' a két egyenes, A és A' ezeknek egy-egy pontja, mely a megadott leképezésnél egymásnak felel meg. Az AA' egyenesen felveszünk két tetszőleges O és O' pontot, melyek közül O az A'-től és O' az A-tól különbözik. Az O és O' középpontú sugársorok között egy projektív vonatkozást értelmezünk az a és a' között megadott projektív vonatkozás alapján, a következő módon:

ha P az a egyenes valamely pontja s P' az a' egyenes megfelelő pontja, akkor az OP' és az $O'P$ egyenest egymásnak feleltetjük meg. Mivel a két sugársor középpontját összekötő OO' egyenes önmagának felel meg (hiszen OO' azonos az egyik sugársor OA', s a másik sugársor megfelelő $O'A$ sugarával), tehát a **6**.6 tétel szerint a két sugársor vonatkozása perspektív; a megfelelő sugarak metszéspontjai egy a'' egyenesen feküsznek. Az a és a' között megadott projektív vonatkozás az **5**.5 tétel folytán megegyezik azzal a leképezéssel, mely az a-nak O'-ből a''-re, s a''-nek O-ból a'-re való vetítésének összetételéből származik.

***6**.8. Tétel. *Egy síkban fekvő két különböző sugársor projektív, de nem perspektív vonatkozása előállítható egy ugyanabban a síkban fekvő harmadik sugársorral való két perspektív vonatkozás összetételéből.*

Ez a tétel a **6**.7 tételből a síkbeli dualitás alkalmazásával adódik.

A **6**.7 tétel bizonyításában az AA' egyenesen tetszőlegesen vettük fel az A-tól, illetve A'-től különböző O' és O pontot, s ezek alapján határoztuk meg az a'' egyenest. Tegyük fel, hogy O' az A', és O az A ponttal azonos; legyen B és C az a egyenesnek két, A-tól különböző pontja, B' és C' az ezeknek a'-n megfelelő pontok. Az AB' és $A'B$ egyenesek metszéspontját az AC' és $A'C$ egyenesek metszéspontjával összekötő egyenest jelöljük u-val (5. ábra). Az u egyenes független az A pont megválasztásától, vagyis az u egyenest az a és a' közti projektív vonatkozás egyértelműen meghatározza. Ugyanis az a és a' között megadott projektív vonatkozást előállíthatjuk az a és u között az A' középpontra, s az u és a' között az A középpontra vonatkozó perspektív vonatkozások összetételéből; az első perspektív vonatkozásnál a és u metszéspontja : N, a másodiknál a' és u metszéspontja : M' önmagának felel meg. A két perspektív vonatkozásnak ebben a sorrendben való szorzatánál az N pontnak az a és a' egyenesek N' metszéspontja, s az $N'=M$ pontnak, mint az a pontsor elemének, az M' pont felel meg. E szerint u az az egyenes, mely az a pontsor a'-vel közös M pontjának M' képét, s az a' pontsor a-val közös N' pontjának N képét összeköti. Az u egyenest a megadott *projektív vonatkozás kollineációs tengelyének* nevezzük.



5. ábra.

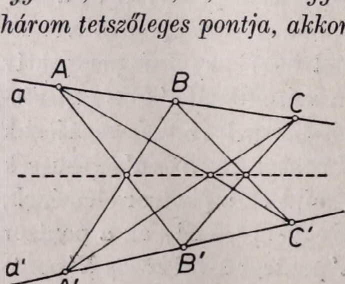
Ha az egy síkban fekvő a és a' egyenesek *perspektív vonatkozásban* vannak az O középpontra vonatkozóan, jelöljük N-nel a és a' metszéspontját. Az a egyenesnek egy N-től különböző A pontjából vetítsük az a' pontsort, s a'-nek megfelelő A' pontjából az a pontsort. Az A és az A' középpontú sugársorok között a és a' megadott perspektív vonatkozása alapján értelmezünk egy projektív vonatkozást azáltal, hogy az a bármely P pontját A'-vel összekötő egyenest, s a P képpontját, P'-t A-val összekötő egyenest egymásnak feleltetjük meg. Mivel az $AA'=A'A$ egyenes önmagának felel meg, a két sugársor vonatkozása perspektív. A perspektivitás tengelye, u átmegy az N ponton, mivel $AN=a$ és $A'N=a'$ a két sugársor egymásnak megfelelő egyenesei. Az u egyenes független az A pont megválasztásától; ugyanis u mint az N pontot az AP' és $A'P$ egyenesek metszéspontjával összekötő egyenes egyértelműen meg van határozva; ebben a meghatározásban A és P szerepe szimmetrikus, vagyis A helyettesíthető a tetszőleges, N-től különböző P pontjával. Az u egyenest az a és a' között megadott *perspektív vonatkozás kollineációs tengelyének* nevezzük.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

***6.9.** Tétel. *Ha az egy síkban fekvő a és a' egyenesek között adva van egy projektív vonatkozás, akkor az a egyenes két tetszőleges A és B pontja, s az a' egyenes megfelelő A' és B' pontja által meghatározott AB' és $A'B$ egyenesek metszéspontja egy, az A, B pontok választásától független u egyenesen: a két projektív pontsor kollineációs tengelyén fekszik.*

Ebből a tételből korolláriumként adódik a következő:

***6.10.** Pappus-féle tétel.[1] *Ha a és a' egy síkban fekvő két egyenes, s ha A, B, C az a egyenesnek, A', B', C' az a' egyenesnek háromhárom tetszőleges pontja, akkor az AB' és $A'B$, az AC' és $A'C$, s a BC' és $B'C$ egyenespárok metszéspontjai egy egyenesen feküsznek* (6. ábra).



6. ábra.

Van ugyanis a-nak a'-re olyan projektív leképezése, mely az A, B, C

[1] Lásd: első kötet 229. o., 200. tétel; Pascal-*féle tétel*nek is szokták nevezni, mivel a kúpszeletekre vonatkozó Pascal-féle tételnek speciális esete (l. **61**.1).

pontnak rendre az A', B', C' pontot felelteti meg. Az ennek a projektív vonatkozásnak megfelelő u kollineációs tengely tartalmazza az AB' és $A'B$ stb. egyenespárok metszéspontját.

7. §. A teljes négyszög. (P I, II).

Értelmezés. Ha A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok, akkor ezek a pontok s a BC, CA, AB egyenesek egy *háromszöget* alkotnak. Az A, B, C pontok a *háromszög csúcsai*, a BC, CA, AB egyenesek a *háromszög oldalai*.

Értelmezés. Ha P, Q, R, S egy síkban fekvő négy olyan pont, melyek közül bármely három nem tartozik egy egyeneshez, akkor ezek a pontok s az őket páronkint összekötő hat egyenes: PQ, RS; PR, QS; PS, QR *teljes négyszöget* alkot. A négy pontot a *négyszög csúcsai*nak, a hat egyenest a *négyszög oldalai*nak nevezzük. Két olyan oldalt, melynek közös pontja különbözik a négyszög csúcsaitól, *átellenes oldal*nak nevezünk. (Fent a négyszög hat oldalát átellenes páronkint csoportosítva soroltuk fel.) Két átellenes oldal metszéspontját a teljes négyszög *átlóspontjá*nak, két átlóspontot összekötő egyenest a négyszög *átlójá*nak nevezünk.

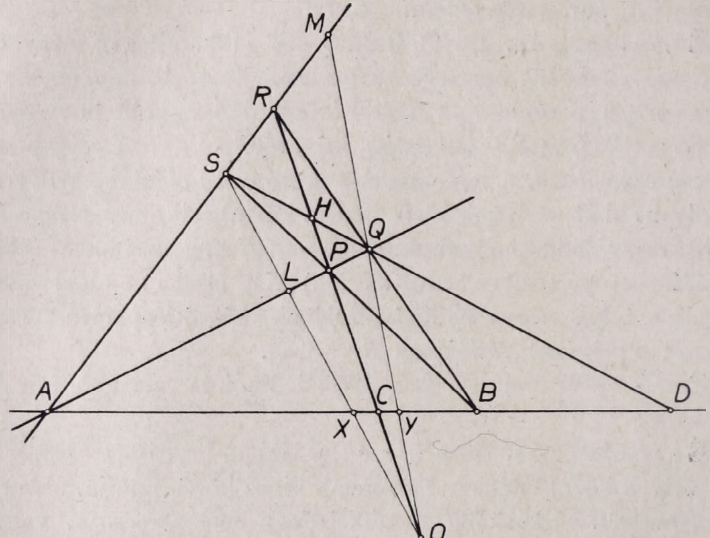
Ennek az értelmezésnek a síkbeli dualitás szerint a következő felel meg:

Értelmezés. Ha p, q, r, s egy síkban fekvő négy olyan egyenes, melyek közül bármely háromnak nincs közös pontja, akkor ezek az egyenesek, s közülök kettő-kettőnek metszéspontja, vagyis a következő hat pont: pq, rs; pr, qs; ps, qr *teljes négyoldalt* alkot. A négy egyenest a *négyoldal oldalai*nak, a hat metszéspontot a *négyoldal csúcsai*nak nevezzük. Két olyan csúcsot, mely nem tartozik a négyoldalnak ugyanahhoz az oldalához, *átellenes csúcs*nak nevezünk. Két átellenes csúcsot összekötő egyenes a négyoldal *átlója*, két átló metszéspontja a négyoldal *átlóspontja*.

A teljes négyszöggel fogunk részletesen foglalkozni; az erre vonatkozó eredményeket a síkbeli dualitás elve szerint átvihetjük a teljes négyoldalra.

Legyen A a PQ és RS, B pedig a PS és QR átellenes oldalpárok metszéspontja; ezek a $PQRS$ teljes négyszögnek átlóspontjai. A teljes négyszög további két oldalának PR-nek és QS-nek az AB átlóval való metszéspontját jelöljük C-vel és D-vel. Meg fogjuk mutatni, hogy az A, B és C, D pontpárok elválasztják egymást az AB egyenesen. Ennek a tételnek a rendezési axiomákon alapuló, következő bizonyítása ENRIQUES-től származik.

Legyen M az RS egyenesnek olyan pontja, melyre az $(AMRS)$ ciklikus elrendezés áll fenn (lásd erre vonatkozóan a **B** axiómát, 12. o.). Feltehetjük, hogy az M pont nem tartozik a CQ egyeneshez; jelöljük az MQ és PR egyenesek metszéspontját O-val; feltételeink folytán O különbözik az AB és PR egyenesek C metszéspontjától, s ezért O nem tartozik az AB egyeneshez (7. ábra). Jelöljük L-lel az



7. ábra.

AQ és az OS egyenes metszéspontját. Az O pontból vetítsük az A, S, R, M pontnégyest az AQ egyenesre; a vetületekre az $(AMRS)$-sel megegyező $(ASRM)$ ciklikus elrendezés folytán az $(ALPQ)$ ciklikus elrendezés érvényes. Jelöljük az AB egyenesnek az OS egyenessel való metszéspontját X-szel, OM-mel való metszéspontját Y-nal. Az A, S, R, M pontnégyes az O pontból való vetítésnél az AB egyenes A, X, C, Y pontnégyesébe megy át, tehát erre az $(AXCY)$ ciklikus elrendezés áll fenn. Az A, L, P, Q pontnégyesnek az S, és az A, S, R, M pontnégyesnek a Q pontból való vetítésnél az AB egyenesen az A, X, B, D, illetve az A, D, B, Y pontnégyes felel meg; ezeknek ciklikus elrendezése tehát $(AXBD)$ és $(ADBY)$. Az $(AXCY)$,

$(AXBD)$ és $(ADBY)$ elrendezésekből következik az $(ACBD)$ ciklikus elrendezés. Ugyanis $(AXBD)$ megegyezik $(BDAX)$-szel, és $(ADBY)$ $(BDAY)$-nal; a $(BDAX)$, $(BDAY)$ elrendezésekből következik vagy a $(BDAXY)$, vagy a $(BDAYX)$ ciklikus elrendezés (4. §, **A 5** tétel). Az A, B, X, Y pontok elrendezése tehát vagy $(AXYB)$, vagy $(AYXB)$; tegyük fel az előbbit, melyre a másik esetet X és Y felcserélésével vezethetjük vissza. Az $(AXCY)$, $(AXYB)$ elrendezésekből következik az $(AXCYB)$, tehát az $(ACYB)$ elrendezés (4. §, **A 4** tétel); az $(ACYB)$ és $(AYBD)$ elrendezésből következik végül az $(ACBD)$ ciklikus elrendezés.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

7.1. Tétel. *A teljes négyszög egy átlóján a két átlóspont elválasztja egymástól a teljes négyszög másik két oldalának ezzel az átlóval való metszéspontjait.*

Ebből a tételből korolláriumként adódik a következő:

7.2. Tétel. *A teljes négyszög három átlóspontja nem fekszik egy egyenesen.*

Az **I, II, III, IV** axiómák alapján, azaz metrikus alapon be fogjuk bizonyítani a következő tételt:

*7.3. Tétel. *A teljes négyszög A, B átlóspontjait összekötő AB egyenesnek a teljes négyszög másik két oldalával való metszéspontja legyen C és D. Az A, B, C, D pontok kettősviszonya egyenlő a negatív előjellel vett egységszakasszal: $(ABCD) = -1$.*

Tegyük fel, hogy a $PQRS$ teljes négyszög A, B átlóspontjai, s a másik két oldalnak az AB egyenessel közös C, D pontjai végesben feküsznek (a jelöléseket a 7. ábrának megfelelően vesszük fel). Vetítsük az A, B, C, D pontokat a P pontból a QS, majd a vetületeket az R pontból az AB egyenesre. A P pontból való vetítésnél az A, B, C, D pontoknak rendre a Q, S, H, D pontok felelnek meg, ahol H-val jelöljük a teljes négyszög harmadik átlóspontját. Az R-ből való vetítésnél ezeknek a pontoknak rendre a B, A, C, D pontok felelnek meg. Mivel vetítésnél a kettősviszony változatlan (**5**.2 tétel), tehát

$$(ABCD) = (BACD).$$

A kettősviszony értelmezéséből következik (l. 16. o.), hogy

$$(BACD) = \frac{1}{(ABCD)};$$

e szerint

$$(ABCD) = \frac{1}{(ABCD)}, \text{ vagyis } (ABCD)^2 = 1 \text{ és } (ABCD) = \pm 1;$$

mivel a **7**.1 tétel szerint az A, B és C, D pontpárok elválasztják egymást, az $(ABCD)$ kettősviszony negatív (**5**.3), s így $(ABCD) = -1$.

8. §. Perspektív síkidomok. (P I).

Értelmezés. Két síkidom pontjai között megadott kölcsönösen egyértelmű vonatkozást az O *középpontra vonatkozóan perspektívnek* nevezünk, ha a megfelelő pontokat összekötő egyenesek az O ponton mennek át. A vonatkozást az l *tengelyre vonatkozóan perspektívnek* nevezzük, ha az egyik idom két tetszőleges pontját összekötő egyenes, s a másik idom két megfelelő pontját összekötő egyenes az l egyenesen metszi egymást.

Az értelmezésből következik, hogy, ha két perspektív (azaz perspektív vonatkozásban levő) síkidom ugyanahhoz a síkhoz tartozik, akkor a perspektivitás középpontja, illetve tengelye is ehhez a síkhoz tartozik; ha pedig a két idom nem tartozik egy síkhoz, akkor a perspektivitás középpontja nem tartozik egyik idom síkjához sem, a perspektivitás tengelye pedig a két sík metszésvonala.

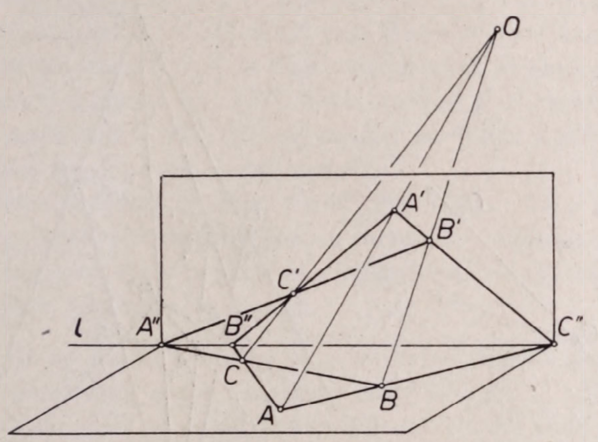
A Desargues-féle tételnek a Bevezetésben már említett általánosítása a fenti értelmezés szerint úgy fejezhető ki, hogy két, ugyanabban a síkban fekvő, s egy középpontra vonatkozóan perspektív háromszög perspektív egy tengelyre vonatkozóan is, és megfordítva. Ezt a tételt, az euklidesi geometria céljainak megfelelően korlátozott alakban két, lényegesen különböző alapon bizonyítottuk be az első kötetben. Az első bizonyításban csak a síkra vonatkozó axiómákat vettük fel, mégpedig az összetartozás, rendezés és párhuzamosság axiómáin kívül az *egybevágósági axiómákat* is (234. o.). A második bizonyításban nem használtunk fel egybevágósági axiómákat, de e helyett felhasználtuk *a térre vonatkozó összetartozási axiómákat*, s azonkívül a rendezés és a párhuzamosság axiómáit (250. o.). A tételnek ezzel a sajátos természetével a 105. §-ban fogunk foglalkozni. Az említett második bizonyítás csekély módosítása alkalmazható a projektív geometriában.

A projektív geometria összetartozási axiómái alapján (l. 1. §) bebizonyítjuk a következő tételt, mely ugyanabban a síkban fekvő háromszögek esetén a Desargues-féle tétel.

8.1. Tétel. *Ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögek perspektívek az O középpontra vonatkozóan, akkor perspektívek egy l tengelyre vonatkozóan is, és megfordítva.*

Bizonyítás. Feltesszük, hogy a két háromszög egymásnak megfelelő csúcsai egymástól különböznek, s hogy az egymásnak megfelelő oldalak is különbözők; ellenkező esetben a tétel tartalmatlan (bár érvényes).

Első eset (8. ábra). Ha az ABC és $A'B'C'$ síkok különbözők, tegyük fel, hogy az AA', BB', CC' egyenesek egy O ponton mennek



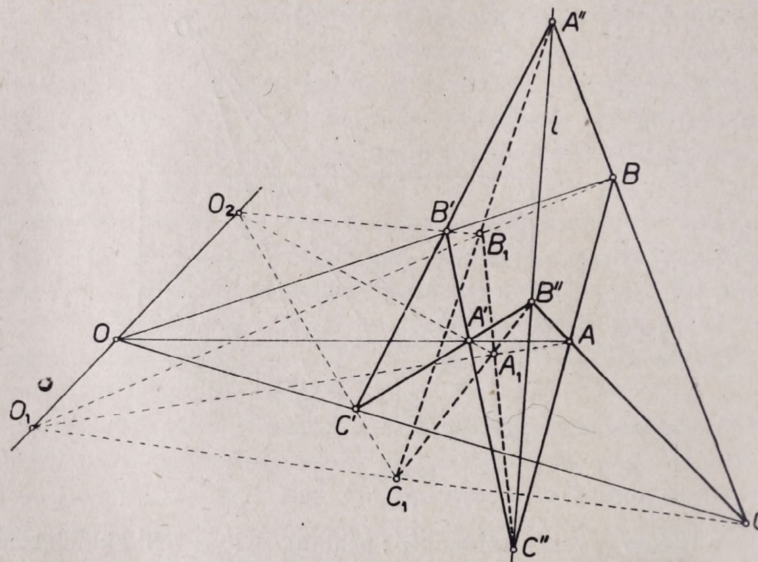
8. ábra.

át. Ez a három egyenes különböző; például AA' és BB' különböznek egymástól, mivel feltevésünk szerint AB nem azonos $A'B'$-vel. Az O pont nem tartozik sem az ABC, sem az $A'B'C'$ síkhoz. Az egymást metsző AA' és BB' egyenesek által meghatározott síkhoz tartozik az AB és az $A'B'$ egyenes; ennek a két egyenesnek van tehát egy közös C'' pontja, mely az ABC és $A'B'C'$ síkok l metszésvonalához tartozik. Ugyanúgy látjuk be, hogy létezik az AC és $A'C'$, valamint a BC és $B'C'$ egyenespárok metszéspontja, B'', illetve A'', s hogy ezek az l egyeneshez tartoznak. Tehát ABC és $A'B'C'$ perspektív az l tengelyre vonatkozóan.

Megfordítva, ha az ABC és $A'B'C'$ nem egy síkban fekvő háromszögek perspektívek egy l tengelyre vonatkozóan, akkor l a két sík metszésvonala. Az egymást metsző AB és $A'B'$ egyenesek meghatároznak egy $ABA'B'$ síkot; ugyanúgy a másik két megfelelő oldalpár.

Ez a három sík különbözik egymástól, s nem halad át egy egyenesen; van tehát egy és csak egy közös O pontjuk. A három sík közül kettő-kettőnek a metszésvonala, vagyis az AA', BB', CC' egyenesek az O ponton mennek át; tehát ABC és $A'B'C'$ perspektív az O középpontra vonatkozóan.

Második eset (9. ábra). Ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egy síkban feküsznek s perspektívek egy O pontra vonatkozóan, legyen O_1 egy, ehhez a síkhoz nem tartozó pont, és O_2 az OO_1 egyenesnek egy, O-tól és O_1-től különböző pontja; O_2 nem tartozik az ABC



9. ábra.

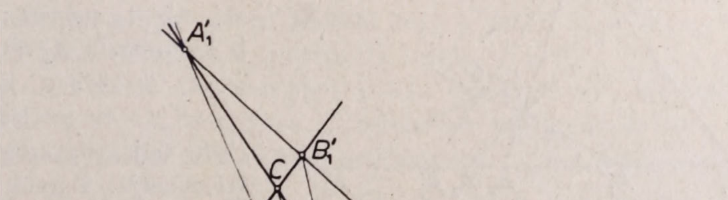
síkhoz. Az OO_1 és OA egyeneseken átfektetett síkban fekszik az O_1A és az O_2A' egyenes; ezeknek van tehát egy A_1 közös pontja, s az A_1 pont nem tartozik az ABC síkhoz. Hasonlóan, van az O_1B és O_2B', valamint az O_1C és O_2C' egyenespárnak egy-egy B_1, illetve C_1 közös pontja, s ezek nem tartoznak az ABC síkhoz. Az A_1, B_1, C_1 pontok nem feküsznek egy egyenesen. A nem egy síkban fekvő ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek perspektívek az O_1 pontra vonatkozóan, tehát perspektívek a két sík l metszésvonalára vonatkozóan. Ugyanúgy az $A'B'C'$ és $A_1B_1C_1$ háromszögek. Ebből következik, hogy az l egyenesnek A_1B_1-gyel közös C'' pontja az AB és $A'B'$ egyenesek metszéspontjával azonos; hasonlóan az AC és $A'C'$ s a BC és $B'C'$

oldalpárokra. Tehát a két háromszög perspektív az l tengelyre vonatkozóan.

Megfordítva, legyenek az egy síkban fekvő ABC és $A'B'C'$ háromszögek perspektívek az l egyenesre vonatkozóan ; l ehhez a síkhoz tartozik. Felveszünk egy másik, l-en áthaladó síkot s egy olyan O_1 pontot, mely a két sík közül egyikhez sem tartozik. Az O_1 pontból az ABC háromszöget a másik síkra vetítjük ; az így nyert $A_1B_1C_1$ háromszög a két megadott háromszög közül mindegyikkel perspektív az l tengelyre vonatkozóan. Van tehát egy olyan O_2 pont, melyre vonatkozóan $A_1B_1C_1$ és $A'B'C'$ perspektívek ; O_2 különbözik O_1-től. Az O_1O_2 egyenesnek az ABC síkkal való O metszéspontja az egymást az A_1 pontban metsző O_1A és O_2A' egyeneseken átfektetett síkhoz, s ezért ennek a síknak az ABC síkkal való AA' metszésvonalához tartozik ; ugyanúgy a BB', CC' egyeneshez is. Tehát ABC és $A'B'C'$ perspektívek az O pontra vonatkozóan.

A DESARGUES-féle tételben foglalt két állítás : két, egy síkban fekvő, s egy középpontra vonatkozóan perspektív háromszög perspektív egy tengelyre vonatkozóan, és megfordítva, — egymásnak felel meg a síkbeli dualitás elve szerint.

8.2. Ha az ABC háromszög síkjában fekvő P pont nem tartozik az ABC háromszög egyik oldalához sem, jelöljük A', B', C'-vel a P pontnak az A, B, C csúcsból az átellenes oldalra való vetületét.



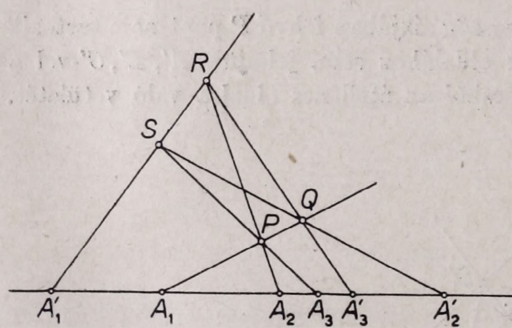
10. ábra.

Az AB és $A'B'$, a BC és $B'C'$, s az AC és $A'C'$ egyenespárok C_1', A_1', B_1' metszéspontjai egy p egyenesen feküsznek, melyet a *P pontnak az ABC háromszögre vonatkozó polárisának* nevezünk. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögek ugyanis perspektívek a P pontra, s ezért a **8**.1 tétel szerint egy p tengelyre vonatkozóan is. Jegyezzük meg, hogy *A és B átlóspontjai az $A'B'CP$ teljes négyszögnek, melynek további két oldala az AB átlót a C' és C_1' pontokban metszi* (10. ábra).

A síkbeli dualitás értelmében minden olyan, az ABC síkban fekvő p egyenesnek, amely nem megy át az ABC háromszög egyik csúcsán sem, megfelel egy és csak egy P pont, melynek p a polárisa ABC-re vonatkozóan ; a P pontot *a p egyenesnek az ABC háromszögre vonatkozó pólusának* nevezzük.

8.3. T é t e l . *Legyen $PQRS$ és $P'Q'R'S'$ két teljes négyszög, és l egy olyan egyenes, amely nem megy át ezeknek a négyszögeknek egyik csúcsán sem. Ha a két négyszög megfelelő PQ és $P'Q'$ stb. oldalainak metszéspontjai közül öt az l egyeneshez tartozik, akkor a hatodik is.*

B i z o n y í t á s. (11. ábra.) Jelöljük a PQ, PR, PS oldalaknak l-lel közös pontját A_1, A_2, A_3-mal, az RS, QS, QR oldalaknak l-lel közös pontját A_1', A_2', A_3'-vel. Az A_1, A_2, A_3 pontok különböznek egymástól, ugyanúgy az A_1', A_2', A_3' pontok ; A_i is különbözik A_k'-től, ha $i \neq k$; de lehet, hogy $A_i = A_i'$, s ez esetben a $PQRS$ teljes négyszögnek átlóspontja. Tegyük fel, hogy a másik négyszög $P'Q'$, $P'R'$, $P'S'$, $R'S'$, $Q'S'$ oldalai rendre az A_1, A_2, A_3 ; A_1', A_2' pontban metszik az l egyenest ; be kell bizonyítani, hogy a $Q'R'$ egyenes átmegy az A_3' ponton. Nyilvánvaló ez az állítás, ha a $Q'R'$ egyenes azonos QR-rel ; zárjuk ki ezt az esetet.



11. ábra.

Tegyük fel *először*, hogy az egyik négyszög PQ, PR, PS oldalai különböznek a másik négyszög megfelelő $P'Q'$, $P'R'$, $P'S'$ oldalaitól ; ez a feltétel nyilván teljesül, ha például a két négyszög síkja különböző. Feltételeink folytán a PRS és $P'R'S'$ háromszögek perspektívek az l tengelyre vonatkozóan, a **8**.1 tétel szerint tehát perspektívek egy O középpontra vonatkozóan. Ugyanúgy a PQS és $P'Q'S'$ háromszögek perspektívek egy középpontra, s a perspektivitás középpontja a PP' és SS' egyenesek metszéspontja, vagyis az O pont. E szerint $PQRS$ és $P'Q'R'S'$ perspektívek az O középpontra vonatkozóan, s ezért a PQR és $P'Q'R'$ háromszögek is; a **8**.1 tétel folytán ez a két háromszög perspektív egy tengelyre vonatkozóan, s a perspektivitás tengelye a PQ és $P'Q'$ egyenesek A_1 metszéspontját a PR és $P'R'$ egyenesek A_2 metszéspontjával összekötő l egyenes. Ebből következik, hogy a két háromszög harmadik oldalpárjának, vagyis a QR és $Q'R'$ egyeneseknek a metszéspontja is az l egyeneshez tartozik; ez az A_3' pont.

Másodszor, ha a két teljes négyszög egy-egy megfelelő oldala közös, akkor ez az oldal, s az ettől különböző l egyenes a két teljes négyszög síkjának két közös egyenese, tehát a két négyszög egy síkban fekszik. Felveszünk egy ettől különböző síkot az l egyenesen át, s benne egy $P''Q''R''S''$ teljes négyszöget, melynek első öt oldala az l egyenest rendre az A_1, A_2, A_3; A_1', A_2' pontban metszi. E célból felveszünk egy, l-hez nem tartozó P'' pontot; legyen Q'' a $P''A_1$ egyenesnek egy, P''-től és A_1-től különböző pontja, S'' a $P''A_3$ és $Q''A_2'$ egyenesek metszéspontja, R'' pedig $P''A_2$ és $S''A_1'$ metszéspontja. A fenti első esetben levezetett eredményt alkalmazzuk sorban a $PQRS$ és $P''Q''R''S''$, s a $P'Q'R'S'$ és $P''Q''R''S''$ teljes négyszögekre; ilyen módon adódik, hogy a QR, $Q'R'$, $Q''R''$ egyeneseknek közös pontja az l egyenes A_3' pontja.

A **8**.3 tétel olyan módszert ad, amellyel egy egyenes öt A_1, A_2, A_3; A_1', A_2' pontjához egyértelműen hozzárendelhetünk egy hatodik A_3' pontot a következő értelemben:

8.4. Tétel. *Ha A_1, A_2, A_3, ; A_1', A_2' az l egyenes olyan pontjai, hogy bármely két, nem egyenlő indexű pont különbözik egymástól, akkor van olyan teljes négyszög, melynek egyik csúcsa sem tartozik az l egyeneshez, s amelynek egy csúcsán áthaladó három oldala az A_1, A_2, A_3 pontban, s az A_1, illetve az A_2 ponton áthaladó oldallal átellenes oldala az A_1', illetve az A_2' pontban metszi az l egyenest. A teljes négyszög hatodik oldalának az l egyenessel közös A_3' pontja független a teljes négyszög megválasztásától. Ebben az értelemben a következő pontcsoportok ugyanazt a hatodik pontot határozzák meg:*

$$(A_1, A_2, A_3 ; A_1', A_2'), \quad (A_2, A_1, A_3 ; A_2', A_1') \quad (A_1', A_2', A_3 ; A_1, A_2).$$

Bizonyítás. A **8**.3 tétel bizonyításában alkalmazott módszerrel szerkeszthetünk egy olyan $PQRS$ teljes négyszöget, melynek első öt oldala rendre az A_1, A_2, A_3; A'_1, A'_2 pontban metszi az l egyenest. A hatodik oldalnak l-lel közös pontja a **8**.3 tétel szerint független a $PQRS$ teljes négyszög megválasztásától. A pontcsoport felcseréléseit illetően jegyezzük meg, hogy a második és harmadik pontcsoport a $PRQS$, illetve az $SRQP$ teljes négyszögre vonatkozóan ugyanolyan szerepű, mint az első pontcsoport a $PQRS$ négyszögre vonatkozóan; minthogy a nevezett négyszögek azonosak egymással, az l egyenessel való hatodik metszéspontjuk ugyanaz.

Megjegyzés. A fenti módszerekkel nem bizonyítható be, hogy az $(A_1, A_2, A_3$; $A'_1, A'_2)$ és az $(A'_1, A_2, A_3$; $A_1, A'_2)$ pontcsoportok ugyanazt a hatodik pontot határozzák meg; erre vonatkozóan lásd a **14**.7 tételt.

9. §. Harmonikus négyesek. (P I, II).

Értelmezés. Legyen A, B, C, D egy egyenes négy pontja. Ha van egy olyan teljes négyszög, amelynek A és B átlóspontjai, s másik két oldalának az AB átlóval közös pontjai C és D, akkor azt mondjuk, hogy *az A, B pontpár harmonikusan választja el a C, D pontpárt*, vagy hogy *A, B, C, D harmonikus pontnégyes.*

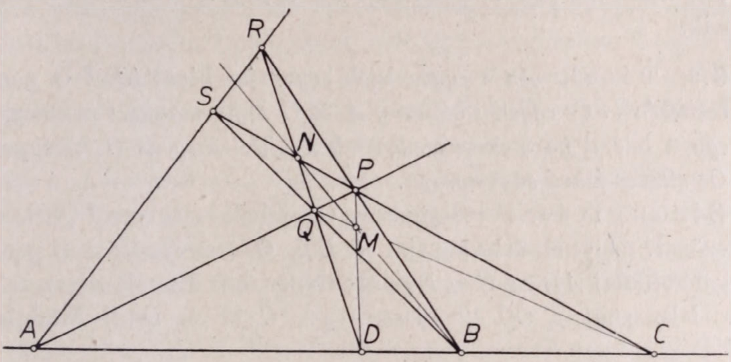
Az értelmezés igazolására jegyezzük meg, hogy a **7**.1 tétel szerint a teljes négyszög A, B átlóspontjai elválasztják egymástól a további két oldalnak az AB átlóval közös C, D pontjait. A **8**.3 tételből következik továbbá, hogy az A, B, C, D pontoknak a fenti értelmezésben leírt tulajdonsága független az illető teljes négyszög megválasztásától, azaz ha van egy olyan teljes négyszög, melyre vonatkozóan A és B harmonikusan választja el C-t és D-t, akkor bármely olyan teljes négyszögnek, melynek A és B átlóspontjai, s melynek további két oldala közül az egyik átmegy a C ponton, másik oldala a D pontban metszi az AB átlót. A **8**.3 tételnek ez az alkalmazása a tétel bizonyításában alkalmazott jelölések szerint az $A_1=A'_1=A$, $A_2=A'_2=B$, $A_3=C$, $A'_3=D$ esetnek felel meg.

Megjegyzés. Az A, B, C, D harmonikus pontnégyesre a fenti értelmezés szerint az $(ACBD)$ — nem pedig az $(ABCD)$ — *ciklikus elrendezés* áll fenn.

Az értelmezésből nyilvánvaló, hogy ha A, B, C, D harmonikus pontnégyes, akkor A, B, D, C és B, A, C, D is az. Bebizonyítjuk a következő tételt:

9.1. *Ha az A, B pontpár harmonikusan választja el a C, D pontpárt, akkor C, D is harmonikusan választja el A, B-t. (Tehát C, D, A, B is harmonikus pontnégyes.)*

Legyen ugyanis $PQRS$ olyan teljes négyszög, melynek oldalai közül PQ és RS az A ponton, PR és QS a B ponton, PS a C és QR a D ponton megy át. A PS és QR oldalak metszéspontját, vagyis a négyszög harmadik átlóspontját jelöljük N-nel, a CQ és DP egyenesek metszéspontját M-mel (12. ábra). Az M, N, B pontok egy egyenesen



12. ábra.

feküsznek, mivel a CQS és DPR háromszögek perspektívek az A középpontra vonatkozóan (**8**.1). A $PQMN$ teljes négyszögnek C és D átlóspontjai, további két oldalának a CD átlóval közös pontjai pedig A és B; tehát C, D harmonikusan választja el az A, B pontpárt.

Tekintettel a harmonikus elválasztás most bebizonyított szimmetriájára, a következő kifejezést is fogjuk használni: *az A, B és C, D pontpárok harmonikusan választják el egymást.*

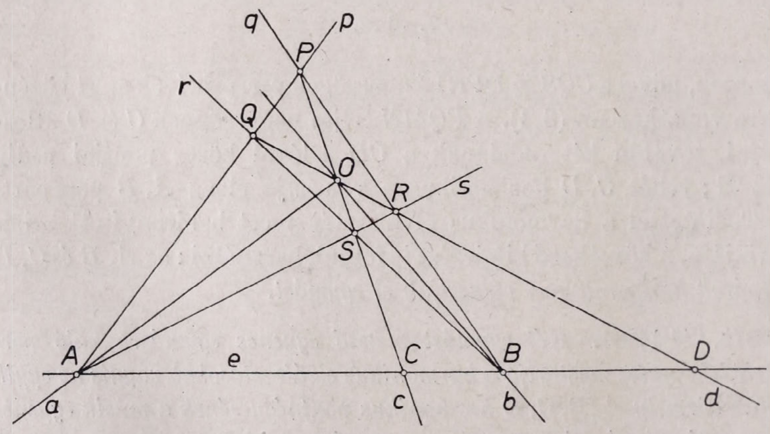
9.2. Tétel. *Két egymást metsző egyenes egymásra való perspektív leképezése megtartja a harmonikus elválasztásokat, vagyis az egyik egyenes bármely A, B, C, D harmonikus pontnégyesének a másik egyenesen egy A′, B′, C′, D′ harmonikus pontnégyest feleltet meg.*

Bizonyítás. Legyen a és a' két egymást metsző egyenes, és O a rajtuk átfektetett síknak egy pontja, mely nem tartozik sem a-hoz, sem a'-höz. Ha A, B, C, D az a egyenesen fekvő harmonikus pontnégyes, átfektetünk a-n és a'-n egy-egy a közös síktól különböző α és α' síkot, s felveszünk α-ban egy olyan $PQRS$ teljes négyszöget, melynek A és B átlóspontjai s további két oldalának AB-vel közös pontjai C és D. Az O pontból való vetítésnél a $PQRS$ teljes négyszögnek az α' síkban egy $P'Q'R'S'$ teljes négyszög, a PQ és RS oldalak A metszéspontjának a $P'Q'$ és $R'S'$ oldalak A' metszéspontja stb. felel meg. Tehát az A, B, C, D pontoknak az O pontból való vetítésnél az a' egyenes olyan A', B', C', D' pontjai felelnek meg, melyek harmonikus pontnégyest alkotnak.

É r t e l m e z é s. Egy sugársorhoz tartozó négy a, b, c, d egyenes *harmonikus sugárnégyest* alkot, ha van olyan teljes négyoldal, melynek c és d átlói, s melynek további két csúcsa az a és a b egyeneshez tartozik.

9.3. T é t e l. *Az e egyenesnek egy rajta kívül fekvő O pontból való vetítésénél az e egyenes bármely A, B, C, D harmonikus pontnégyesének egy a, b, c, d harmonikus sugárnégyes felel meg az O középpontú, s az Oe síkban fekvő sugársorban.*

B i z o n y í t á s. Felveszünk az Oe síkban egy olyan $PQRS$ teljes négyszöget, melynek átlóspontjai A, B és O, s melynek az O ponton áthaladó oldalai AB-t a C és D pontban metszik. Ennek megszerkesztésére felveszünk a CO egyenesen egy, C-től és O-tól különböző



13. ábra.

P pontot ; a DO egyenesnek AP-vel és BP-vel közös pontja legyen Q és R ; az AR és BQ egyenesek S metszéspontja a CO egyenesen fekszik, mivel A, B, C, D harmonikus pontnégyes, feltevésünk értelmében. Jelöljük p, q, r, s-sel rendre a PQ, PR, QS, RS egyeneseket (13. ábra) ; ezek egy teljes négyoldalt alkotnak, melynek átellenes csúcspárjai: $P=(p,q)$, $S=(r,s)$; $Q=(p,r)$, $R=(q,s)$; $A=(p,s)$, $B=(q,r)$. A $QR=OD$ és $PS=OC$ egyenesek ennek a négyoldalnak átlói; tehát az $a=OA$, $b=OB$, $c=OC$, $d=OD$ egyenesek harmonikus sugárnégyest alkotnak.

A **9**.3 *tétel megfordítása* a fenti meggondolásból a síkbeli dualitás alkalmazásával adódik.

A teljes négyszögnek és négyoldalnak a térbeli dualitás szerint a következő idomok felelnek meg. *Teljes négyél,* mely egy O ponton átmenő, s hármankint nem egy síkban fekvő négy egyenesből, s az ezeken páronkint átfektetett hat síkból áll. *Teljes négylap,* mely egy O ponton átmenő s hármankint nem egy egyeneshez tartozó négy síkból, s ezeknek páronkint való hat metszésvonalából áll. A teljes négyszögnek egy, a síkján kívül fekvő pontból való vetítésnél egy teljes négyél, a teljes négyoldalnak egy teljes négylap felel meg. Ezeknek az idomoknak a segítségével újra értelmezhetnők egy sugársorban a harmonikus sugárnégyeseket, továbbá egy síksorban a harmonikus síknégyeseket. Az utóbbit azonban közvetve, a harmonikus sugárnégyesek fenti értelmezésére hivatkozva, következőképpen vezetjük be.

Értelmezés. Egy e egyenesen áthaladó négy $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sík *harmonikus síknégyest* alkot, ha a négy síknak egy, az e egyenest nem tartalmazó ε síkkal való a, b, c, d metszésvonalai harmonikus sugárnégyest alkotnak.

Az értelmezés igazolására megmutatjuk, hogy a négy síknak leírt tulajdonsága független az ε sík megválasztásától. Legyen ugyanis ε' egy másik sík, mely nem tartalmazza az e egyenest, s legyen a', b', c', d' ennek a síknak az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ síkokkal való metszésvonala. Felveszünk az e egyenesen egy olyan O pontot, mely nem tartozik sem az ε, sem az ε' síkhoz. Az ε síkban felveszünk egy teljes négyoldalt, melynek átlói c és d, s amelynek másik két csúcsa az a és a b egyeneshez tartozik. Ennek az O pontból való vetítésnél az ε' síkban egy olyan teljes négyoldal felel meg, amelynek átlói c' és d', s melynek másik két csúcsa az a' és a b' egyeneshez tartozik; ezért az a', b', c', d' egyenesek is harmonikus négyest alkotnak. *Ha tehát az e egyenesen átmenő $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ síkok harmonikus síknégyest alkotnak, akkor bármely e-t nem tartalmazó sík harmonikus sugárnégyesben, s bármely e-hez torz egyenes harmonikus pontnégyesben metszi a négy síkot.*

Fenti tárgyalásunknak a **9**.2 és **9**.3 tétellel való összefoglalásából adódik a következő:

9.4. Tétel. *Két elsőfajú elemi alakzat egymásra való projektív leképezésénél megmaradnak a harmonikus elválasztások, vagyis harmonikus négyeseknek harmonikus négyesek felelnek meg.*

Ugyanis, mint láttuk, a harmonikus négyesek egymásnak felelnek meg vetítésnél és metszésnél, tehát az ezek összetételéből származó projektív leképezéseknél is.

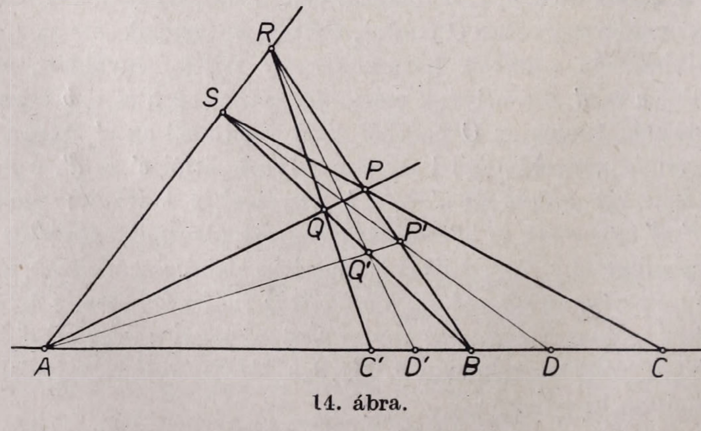
Értelmezés. Legyen A, B, C egy egyenes három pontja. A *C pontnak az A, B pontpárra vonatkozó harmonikus párján* (vagy konjugáltján) azt a D pontot értjük, melyre A, B, C, D harmonikus pontnégyes. A D pont a **8**.4 tétel értelmében egyértelműen meg van határozva. A harmonikus pár jelölésére a következő jelet fogjuk alkalmazni:

$$D = (A, B)/C.$$

Értelmezés. Az a egyenesnek a hozzátartozó A, B fixpontokra vonatkozó *harmonikus involució*ján az a egyenesnek azt a leképezését értjük, mely az A és B pontot önmagának, s az egyenes minden, A-tól és B-től különböző C pontjának az A, B pontokra vonatkozó harmonikus párját felelteti meg.

A harmonikus involució az egyenesnek önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése, melynek *négyzete az azonosság.* Ha ugyanis a C pontnak a C' pont, akkor C'-nek ugyanennél a leképezésnél a C pont felel meg.

9.5. *A harmonikus involució projektív leképezés,* azaz előállítható perspektív leképezések összetételéből. Legyen ugyanis RS egy, az A ponton átmenő, AB-től különböző egyenes, és R, S ennek két,



14. ábra.

A-tól és egymástól különböző pontja. Az S pontból vetítsük az AB egyenest a BR egyenesre, ezt az A pontból BS-re, s az utóbbit R-ből az AB egyenesre. Ha C az AB egyenesnek tetszőleges, A-tól és B-től különböző pontja, s ha P, Q, C' jelenti C-nek az egymás után alkalmazott vetítéseknél megfelelő képpontokat (14. ábra), akkor A és B a $PQRS$ teljes négyszögnek átlóspontjai, C és C' pedig a négyszög további két oldalának AB-vel közös pontjai. Tehát az alkalmazott három vetítés összetétele az AB egyenes minden C pontjának a $C'=(A, B)/C$ pontot felelteti meg, s ezért az A, B fixpontokra vonatkozó harmonikus involucióval megegyezik.

Mivel a projektív leképezések megtartják a ciklikus rendezést, ez érvényes a harmonikus involucióra is. Ha tehát C és D az AB egyenesnek két tetszőleges, az A, B pontoktól különböző pontja, és $C'=(A, B)/C$, $D'=(A, B)/D$, s ha a C, D, C', D' pontok különbözők, akkor az A, B, C, D és az A, B, C', D' pontok elrendezése megegyező. Tegyük fel például, hogy az előbbi négy pont ciklikus elrendezése $(ACDB)$, akkor fennáll az $(AC'D'B)$ elrendezés. Mivel az A, B pontpár elválasztja a C, C', s ugyancsak a D, D' pontpárt, azaz érvényesek az $(ACBC')$, $(ADBD')$ elrendezések, ezekből a 4. §, **A 1—5.** tételek szerint következik :

$$(ACDB),\quad (ACBC') \to (CDBC') \to (BDCC')\,;^{1}$$
$$(AC'D'B),\ (AD'BD) \to (C'D'BD) \to (BDC'D')\,;$$
$$(BDCC'),\quad (BDC'D') \to (DCC'D') \to (CC'D'D).$$

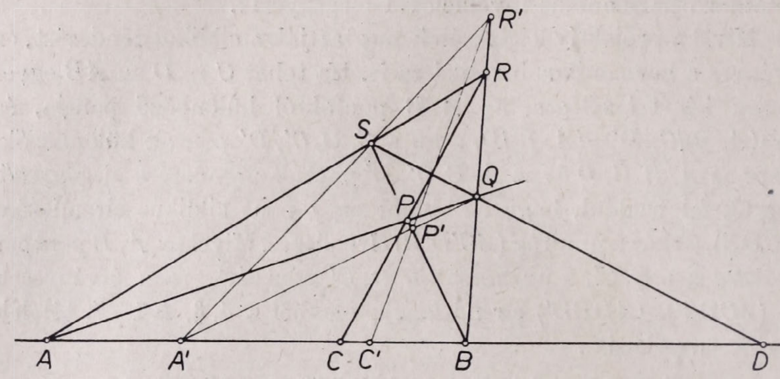
E szerint a C, C' és D, D' pontpárok nem választják el egymást. Az A, B, C, D pontok $(ACDB)$ ciklikus elrendezésére vonatkozó feltevésünk nem csorbítja az általánosságot ; ha elrendezésük $(ADCB)$ volna, felcseréljük C és D szerepét, ha pedig $(ACBD)$, akkor D és D' szerepét. Bebizonyítottuk ezzel a következő tételt :

9.6. Tétel. *Ha a C, C' és D, D' pontpárokhoz megadható egy közös A, B harmonikus pár* (vagyis olyan, mely C, C'-t is, D, D'-t is harmonikusan választja el), *akkor a C, C' és D, D' pontpár nem választja el egymást az egyenesen. Az $(ACDB)$ elrendezésből következik az $(AC'D'B)$ elrendezés* (lásd a 14. ábrát).

9.7. Tétel. *Ha egy egyenesen A, B, C, D* és *A', B, C', D harmonikus pontnégyesek, s ha fennáll az $(AA'BD)$ elrendezés, akkor fennáll a $(CC'BD)$ elrendezés.*

[1] A jelölés így olvasandó : az $(ACDB)$, $(ACBC')$ elrendezésből *következik* $(CDBC')$ stb.

Bizonyítás. (15. ábra.) Legyen $PQRS$ olyan teljes négyszög egy, az AB egyenesen átfektetett síkban, melynek PQ és RS oldala az A, PS és QR oldala a B, PR oldala a C, és QS oldala a D ponton megy át. Az $A'Q$ egyenesnek a PS oldallal való metszéspontját jelöljük P'-vel, az $A'S$ egyenesnek a QR oldallal való metszéspontját pedig R'-vel. A $P'R'$ egyenesnek AB-vel közös pontja a C' pont. Vetítsük az A, A', B, D pontokat a Q pontból a PS egyenesre ; az $(AA'BD)$ elrendezés következtében a vetületekre a $(PP'BS)$ elrendezés érvényes. Vetítsük az utóbbi négy pontot R'-ből az AB egyenesre,



15. ábra.

s jelöljük PR'-nek AB-vel közös pontját X-szel ; adódik az $(XC'BA')$ elrendezés. Az A, A', B, D pontoknak az S-ből való vetítésnél a QR egyenesen az R, R', B, Q pontok felelnek meg, ezeknek elrendezése tehát $(RR'BQ)$; ezt a négy pontot a P pontból az AB egyenesre vetítve a C, X, B, A pontokat kapjuk, ezeknek elrendezése tehát $(CXBA)$, vagy ami ugyanaz : $(ACXB)$. Mivel A', B és C', D harmonikusan választják el egymást, elrendezésük a **7.1** tétel szerint : $(BC'A'D)$; ebből és a $(BC'XA')$ elrendezésből következik (l. 4. §, **A 4.** tétel) a $(DBC'X)$ elrendezés. Hasonlóan :

$$(ACXB),\ (ACBD) \rightarrow (CXBD) \rightarrow (DBXC).$$

Végül

$$(DBC'X), (DBXC) \rightarrow (DBC'C) \rightarrow (CC'BD).$$

Megjegyzés. A **9.6** és **9.7** tételben foglalt eredményeket szemléletesen így fejezhetjük ki :

Ha az A, B, C, D harmonikus pontnégyesben *az A, B pontok változatlanok,* s a C pont az egyenesen valamely irányban mozog, akkor C-nek az A, B pontokra vonatkozó D harmonikus párja az egyenesen *ellenkező irányban* mozog (**9**.6).

Ha pedig az A, B, C, D harmonikus pontnégyesben *a B, D pontok változatlanok* s az A pont az egyenesen valamely irányban mozog, akkor a C pont *ugyanabban az irányban* mozog (**9**.7).

10. §. A DEDEKIND-féle folytonossági axióma. (P I, II).

Az egyenes folytonosságára vonatkozó DEDEKIND-féle axiómát (l. első kötet 266. o., **V. c** axióma) a projektív geometriában két, egymással aequivalens alakban fogjuk alkalmazni, mégpedig a projektív egyenesre, vagy annak egy szakaszára vonatkozóan.

Az egyenes-szakaszra vonatkozó DEDEKIND-*féle axióma* a következő:

Ha az AB egyenes-szakasz pontjait két $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ osztályba osztjuk, úgyhogy

1. *az AB szakasz minden pontja a két osztály közül egyikhez és csak egyikhez tartozik, s mindegyik osztály tartalmazza az AB szakasznak legalább egy-egy pontját;*

2. *az egyik osztály egy pontja sem választja el egymástól az AB szakaszon a másik osztály két pontját,*

akkor van az AB szakasznak egy olyan C pontja, mely elválasztja egymástól az AB szakaszon az $\mathfrak{A}$ és a $\mathfrak{B}$ osztály egy-egy tetszőleges, C-től különböző pontját.

Ebből levezethető *a projektív egyenesre vonatkozó* DEDEKIND-*féle axióma* (rövidített jelölése : **D**), melynek következő megfogalmazása megegyezik a sugársorra vonatkozó folytonossági tétellel (l. első kötet 272. o., 222. tétel) :

Ha az egyenes pontjait két $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ osztályba osztjuk, úgyhogy

1. *az egyenes minden pontja a két osztály közül egyikhez és csak egyikhez tartozik, s mindegyik osztályhoz tartozik az egyenesnek legalább két-két pontja;*

2. *az egyik osztályhoz tartozó bármely két pont nem választja el egymástól az egyenesen a másik osztály két pontját,*

akkor van az egyenesnek két olyan C és D pontja, mely elválasztja egymástól az egyenesen az $\mathfrak{A}$ és a $\mathfrak{B}$ osztály egy-egy tetszőleges, C-től és D-től különböző pontját.

Legyen ugyanis A és A' az $\mathfrak{A}$, B és B' a $\mathfrak{B}$ osztálynak két-két tetszőleges pontja. Mivel a 2. feltétel szerint az A, A' és B, B' pontpárok nem választják el egymást, fennáll az $(AA'BB')$, vagy az

$(AA'B'B)$ ciklikus elrendezés; feltehetjük az utóbbit, különben felcseréljük B-t és B'-t. Azon az AB szakaszon, mely tartalmazza az A' és B' pontokat, az $\mathfrak{A}$, illetve a $\mathfrak{B}$ osztályhoz tartozó pontok két olyan $\mathfrak{A}'$ és $\mathfrak{B}'$ osztályt alkotnak, melyek eleget tesznek az egyenes-szakaszra vonatkozó Dedekind-féle axióma feltételeinek. Van tehát egy a szeletalkotást meghatározó C pont, mely a nevezett AB szakasznak $A'B'$ rész-szakaszához tartozik, vagy annak végpontja. Hasonlóan, azon az $A'B'$ szakaszon, mely tartalmazza az A, B pontokat, az $\mathfrak{A}$, illetve a $\mathfrak{B}$ osztályhoz tartozó pontok egy Dedekind-féle szeletalkotást határoznak meg, s ezért létezik egy a szeletalkotást meghatározó D pont, mely az AB rész-szakaszhoz tartozik, vagy annak végpontja. A C és D pontok meghatározzák a projektív egyenesen megadott szeletalkotást.

Megfordítva, a projektív egyenesre vonatkozó Dedekind-féle axiómából közvetlenül következik az egyenes-szakaszra vonatkozó axióma.

Értelmezés. Az a egyenes valamely P pontjának *az a egyenesen való környezetén* értjük az a egyenes minden olyan AB szakaszát, melyhez hozzátartozik a P pont. Az a egyenesen fekvő *M ponthalmaznak sűrűsödési pontja* az a egyenes P pontja, ha P-nek minden az a egyenesen való környezete tartalmazza az M halmaznak legalább egy, P-től különböző pontját.

A Dedekind-féle axiómából az első kötet 217. tételének (267. o.) megfelelően levezethető a következő:

10.1. Tétel. *A projektív egyenesen bármely végtelen sok pontból álló ponthalmaznak van legalább egy sűrűsödési pontja.*

Bizonyítás. Legyen M az a egyenesen megadott, végtelen sok pontból álló halmaz, és legyen P az a egyenes olyan pontja, mely nem sűrűsödési pontja az M halmaznak. Az értelmezés szerint van akkor P-nek egy olyan környezete, azaz egy olyan APB szakasz, mely nem tartalmazza M-nek egy, P-től különböző pontját sem. Az a egyenesen a következő módon értelmezünk egy szeletalkotást: az APB szakasz AP rész-szakaszának pontjai s az A pont tartozzék az $\mathfrak{A}$ osztályhoz, a PB rész-szakasz pontjai s a P és B pont a $\mathfrak{B}$ osztályhoz; a P-t nem tartalmazó AB szakasz valamely X pontja tartozzék az $\mathfrak{A}$, illetve a $\mathfrak{B}$ osztályhoz, a szerint, hogy a PAX szakasz az M halmaznak legfeljebb véges sok, illetve végtelen sok pontját tartalmazza. A Dedekind-féle axióma feltételei teljesülnek, van tehát két, a szeletalkotást meghatározó pont; ezek közül az egyik P, a másikat jelöljük Q-val. A Q pont sűrűsödési pontja az M halmaznak. Legyen ugyanis A' az $\mathfrak{A}$, és B' a $\mathfrak{B}$ osztálynak egy-egy P-től és Q-tól különböző pontja. Az osztályok meghatározása szerint a Q pontot nem tartalmazó PA' szakaszon M-nek legfeljebb véges sok, a PQB' szakaszon pedig végtelen sok pontja van; az $A'QB'$ szakasz tehát tartalmazza az M halmaznak végtelen sok, s ezért legalább egy Q-tól különböző pontját. Ebből következik, hogy a Q pont sűrűsödési pontja az M halmaznak.

Értelmezés. Egy halmazt *kompakt*nak nevezünk, ha minden, végtelen sok elemből álló részhalmazának van legalább egy sűrűsödési pontja.

Ennek a fogalomnak a felhasználásával röviden így mondhatjuk ki a **10**.1 tételt:

A projektív egyenes kompakt halmaz.

Értelmezés. Azt mondjuk, hogy az a egyenesen fekvő $P_1, P_2, \dots$ pontok sorozata az a egyenes Q pontjához *konvergál*, ha minden, a Q pontot tartalmazó AQB szakasznak megfelel egy olyan n_0 egész szám, hogy a sorozatnak az összes, n_0-nál nagyobb indexű P_n pontjai az AQB szakaszhoz tartoznak. A sorozatot ebben az esetben *konvergens*nek, s a Q pontot *a sorozat limeszé*nek nevezzük.

Értelmezés. Az AB szakaszhoz tartozó $P_1, P_2, \dots$ pontok sorozatát *monoton*nak nevezzük, ha fennáll az $(AP_1P_2P_3\dots B)$, vagy a $(BP_1P_2P_3\dots A)$ ciklikus elrendezés.

A Dedekind-féle axiómából levezetjük a következő tételt:

10.2. *Bármely az AB szakaszhoz tartozó monoton pontsorozat konvergál az AB szakasz valamely pontjához, vagy végpontjához.*

Tegyük fel, hogy a $P_1, P_2, \dots$ monoton sorozatra az $(AP_1P_2P_3\dots B)$ elrendezés érvényes. Jelöljük AP_n-nel és P_nB-vel az AB szakasz AP^n, P_nB rész-szakaszait. Ha az AB szakasz bármely pontja valamely n-re az AP_n szakaszhoz, s ezért minden, n-nél nagyobb n'-re az $AP_{n'}$ szakaszhoz is tartozik, akkor a sorozat limesze B, az értelmezés szerint. Ha pedig van az AB szakasznak olyan pontja, mely egyik n-nél sem tartozik az AP_n szakaszhoz, az AB szakasznak ezek a pontjai egy $\mathfrak{B}$ osztályt, az AP_n $(n=1, 2, \dots)$ szakaszokhoz tartozó pontjai egy $\mathfrak{A}$ osztályt alkotnak, melyekre nézve teljesülnek az egyenes-szakaszra vonatkozó Dedekind-féle axióma feltételei. Van tehát az AB szakasznak egy olyan C pontja, mely ezt a szeletalkotást meghatározza. Ha

$A'B'$ a C pont tetszőleges környezete az AB szakaszon, akkor az A', B' pontok közül az egyik, például A' az $\mathfrak{A}$ osztályhoz, B' a $\mathfrak{B}$ osztályhoz tartozik. Ezeknek az osztályoknak a meghatározása szerint van tehát az $A'C$ szakaszon legalább egy P_n pont, s az összes n-nél nagyobb n' indexű $P_{n'}$ pont a P_nB szakaszhoz tartozik. Viszont a CB szakaszhoz nem tartozik egy $P_{n'}$ pont sem, tehát a $P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots$ pontok valamennyien az $A'C$ szakaszhoz tartoznak. Ebből következik, hogy a P_n sorozat a C ponthoz konvergál.

Értelmezés. Az egyenesnek önmagára, vagy egy másik egyenesre való kölcsönösen egyértelmű leképezését a P pontban *folytonos*nak nevezzük, ha teljesül a következő feltétel : a P pont képpontjának, P'-nek tetszőleges környezetéhez megadható a P pontnak olyan környezete, melynek képe a P' pont megadott környezetéhez tartozik (l. első kötet 269. o.).

Az első kötet 269. oldalán bebizonyított 220. tétel a projektív egyenes leképezéseire is érvényes. E szerint :

10.3. Tétel. *Az egyenesnek önmagára, vagy egy másik egyenesre való kölcsönösen egyértelmű leképezése, mely megtartja a rendezést, folytonos.*

Bizonyítás. Legyen P az egyenes tetszőleges pontja, P' ennek az adott leképezésnél származó képe. A P' pont környezete minden olyan $A'B'$ szakasz, mely tartalmazza a P' pontot ; az A', B' pontoknak a leképezés inverzénél megfelelő pontok legyenek A és B. Az APB szakasz bármely Q pontjára az $(APQB)$, vagy az $(AQPB)$ elrendezés, ezért Q képpontjára, Q'-re az $(A'P'Q'B')$, vagy az $(A'Q'P'B')$ elrendezés érvényes, s így Q' a P' pontnak megadott $A'P'B'$ környezetéhez tartozik. Tehát a leképezés folytonos az egyenes minden P pontjában.

A folytonos leképezések értelmezéséből közvetlenül következik :

10.4. *Egy $P_1, P_2, \ldots$ konvergens pontsorozatnak minden, kölcsönösen egyértelmű folytonos leképezésnél egy ugyancsak konvergens $P'_1, P'_2, \ldots$ pontsorozat felel meg, melynek limesze P' a $P_1, P_2, \ldots$ sorozat P limeszének a leképezésnél származó képe.*

Ha ugyanis $A'P'B'$ a P' pont tetszőleges környezete, a leképezés folytonossága miatt van a P pontnak egy olyan APB környezete, melynek képe az $A'P'B'$ környezethez tartozik. Mivel a $P_1, P_2, \ldots$ sorozat limesze P, az APB környezet tartalmazza az összes elegendő nagy indexű P_n pontot, s ezért a P' pont tetszőlegesen felvett $A'P'B'$

környezete tartalmazza az összes elegendő nagy indexű P'_n pontot, vagyis a P'_n sorozat a P' ponthoz konvergál. A tétel és a fenti bizonyítás általánosabban is érvényes.

A DEDEKIND-féle axióma alapján bebizonyítjuk a következő lemmát:

10.5. Lemma. *Ha egy egyenesnek önmagára való kölcsönösen egyértelmű és a rendezést megtartó leképezésénél egy AB szakasz önmagába, vagy egy részébe megy át, akkor ennek a szakasznak valamely pontja vagy végpontja fixpont, azaz önmagába megy át a leképezésnél.*

Bizonyítás. A következő meggondolásban szakaszon mindig az AB szakasz rész-szakaszát értjük. Jelöljük A és B képét A'-vel és B'-vel, s tegyük fel, hogy sem A' nem esik egybe A-val, sem B' B-vel; különben a tétel állítása nyilvánvaló volna. Az AB szakasz pontjait két $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ osztályba osztjuk a következő előírás szerint. Ha P az AB szakasz olyan pontja, melynek képe P' a PB szakaszon, s az AP szakasz bármely Q pontjának Q' képe a QB szakaszon fekszik, akkor P az $\mathfrak{A}$ osztályhoz, ellenkező esetben a $\mathfrak{B}$ osztályhoz tartozik. Az értelmezés folytán, ha P az $\mathfrak{A}$ osztály tetszőleges pontja, akkor az AP szakasz valamennyi pontja az $\mathfrak{A}$ osztályhoz tartozik, s ha R a $\mathfrak{B}$ osztály tetszőleges pontja, akkor az RB szakasz valamennyi pontja $\mathfrak{B}$-hez tartozik; az egyenes-szakaszra vonatkozó DEDEKIND-féle axióma 2. feltétele tehát teljesül. Az AB szakasz bármely pontja vagy az $\mathfrak{A}$, vagy a $\mathfrak{B}$ osztályhoz tartozik; azt kell még igazolni, hogy mindegyik osztályhoz tartozik legalább egy-egy pont.

Ha a leképezés megtartja az egyenes irányítását (l. **4**.6), akkor az A', B' pontok elrendezése az AB szakaszon $AA'B'B$. Ebben az esetben A' az $\mathfrak{A}$, és B' a $\mathfrak{B}$ osztályhoz tartozik. Legyen ugyanis P az AA' szakasz tetszőleges pontja, és P' a P pont képe. Mivel a leképezés megtartja a rendezést, P' az $A'B'$ szakasznak pontja, s így az AB szakaszra vonatkozó APA' és $AA'P'$ lineáris elrendezésből következik az APP' elrendezés. Mivel A' képe A'' az $A'B'$ szakasznak pontja, fennáll az $AA'A''$ elrendezés. — Hasonlóan adódik, hogy B' a $\mathfrak{B}$ osztályhoz tartozik. Ebben az esetben továbbá az $\mathfrak{A}$ osztály bármely P pontjának P' képe is $\mathfrak{A}$-hoz, s $\mathfrak{B}$ bármely pontjának képe $\mathfrak{B}$-hez tartozik. Legyen ugyanis P az $\mathfrak{A}$ osztály valamely pontja, és P' a P pont képe; P-re és P'-re fennáll az $AA'P$ és APP' elrendezés; a P' pont P'' képére következik az $A'P'P''$, s ezekből az $AP'P''$ elrendezés. Ha Q az AP' szakasz tetszőleges pontja, ez vagy az AP

szakasznak pontja, vagy végpontja, s ezért az $\mathfrak{A}$ osztályhoz tartozik; vagy pedig Q a PP' szakaszhoz, Q képe Q' a $P'P''$ szakaszhoz tartozik, s ezért fennáll az AQQ' elrendezés. Ezzel igazoltuk, hogy az $\mathfrak{A}$ osztály bármely P pontjának P' képe is az $\mathfrak{A}$ osztályhoz tartozik. Hasonlóan látható be, hogy a $\mathfrak{B}$ osztály minden pontjának képe $\mathfrak{B}$-hez tartozik. — Legyen C a szelet-alkotást meghatározó pont, és C' ennek a képe. Az AC szakasz képe, az $A'C'$ szakasz, a fentiek szerint $\mathfrak{A}$-hoz, s a $B'C'$ szakasz $\mathfrak{B}$-hez tartozik. Ebből következik, hogy C' azonos az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ szeletalkotást meghatározó C ponttal, vagyis, hogy C fixpont a leképezésnél.

Ha a leképezés megfordítja az irányítást, legyen P az AB szakasz tetszőleges olyan pontja, mely képétől, P'-től különbözik. Az (APB) és $(A'P'B')$ irányítások feltevésünk szerint ellenkezők. Ha tehát P'' jelenti a P' pont képét, akkor az AB szakaszon a PP' és $P'P''$ szakaszok ellenkező irányúak; ha például fennáll az APP' elrendezés, akkor az A, P', P'' pontok elrendezése $AP''P'$, s viszont az $AP'P$ elrendezésből következik $AP'P''$. Ha tehát P az $\mathfrak{A}$ osztályhoz tartozik, akkor képe P' a $\mathfrak{B}$ osztályhoz, s *feltéve, hogy P nem fixpont,* megfordítva is: ha P a $\mathfrak{B}$ osztályhoz, akkor P' az $\mathfrak{A}$ osztályhoz tartozik. Van tehát mindegyik osztálynak legalább egy-egy pontja, s a két osztálynak azok a pontjai, melyek nem fixpontok, egymásnak felelnek meg a leképezésnél. Ebből, mint fent, következik, hogy van egy, a szeletalkotást meghatározó C pont, s hogy ez fixpont a leképezésnél. Mivel az AC és BC szakasznak a leképezésnél az $A'C$ és $B'C$ szakasz felel meg, s AC és $A'C$ a C pontnak különböző oldalán fekszik, s ugyanúgy a BC és a $B'C$ szakasz is, ebből következik, hogy *C az egyetlen fixpont.* Ezzel a fenti lemmát bebizonyítottuk.

A DEDEKIND-féle axióma alapján, nevezetesen a fenti lemma alkalmazásával bebizonyítjuk a **9.**6 tétel következő megfordítását:

10.6. Tétel. *Ha C, C' és D, D' az egyenesen olyan pontpárok, melyek nem választják el egymást, akkor létezik egy közös harmonikus A, B pontpár.*

Bizonyítás. Jelöljük $\mathbf{J}$-vel és $\mathbf{J}'$-vel a C, C', illetve a D, D' fixpontokra vonatkozó harmonikus involuciót. Az egyenesnek a C, C', illetve a D, D' pontpár által meghatározott, s a másik pontpárt nem tartalmazó szakaszát nevezzük CC', illetve DD' szakasznak. A DD' szakasz a $\mathbf{J}$ leképezésnél egy, a CC' szakasz belsejében fekvő szakaszba, s ez a $\mathbf{J}'$ leképezésnél egy, a DD' szakasz belsejében fekvő szakaszba megy át. A $\mathbf{J}\mathbf{J}'$ leképezés tehát a DD' szakaszt egy rész-szakaszába viszi át, s ezért a fenti lemma szerint van legalább egy A fixpontja a DD' szakaszon. Ez másszóval azt jelenti, hogy az A pontnak a $\mathbf{J}$ és a $\mathbf{J}'$ involuciónál ugyanaz a B képpont felel meg, vagyis, hogy *A és B a C, C' pontpárt is, a D, D' pontpárt is harmonikusan választja el.*

10.7. Megjegyzés. Az egyenesre, azaz a pontsorra vonatkozó fenti tárgyalásunk átvihető a többi elsőfajú elemi alakzatra : a sugársorra és a síksorra, azáltal, hogy az a egyenesen fekvő pontsort egy, a-hoz nem tartozó pontból, illetve egy, a-t nem metsző egyenesről vetítjük ; a vetítésnél egymásnak megfelelő elemek segítségével értelmezhetjük a sugársorban és a síksorban egy elem környezetét, valamely, az illető elsőfajú alakzat elemeiből álló halmaz sűrűsödési elemét, egy sorozat limeszét, egy leképezés folytonosságát stb. — Hangsúlyozzuk azonban, hogy a sugársorra és a síksorra vonatkozóan nem szükséges a Dedekind-féle axiómának megfelelő új axiómát bevezetni; ha az egyenesre vonatkozóan feltesszük a Dedekind-féle axiómát, ebből már következik a többi elsőfajú elemi alakzat megfelelő folytonossága, mivel a vetítés és a metszés megtartja az elsőfajú elemi alakzatok rendezését ($\mathbf{C}$ axióma, 12. o.).

Tárgyalásunkban az elsőfajú elemi alakzatok közül csak a pontsorral, vagyis az egyenessel foglalkozunk részletesen. A megállapított eredményeket, s a levezetésben alkalmazott módszereket is közvetlenül átvihetjük a sugársorra és a síksorra. Ezért, *ha valamely más elsőfajú elemi alakzatra vonatkozó tételt akarunk majd alkalmazni, a pontsorra vonatkozó megfelelő tételre fogunk hivatkozni, esetleg a nélkül, hogy a másik alakzatot illető tételt megfogalmaznók.*

II. Az egyenes projektív geometriája.

11. §. Harmonikus pontrendszerek.

További tárgyalásunk alapjai a **P I, II** *és* **D** *axiómák.*

Értelmezés. Ha P_0, P_1, U egy egyenes három különböző pontja, a P_0, P_1, U pontok által származtatott *harmonikus sorozat*on a következő pontsorozatot értjük:

$$P_0, P_1, P_2 = (P_1, U)/P_0, \; P_3 = (P_2, U)/P_1, \ldots, P_n = (P_{n-1}, U)/P_{n-2}, \ldots$$

Vegyük figyelembe, hogy a fenti értelmezésben más-más a P_0, a P_1 és az U pont szerepe. Például a P_1, P_0, U pontok által származtatott harmonikus sorozat a következő:

$$P_1, P_0, \; P_{-1} = (P_0, U)/P_1, \ldots, P_{-n} = (P_{-n+1}, U)/P_{-n+2}, \ldots$$

A fenti két sorozat egyesítéséből a

$$\ldots, P_{-n}, \ldots, P_{-1}, P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$$

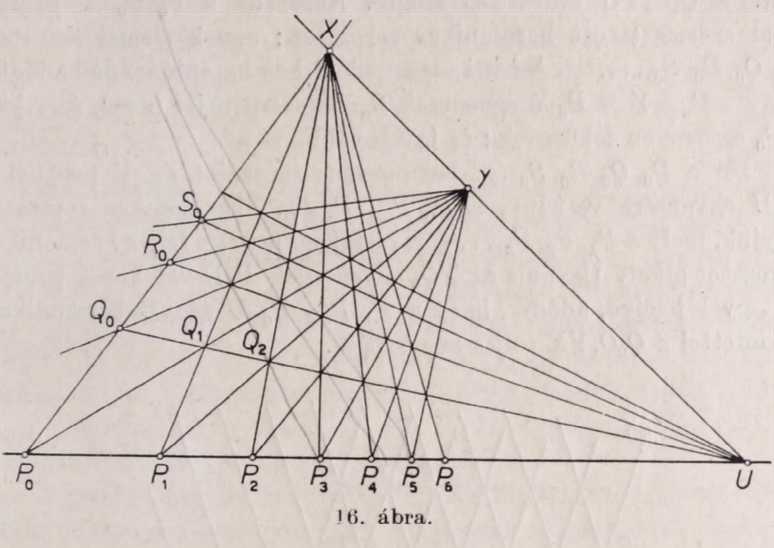
sorozatot kapjuk, melyet a P_0, P_1, U pontok által származtatott *teljes harmonikus sorozat*nak nevezünk.

Értelmezés. Az egyenes három különböző pontja által meghatározott *harmonikus pontrendszer*en értjük a következő pontok összességét: a három adott pont közül vegyük mindegyiknek a másik kettőre vonatkozó harmonikus párját; a három adott pont s ez újabb három pont alkotta összesség mindegyik pontjának bármely más két pontjára vonatkozó harmonikus párját csatoljuk az előbbi pontok összességéhez; az így kibővített pontösszességben ismételjük ugyanezt az eljárást, és így tovább.

Harmonikus pontsorozatok és pontrendszerek szerkesztésére a MÖBIUS-*féle hálózat* szolgál. Legyen P_0, P_1, U az egyenes három megadott pontja. Felveszünk egy X pontot, mely nem tartozik a P_0U egyeneshez; az XP_1 egyenes valamely Q_1 pontját összekötjük U-val;

a P_0Q_1 és UX egyenesek metszéspontja legyen Y (16. ábra). A P_1Y és Q_1U egyenesek metszéspontja Q_2; XQ_2 és P_0U metszéspontja P_2; P_2Y és Q_1U metszéspontja Q_3; XQ_3 és P_0U metszéspontja P_3; és így tovább.

A Q_1Q_2YX teljes négyszögnek átlóspontjai P_1 és U, s a további két oldalhoz tartoznak a P_0 és P_2 pontok, tehát P_0, P_2, P_1, U harmonikus pontnégyes. Hasonlóan P_1, P_3, P_2, U is harmonikus pont-



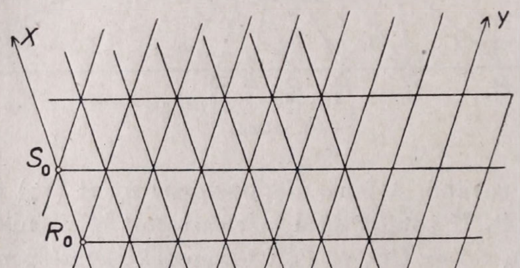
16. ábra.

négyes, és így tovább. A fenti szerkesztéssel nyert (P_n) pontsorozat e szerint a P_0, P_1, U pontok által származtatott harmonikus sorozat.

Jelöljük Q_0-val az UQ_1 és P_0X egyenesek metszéspontját. Az X pontból való vetítésnél a $P_0, P_1, P_2, \ldots$ pontsorozatnak a Q_0U egyenesen a $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ pontsorozat felel meg, ez tehát a Q_0, Q_1, U pontok által származtatott harmonikus sorozat. Jelöljük R_2-vel a P_0Y és P_2X egyenesek metszéspontját, és R_1-gyel az UR_2 és P_1X egyenesek metszéspontját. Mivel az R_1R_2YX teljes négyszögnek átlóspontjai Q_1 és U, a további két oldal közül pedig az egyik: XR_2 átmegy a Q_2 ponton, következik, hogy a másik oldal: YR_1 átmegy a $Q_0 = (Q_1, U)/Q_2$ ponton. A fenti szerkesztést, mellyel a P_0, P_1, U pontok által származtatott harmonikus sorozatot szerkesztettük, ismételjük meg olyan módon, hogy P_0 és P_1 helyébe a Q_0 és Q_1, továbbá Q_1 helyébe az R_1 pontot léptetjük; az X, Y, U pontok szerepét változatlanul hagyjuk. Ennek a szerkesztésnek eredményeként megállapítjuk, hogy az R_1U egyenesnek a Q_0Y, Q_1Y, Q_2Y,... egyenesekkel való R_1, R_2, R_3,... metszéspontjai rendre az XQ_1, XQ_2, XQ_3,... egyenesekhez tartoznak. E szerint a P_nX és $P_{n-2}Y$ egyenesek R_n metszéspontjai (n=2, 3, 4,...) egy, az U ponton átmenő egyenesen feküsznek. Ennek az egyenesnek a P_0X egyenessel közös pontját jelöljük R_0-val.

A P_0, R_0, Q_0, X pontok harmonikus négyest alkotnak, tekintettel a Q_1R_1YU teljes négyszögre. Képezzük a P_0, Q_0, X pontok által származtatott harmonikus sorozatot ; ennek elemei legyenek P_0, Q_0, R_0, S_0,.... — A fenti meggondoláshoz hasonló módon adódik, hogy a $P_{n-3}Y$ és P_nX egyenesek S_n metszéspontjai (n=3, 4,...) az US_0 egyenesen feküsznek ; és így tovább.

Ha a P_0, Q_0, R_0, S_0,... harmonikus sorozatot az Y pontból a P_0U egyenesre vetítjük, a P_0, P_{-1}, P_{-2},... harmonikus sorozatot kapjuk, mely a P_1, P_2, P_3,... sorozattal együtt egy teljes harmonikus sorozatot alkot. Ugyanis az YQ_0 egyenesnek P_0U-val közös pontját P_{-1}-gyel jelölve, adódik, hogy a P_1, P_{-1}, P_0, U négyes harmonikus, tekintettel a Q_0Q_1YX teljes négyszögre.



17. ábra.

M e g j e g y z é s. A fenti eljárással szerkesztett hálózatnak az affin síkban egy parallelogramma-, illetve háromszög-hálózat felel meg, ha feltesszük, hogy X, Y és U végtelen távoli pontok, s ennek megfelelően XU a sík végtelen távoli egyenese ; ezt tünteti fel a 17. ábra.

11.1. Tétel. *A* (P_n) $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *teljes harmonikus sorozatban minden* P_n *pont az* U *pontnak a* P_{n+k}, P_{n-k} *pontokra vonatkozó harmonikus párja* $(k \neq 0$, tetszőleges egész szám).

Bizonyítás. A P_n, P_{n+4}, P_{n+2}, U pontok harmonikus négyest alkotnak, tekintettel az $R_{n+2}R_{n+4}YX$ teljes négyszögre. A P_n, P_{n+6}, P_{n+3}, U pontnégyes is harmonikus, tekintettel az $S_{n+3}S_{n+6}YX$ teljes négyszögre, és így tovább.

11.2. Ez a tétel módot ad arra, hogy egy teljes harmonikus sorozatból ritkítással, vagy újabb pontok közbeiktatásával más harmonikus sorozatokat állítsunk elő. Például, *ha* (P_n) *egy teljes harmonikus sorozat, és* a, b *tetszőleges egész számok* $(b \neq 0)$, *akkor* (P_{a+nb}) $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *is teljes harmonikus sorozat.*

11.3. Jelöljük $P_{(2n+1)/2}$-vel az U pontnak a P_n, P_{n+1} pontokra vonatkozó harmonikus párját ; a **11.1** tétel szerint $(P_{n/2})$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ is teljes harmonikus sorozat. Jelöljük $P_{(2n+1)/4}$-gyel az U pontnak a $P_{n/2}, P_{(n+1)/2}$ pontokra vonatkozó harmonikus párját, $P_{(2n+1)/8}$-cal U-nak a $P_{n/4}, P_{(n+1)/4}$ pontokra vonatkozó harmonikus párját, és így tovább. Minden k-ra a $(P_{n/2^k})$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sorozat teljes harmonikus sorozat. Az ilyen módon meghatározott $P_{n/2^k}$ pontokat az egyenesnek a P_0, P_1, U alappontokra vonatkozó *diadikus racionális pontjai*nak nevezzük.

A fenti hálózatszerkesztést folytassuk olyképpen, hogy az összes eddig felvett pontokat páronkint egyenessel összekötjük, s az összes így nyert egyenesek közül kettő-kettőnek a metszéspontját vesszük, és így tovább. Ezzel az eljárással kapjuk a *teljes* Möbius-*féle hálózatot*, melyet a P_0, P_1, U, X, Y pontok, vagy másként a P_0, U, X, Q_1 hármankint nem egy egyenesen fekvő pontok meghatároznak. A teljes hálózatnak a P_0U egyeneshez tartozó pontjai, vagyis a hálózat egyeneseinek a P_0U egyenessel való metszéspontjai megadják a P_0, P_1, U pontok által meghatározott *harmonikus pontrendszert*, amint azt fent értelmeztük.

A Dedekind-féle axióma alapján bebizonyítjuk a következő tételt, mely az Archimedes-*féle axiómá*nak a projektív geometriára alkalmazott megfogalmazása :

11.4. Tétel. *Ha* P_0, P_1, C, U *egy egyenes négy tetszőleges pontja, melynek elrendezése* (P_0P_1CU), *akkor a* P_0, P_1, U *pontok által származtatott harmonikus sorozatban van olyan* P_n *pont, melyre a* (P_0CP_nU) *elrendezés áll fenn.*

B i z o n y í t á s. Nevezzük P_0U *szakasz*nak a projektív egyenesnek azt, a P_0, U pontok által meghatározott szakaszát, mely tartalmazza a P_1 pontot ; ha A és B ennek a szakasznak két tetszőleges pontja, akkor AB *szakasz*nak nevezzük, következő meggondolásunkban, a P_0U szakasznak az A, B pontok által meghatározott részszakaszát. A $P_0, P_1, P_2, \ldots$ pontokra fennáll a $(P_0P_1P_2\ldots U)$ elrendezés, tehát a sorozat monoton a P_0U szakaszon. A tétel állítása az, hogy ennek a monoton sorozatnak a limesze az U pont. Az ellenkezőt téve fel, a $P_0, P_1\ldots$ monoton sorozat a P_0U szakasz valamely D pontjához konvergálna (**10**.2) ; a DU szakasz nem tartalmazza a (P_n) sorozat egy pontját sem, de minden olyan CU szakasz, melynek C végpontja a P_0D szakaszhoz tartozik, tartalmazza a sorozatnak legalább egy pontját. Legyen D' az U pontnak a P_0, D pontokra vonatkozó harmonikus párja ; D' a P_0D szakaszhoz tartozik, s ezért a (P_n) sorozatban van olyan P_n pont, mely a $D'U$ szakaszhoz tartozik. A **11**.1 tétel szerint a P_0, P_{2n}, P_n, U pontnégyes harmonikus ; a D', U, D, P_0 és a P_n, U, P_{2n}, P_0 négyesekre alkalmazzuk a **9**.7 tételt ; a $(D'P_nUP_0)$ elrendezésből e szerint következik a $(DP_{2n}UP_0)$ elrendezés, vagyis, hogy P_{2n} a DU szakaszhoz tartozik, D-re vonatkozó feltevésünkkel ellentétben.

Ugyancsak a Dedekind-féle axióma alapján bizonyítjuk be a következő tételt :

11.5. L ü r o t h—Z e u t h e n-féle t é t e l. *Az egyenes három tetszőleges, egymástól különböző pontja által meghatározott harmonikus pontrendszer az egyenesen mindenütt sűrű, vagyis az egyenesnek bármely szakasza tartalmazza a rendszernek legalább egy pontját.*

B i z o n y í t á s. Tegyük fel, hogy a tétel állításával ellenkezően, az egyenes valamely FG szakasza nem tartalmazza a megadott (P) harmonikus rendszer egy pontját sem. Legyen Q ennek a szakasznak egy pontja ; az egyenes pontjait két $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ osztályra osztjuk fel a következő előírás szerint : valamely X pont a $\mathfrak{B}$, illetve az $\mathfrak{A}$ osztályhoz tartozik, a szerint, hogy van, vagy nincs a (P) rendszernek két olyan pontja, mely elválasztja egymástól Q-t és X-et. A Dedekind-féle axióma folytán van az egyenesen a szeletalkotást meghatározó két F', G' pont ; az $F'QG'$ szakasz nem tartalmazza a (P) pontrendszer egy pontját sem, de minden olyan $F''G''$ szakasz, melynek része az $F'QG'$ szakasz, tartalmazza a (P) pontrendszernek legalább egy pontját. Jelöljük az F' és G' pontot ismét F-fel és G-vel.

Ha az F, G pontok közül valamelyik, például G a (P) rendszernek pontja, jelöljük P_0-val és P_1-gyel a (P) rendszer két olyan pontját, melyekre a (P_0P_1FG) elrendezés áll fenn. A P_0, P_1, G pontok által meghatározott harmonikus sorozat a (P) rendszernek része, mivel G is (P)-hez tartozik ; ebben a sorozatban a **11**.4 tétel szerint van olyan P_n pont, melyre a (P_0FP_nG) elrendezés áll fenn. Tehát az F, G pontok által meghatározott két szakasz közül mindegyiken van a (P) rendszernek legalább egy-egy pontja, ellentétben az F, G pontok meghatározásával.

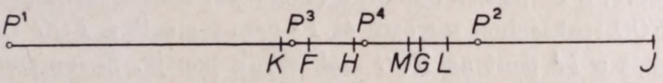
Feltesszük tehát, hogy sem F, sem G nem tartozik (P)-hez. Legyen P^1 a (P) rendszernek valamely pontja, s legyen

$$H = (F, G)/P^1,$$

és

$$J = (P^1, G)/F.$$

P^1 nem tartozik az FQG szakaszhoz, ezért H az FQG szakaszhoz, J pedig az FP^1G szakaszhoz tartozik. Azt, a P^1, J pontok által meghatározott szakaszt, mely tartalmazza az F, G pontokat, nevezzük P^1J *szakasznak*. A továbbiakban tekintetbe jövő összes pontok ehhez a szakaszhoz tartoznak, s így szakaszon következő meggondolásunkban mindig a P^1J szakasz rész-szakaszát értjük (18. ábra).



18. ábra.

A G pont meghatározásából következik, hogy a GJ szakaszon van a (P) rendszernek legalább egy P^2 pontja. A P^2 pontnak a P^1, H pontokra vonatkozó harmonikus párja legyen K, azaz :

$$K = (P^1, H)/P^2.$$

Mivel a P^1, H fixpontokra vonatkozó harmonikus involuciónál a P^2, G pontoknak rendre a K, F pontok felelnek meg, a (P^1P^2GH) ciklikus elrendezésből következik a (P^1KFH) ciklikus elrendezés. Az F pont meghatározása folytán van a KF szakaszon a (P) rendszernek legalább egy P^3 pontja ; legyen

$$L = (P^1, H)/P^3.$$

Mivel a P^1, H fixpontokra vonatkozó harmonikus involuciónál a KF szakasz pontjainak a P^2G szakasz pontjai felelnek meg, az L pont a P^2G szakaszhoz tartozik. Az összes eddigi pont elrendezése a fentiek szerint: $(P^1KP^3FHGLP^2J)$.

Legyen
$$M = (P^3, J)/P^1.$$

Mivel P^1, G, F, J és P^1, M, P^3, J harmonikus pontnégyesek, a **9**.7 tétel szerint a (P^1P^3FJ) elrendezésből következik a (P^1MGJ) elrendezés. A P^1, H, P^3, L és P^1, M, P^3, J harmonikus pontnégyesekre a **9**.7 tétel szerint a (P^1P^3LJ) elrendezésből következik a (P^1P^3HM) elrendezés. A fentiek szerint tehát *H és M az FG szakasz pontjai*, s elrendezésük $(FHMG)$.

Jelöljük végül P^4-gyel a P^1 pontnak a P^2, P^3 pontokra vonatkozó harmonikus párját:
$$P^4 = (P^2, P^3)/P^1.$$

Mivel a P^1, P^2, P^3 pontok a (P) rendszerhez tartoznak, P^4 is a (P) rendszernek pontja.

A **9**.7 tétel alkalmazásával a P^1, H, P^3, L és a P^1, P^4, P^3, P^2 harmonikus pontnégyesekre, a $(P^1P^3LP^2)$ elrendezésből következik a $(P^1P^3HP^4)$, továbbá a P^1, M, P^3, J és P^1 P^4, P^3, P^2 harmonikus pontnégyesekre a $(P^1P^3P^2J)$ elrendezésből a $(P^1P^3P^4M)$ elrendezés. Ezeket egybevetve, a P^4 pontra adódik a (P^1HP^4M) elrendezés. Mivel H és M az FQG szakaszhoz tartozik és P^1 nem tartozik a FQG szakaszhoz, tehát a P^4 pont az FQG szakasznak pontja. Ez az eredmény azonban ellentmond az FQG szakasz felvételének. Ezzel a **11**.5 tételt bebizonyítottuk.

A **11**.5 tétel bizonyításának csekély módosításával igazolhatjuk a következő tételt:

11.6. *Az egyenesnek a P_0, P_1, U pontokra vonatkozó diadikus racionális pontjai az egyenesen mindenütt sűrű halmazt alkotnak.*

A fenti bizonyításban vegyük fel ugyanis U-t, mint P^1 pontot, P^2 és P^3 legyenek diadikus racionális pontok; ekkor $P^4=(P^2, P^3)/U$ is diadikus racionális pont.

Projektív koordináta az egyenesen.

11.7. A fenti eredmény módot ad az egyenesen egy projektív koordináta meghatározására a P_0, P_1, U alappontokra vonatkozóan. Rendeljük hozzá minden, a P_0, P_1, U pontokra vonatkozó $P_{a/2^n}$ diadikus racionális ponthoz (a és $n \geq 0$ egész számok) az $x=a/2^n$ koordinátát. Ha az x, x', x'' diadikus racionális számok nagyság szerint való elrendezése $x<x'<x''$, akkor a megfelelő $P_x, P_{x'}, P_{x''}$ pontokra és az U pontra a $(P_x P_{x'} P_{x''} U)$ ciklikus elrendezés érvényes és megfordítva. Írjuk fel ugyanis az x, x', x'' számokat közös nevezővel:

$$x=\frac{a}{2^n},\quad x'=\frac{a'}{2^n},\quad x''=\frac{a''}{2^n}\quad (a<a'<a'');$$

a $P_0, P_{1/2^n}, U$ pontok által származtatott harmonikus sorozatban a $P_{a/2^n}$ és $P_{a''/2^n}$ pontokat elválasztják egymástól a $P_{a'/2^n}$ és U pontok.

Mivel a diadikus racionális pontok az egyenesen mindenütt sűrű halmazt alkotnak (**11**.6), az egyenes minden, U-tól különböző P pontjához egyértelműen hozzárendelhetünk egy x valós számot a következő módon. Legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ azoknak a diadikus racionális pontoknak az összessége, melyek a P és U pontok által meghatározott egyik, illetve másik szakaszhoz tartoznak. Az ezekhez tartozó koordináták a diadikus racionális számok összességében két olyan $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ osztályt alkotnak, melyek eleget tesznek a Dedekind-féle szeletalkotás feltételeinek. A valós számok halmazának folytonossága szerint ennek a szeletalkotásnak megfelel egy és csak egy x valós szám; ezt rendeljük hozzá a P ponthoz mint koordinátát. Közvetlenül belátható, hogyha a P, P', P'' pontok x, x', x'' koordinátájának nagyság szerint való elrendezése $x<x'<x''$, akkor a $(PP'P''U)$ ciklikus elrendezés áll fenn, és megfordítva.

Az ilyen módon meghatározott x koordinátát *a P_0, P_1, U alappontokra vonatkozó projektív koordinátá*nak nevezzük.

12. §. A projektív vonatkozások alaptétele.

Az elsőfajú elemi alakzatok projektív leképezései, mint perspektív leképezések szorzatai, megtartják a ciklikus rendezést (**4**.1) és a harmonikus elválasztásokat (**9**.4). Meg fogjuk vizsgálni, mely folytonossági axiómák alapján jellemezhetők a projektív leképezések ezekkel a tulajdonságokkal.

A Dedekind-féle axióma alapján bebizonyítjuk a következő tételt:

12.1. Staudt—Darboux-féle tétel. *Az egyenesnek minden önmagára való, a harmonikus elválasztásokat megtartó egyértelmű leképezése, melynél három különböző fixpont van, az azonosság.*

Bizonyítás. Legyen A, B, C az egyenes három különböző pontja, mely fixpont a **T** leképezésnél. Mivel **T** megtartja a harmonikus elválasztásokat, a három pont közül bármelyiknek a másik kettőre vonatkozó harmonikus párja is fixpont. Ezt a meggondolást folytatva arra az eredményre jutunk, hogy *az A, B, C pontok által meghatározott harmonikus pontrendszer minden pontja fixpont.* A LÜROTH—ZEUTHEN-féle tétel (**11**.5) szerint ez a harmonikus pontrendszer az egyenesen mindenütt sűrű. Ha feltennők, hogy a **T** leképezés megtartja a rendezést, ebből már következnék, hogy az egyenes minden pontja fixpont. A következő, DARBOUX-tól származó levezetés független ettől a feltevéstől.

Ha Q az egyenes olyan pontja, mely **T**-nél egy tőle különböző Q' pontba megy át, akkor a **11**.5 tétel szerint van az A, B, C pontok által származtatott harmonikus pontrendszernek legalább egy-egy pontja a projektív egyenesnek a Q, Q' pontok által meghatározott mindkét szakaszán. Legyen A_1, B_1, C_1 a harmonikus rendszernek három olyan pontja, melyeknek a Q, Q' pontokkal való ciklikus elrendezése $(A_1QB_1Q'C_1)$. Mivel az A_1, Q és B_1, C_1 pontpárok nem választják el egymást, a **10**.6 tétel értelmében megadható ezekhez egy közös harmonikus pontpár: X, Y. Legyen X' és Y' az X és Y pont képe. Mivel a leképezés megtartja a harmonikus elválasztásokat, az A_1, Q, X, Y harmonikus pontnégyesnek megfelelő A_1, Q', X', Y' pontnégyes harmonikus, s ugyanúgy a B_1, C_1, X, Y-nak megfelelő B_1, C_1, X', Y' pontnégyes is. E szerint az X', Y' pontpár közös harmonikus párja volna az A_1, Q' és a B_1, C_1 pontpárnak; de mert az A_1, Q' és B_1, C_1 pontpárok elválasztják egymást, tekintettel az $(A_1B_1Q'C_1)$ elrendezésre, ez ellentmond a **9**.6 tételnek. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Ha a **12**.1 tételben feltesszük azt is, hogy a leképezés kölcsönösen egyértelmű, s megtartja a ciklikus rendezést, a tételt ugyancsak a DEDEKIND-féle axióma alapján, de egyszerűbb eszközökkel bizonyíthatjuk be a következő meggondolással, melyben nem használjuk fel sem a LÜROTH—ZEUTHEN-féle tételt, sem a közös harmonikus párra vonatkozó **9**.6 és **10**.6 tételt.

Legyen A, B, C az egyenes három pontja, melyek fixpontok a **T** leképezésnél, s legyen P^0 olyan pont, mely különbözik képétől, P^1-től. Mivel a leképezés, feltevésünk szerint, megtartja a rendezést, az egyenesnek az az A, B pontok által meghatározott szakasza, mely nem tartalmazza a C pontot, önmagába megy át, azaz e szakasz minden pontjának képe ugyanehhez a szakaszhoz tartozik. Tegyük fel, hogy a P^0 pont, s ezért a P^1 pont is ehhez az AB szakaszhoz tartozik, vagyis, hogy fennáll az (AP^0BC), s ezért az (AP^1BC) elrendezés is. Tegyük fel továbbá, hogy az A, B, P^0, P^1 pontok elrendezése (AP^0P^1B). Jelöljük P^n-nel P^0-nak a **T** leképezés n-edik hatványánál származó képét. Az (AP^0P^1B) elrendezésből következik az (AP^1P^2B), $(AP^2P^3B), \ldots$ elrendezés. Tehát a $P^0, P^1, P^2, \ldots$ pontok az AB szakaszon monoton sorozatot képeznek, s ezért a sorozatnak van egy E limesze, mely vagy az AB szakaszhoz tartozik, vagy egybeesik a B ponttal (**10**.2). Mivel **T** megtartja a rendezést, a **10**.3 tétel szerint folytonos, s ezért az E pont **T**-nél önmagába megy át ; ugyanis a $P^0, P^1, P^2, \ldots$ sorozatnak **T**-nél a $P^1, P^2, P^3, \ldots$. sorozat felel meg, s ennek limesze ugyancsak E. Jelöljük P^{-n}-nel a P^0 pont képét **T** inverzének n-edik hatványánál ; a $P^0, P^{-1}, P^{-2}, \ldots$ sorozat is monoton, s limesze F, mely vagy az AB szakaszhoz tartozik, vagy A-val azonos, fixpont a **T** leképezésnél. Az EP^0F szakasz egyik pontja sem fixpont a **T** leképezésnél ; ugyanis a P^n pontok nem fixpontok ; az EP^0F szakasz minden más pontja pedig valamelyik P^nP^{n+1} rész-szakaszhoz tartozik, s ennek a szakasznak nincs közös pontja képével, a $P^{n+1}P^{n+2}$ szakasszal. Viszont a C fixpontnak az E, F fixpontokra vonatkozó harmonikus párja, mely az EP^0F szakaszhoz tartozik, szintén fixpontja **T**-nek ; ez ellenmondás.

Ha a **12**.1 tételben feltesszük, hogy a leképezés megtartja a rendezést, akkor a Dedekind-féle axióma helyett elegendő az Archimedes-féle axiómát (**11**.4) alkalmaznunk ; lásd erre vonatkozóan **108**.1.

A **12**.1 tétel alapján a szakasz elején felvetett kérdésnek következő megoldását kapjuk :

12.2. Tétel. *Ha az egyenesre vonatkozóan teljesül a* Dedekind-*féle folytonossági axióma, akkor az egyenesnek bármely önmagára, vagy egy másik egyenesre való egyértelmű leképezése, mely megtartja a harmonikus elválasztásokat, projektív leképezés, azaz perspektív leképezések összetételéből származtatható.*

Bizonyítás. Legyen **T** az a egyenesnek az a' egyenesre való egyértelmű, s a harmonikus elválasztásokat megtartó leképezése. Az a egyenes három tetszőleges A, B, C pontjának képe legyen A', B', C'. A **3**.1 tétel szerint van a'-nak a-ra olyan **T'** projektív leképezése, mely az A', B', C' pontnak rendre az A, B, C pontot felelteti meg. A **T** leképezésnek **T**'-vel való **TT**' szorzata a-nak olyan egyértelmű leképezése önmagára, mely megtartja a harmonikus elválasztásokat, s melynek fixpontjai A, B, C. A **12**.1 tétel szerint **TT**' az azonos leképezés, s ezért az adott **T** leképezés megegyezik a **T**' projektív leképezés inverzével, azaz **T** is kölcsönösen egyértelmű, projektív leképezés.

A **12**.2 tételből a projektív alapműveletek alkalmazásával levezetjük a következő tételt :

12.3. Tétel. *Ha az egyenesre vonatkozóan teljesül a* Dedekind-*féle folytonossági axióma, akkor két elsőfajú elemi alakzatnak bármely olyan kölcsönösen egyértelmű vonatkozása, mely megtartja a harmonikus elválasztásokat, projektív, azaz perspektív leképezések összetételéből származtatható.*

Bizonyítás. A két elsőfajú elemi alakzat közül mindegyiket, mely nem pontsor, messük egy pontsorral ; a metszésnél megmaradnak a harmonikus elválasztások, s így a megadott vonatkozásnak megfelel a két pontsor között egy, a harmonikus elválasztásokat ugyancsak megtartó, kölcsönösen egyértelmű vonatkozás. Ez a **12**.2 tétel folytán projektív vonatkozás ; tehát a két elsőfajú alakzat megadott vonatkozása is projektív.

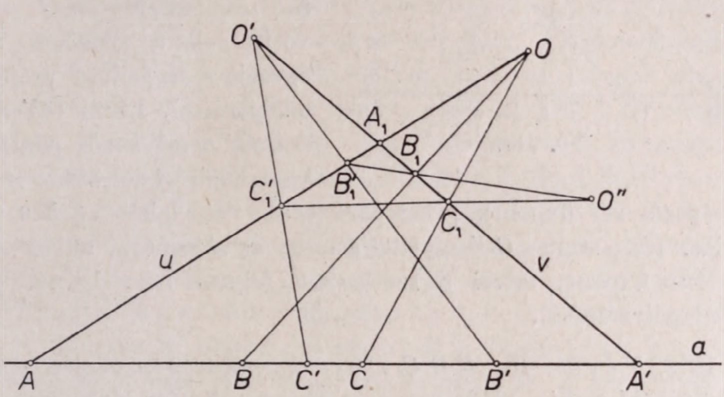
12.4. Megjegyzés. Az **5**.5 tételt eredetileg a kettősviszony alkalmazásával, vagyis az euklidesi geometria egybevágósági axiómái alapján bizonyítottuk be. A **9**.4 és **12**.1 tételből következik, hogy *az* **5**.5 *tétel a kettősviszony fogalma nélkül levezethető a projektív geometria összetartozási és rendezési axiómáiból s a* Dedekind-*féle axiómából.* Ugyanez érvényes az **5**.6, **5**.7 és **6**.1—**6**.10 tételekre, melyeket ott az **5**.5 tétel alapján vezettünk le.

13. §. Az egyenes önmagára való projektív leképezései.

A projektív geometria összetartozási és rendezési axiómái, valamint a Dedekind-féle folytonossági axióma alapján fogjuk tárgyalni az egyenes önmagára való projektív leképezéseit.

13.1. Tétel. *Az a egyenes minden önmagára való projektív leképezése előállítható három perspektív leképezés szorzataként, melyek közül az elsőnél a egy őt metsző v egyenesbe, a másodiknál v egy őt és a-t metsző u egyenesbe, s a harmadiknál u az a egyenesbe megy át.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítása közvetve adódik a **6**.7 tételből, mely szerint két, egy síkban fekvő egyenes projektív vonatkozása két perspektív leképezés szorzataként állítható elő. Közvetlen bizonyítása a következő. Legyen A, B, C az a egyenes három tetszőleges pontja, A', B', C' ezeknek az adott **T** leképezésnél származó képe. Fektessünk át az A ponton egy u, s az A' ponton egy v egyenest, melyek egymást egy A_1 pontban metszik. Legyen O az u-nak, O' a v-nek egy-egy, az A, A', A_1 pontoktól különböző pontja (19. ábra).

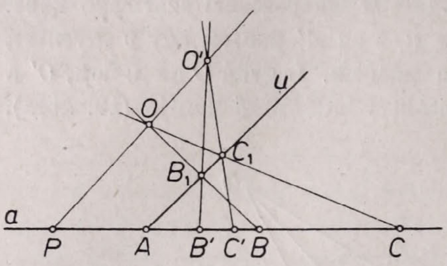


19. ábra.

Az OB és OC egyenesnek v-vel közös pontját jelöljük B_1-gyel és C_1-gyel, az $O'B'$ és $O'C'$ egyenesnek u-val közös pontját B_1'-vel és C_1'-vel; legyen O'' a B_1B_1' és C_1C_1' egyenesek metszéspontja. Vetítsük a-t O-ból a v egyenesre, ezt O''-ből u-ra, s az utóbbit O'-ből a-ra; az így származó projektív leképezésnél az A, B, C pontnak rendre az A', B', C' pont felel meg, ugyanúgy, mint a **T** leképezésnél. Az **5**.5 tétel szerint tehát a két leképezés azonos egymással.

13.2. Tétel. *Az a egyenes olyan projektív leképezése önmagára, melynek van egy A fixpontja, előállítható egy, A-n átmenő u egyenessel való két perspektív vonatkozás szorzataként. A két perspektív vonatkozás O és O' középpontját összekötő OO' egyenes vagy egy, A-tól különböző pontban metszi az a egyenest, s ez a pont a leképezés másik fixpontja; vagy az A ponton megy át, s ez esetben A az egyetlen fixpont.*

Bizonyítás. Legyen u egy tetszőleges másik, az A ponton átmenő egyenes. Felvesszük az a egyenes két másik B és C pontját, s ezeknek képét, a B' és C' pontot. Legyen O az a, u egyeneseken átmenő síknak olyan pontja, mely sem a-hoz, sem u-hoz nem tartozik. Az OB és OC egyenesnek u-val közös pontját jelöljük B_1-gyel és C_1-gyel ; a $B'B_1$ és $C'C_1$ egyenesek metszéspontját pedig O'-vel (20. ábra). Az O pontból vetítsük a-t u-ra ; az A, B, C pontnak rendre A, B_1, C_1 felel meg ; u-nak az O' pontból az a egyenesre való vetítésénél az A, B_1, C_1 pontnak rendre A, B', C' felel meg. Az **5**.5 tétel szerint ennek a két vetítésnek a szorzata megegyezik a megadott projektív leképezéssel. Ha az OO' egyenesnek a-val közös pontja, P különbözik A-tól, akkor A és P a leképezés két fixpontja ; kettőnél több nem lehet az **5**.6 tétel szerint. Ha pedig az OO' egyenes átmegy az A ponton, akkor A az egyetlen fixpont, mivel a szerkesztés folytán bármely más pont különbözik képétől.



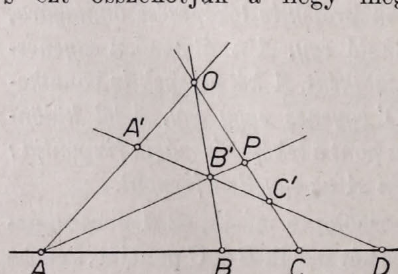
20. ábra.

13.3. T é t e l. *Ha A, B, C, D az a egyenes négy tetszőleges, egymástól különböző pontja, akkor van az a egyenesnek négy olyan önmagára való projektív leképezése* (az azonosságot is számítva), *mely ezeket a pontokat egymásba viszi át, mégpedig az A, B, C, D pontnak rendre a következőket felelteti meg:*

$$A, B, C, D\ ; \quad B, A, D, C\ ; \quad C, D, A, B\ ; \quad D, C, B, A.$$

Ha van az egyenesnek még más olyan projektív leképezése, melynél az A, B, C, D pontok egymásba mennek át, akkor ezek közül a pontok közül kettő a másik kettőt harmonikusan választja el.

B i z o n y í t á s. Felveszünk egy O pontot az a egyenesen kívül s ezt összekötjük a négy megadott ponttal (21. ábra). Az OB egyenesen felveszünk egy O-tól és B-től különböző B' pontot ; a DB' egyenesnek az OA és OC egyenessel közös pontja legyen A' és C' ; AB'-nek OC'-vel közös pontja P. Vetítsük az a egyenest O-ból a DA' egyenesre, ezt A-ból az OC egyenesre, s az utóbbit B'-ből az a egyenesre. Az A, B,



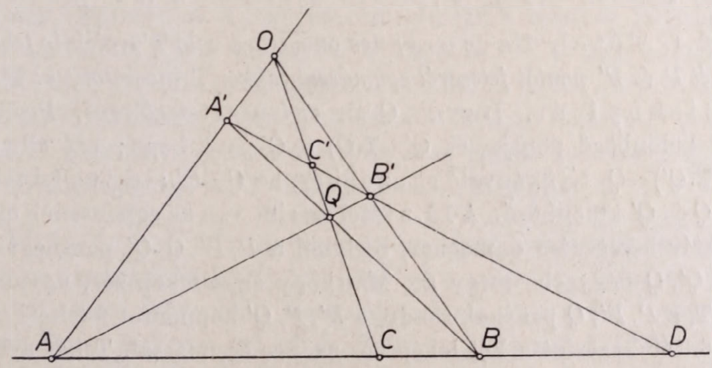
21. ábra.

C, D pontnak ezeknél a vetítéseknél rendre a következők felelnek meg:

$$A', B', C', D\,;\quad O, P, C', C\,;\quad B, A, D, C.$$

E szerint van az a egyenesnek olyan $\mathbf{T}_1$ projektív leképezése önmagára, mely az A, B, C, D pontnégyest a B, A, D, C négyesbe viszi át. Alkalmazzuk ezt az eredményt az A, C, B, D négyesre; van tehát egy olyan $\mathbf{T}_2$ leképezés, melynél ez a négyes a C, A, D, B négyesbe, vagyis A, B, C, D a C, D, A, B négyesbe megy át. A $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ (s ugyanúgy a $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$) leképezés az A, B, C, D négyest a D, C, B, A négyesbe viszi át.

Ha a $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ leképezéseken kívül van az egyenesnek még egy, az azonosságtól különböző $\mathbf{T}$ leképezése, mely az A, B, C, D pontokat egymásba viszi át, feltehetjük, hogy C fixpont a $\mathbf{T}$ leképezésnél; ellenkező esetben ugyanis szorozzuk meg $\mathbf{T}$-t a $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ leképezések közül azzal, mely C-nek $\mathbf{T}$-nél származó képét C-be viszi át, s ezt a szorzatot jelöljük ismét $\mathbf{T}$-vel. Válasszuk meg a többi három pont jelölését, úgyhogy C és D elválassza egymástól az A, B pontokat. Mivel $\mathbf{T}$ megtartja a ciklikus rendezést, s az A, B, D pontokat egymásba viszi át, következik, hogy C-vel együtt D is fixpontja $\mathbf{T}$-nek, s mivel $\mathbf{T}$ nem az azonosság, A és B egymásba megy át. A bizonyítás első részében alkalmazott jelöléseket megtartva, vetítsük az O pontból az



22. ábra.

A, B, C, D pontokat az A', B', C', D pontokba; a $\mathbf{T}$ leképezésnek ezzel a vetítéssel való szorzatánál az A, B, C, D pontnak rendre a B', A', C', D pont felel meg. Az AD és $A'D$ egyeneseknek ez a projektív vonatkozása perspektív, mivel D fixpont, s így az AB', BA', CC' egyenesek egy Q ponton mennek át (22. ábra). E szerint az $OA'QB$

teljes négyszögnek átlóspontjai A és B, s további két oldala átmegy a C és D ponton, vagyis A, B, C, D harmonikus pontnégyes. Ebben az esetben A, B, C, D a tételben felsoroltakon kívül a következő négy pontnégyesbe is átvihető az a egyenes önmagára való projektív leképezéseivel:

$$B, A, C, D; \quad A, B, D, C; \quad C, D, B, A; \quad D, C, A, B.$$

Értelmezés. Az egyenes önmagára való projektív leképezését *elliptikus*nak, *parabolikus*nak vagy *hiperbolikus*nak nevezzük a szerint, hogy a fixpontok száma 0, 1, vagy 2. (Kettőnél több fixpont nem lehet az **5**.6 tétel szerint.)

14. §. Involuciók.

Értelmezés. Az egyenes önmagára való **T** projektív leképezését n-periódusúnak nevezzük, ha **T**-nek n-edik hatványa az azonos leképezés: $\mathbf{T}^n = \mathbf{I}$, de a $\mathbf{T}, \mathbf{T}^2, \ldots, \mathbf{T}^{n-1}$ hatványok különböznek az azonosságtól. Ha $n=2$, akkor a leképezést *involutorius leképezés*nek vagy *involució*nak nevezzük és **J**-vel jelöljük.

Ha az egyenes önmagára való **J** involutorius leképezésénél a P pont egy tőle különböző P' pontba, akkor P' a P pontba megy át; ezt úgy fejezzük ki, hogy **J** *felcseréli egymással a P és P' pontot.*

14.1. Tétel. *Ha az a egyenes önmagára való* **T** *projektív leképezése két P és P' pontot felcserél egymással, akkor* **T** *involutorius:* $\mathbf{T}^2 = \mathbf{I}$.

Bizonyítás. Legyen Q az egyenes tetszőleges, P-től és P'-től különböző pontja, és $Q' = \mathbf{T}(Q)$ a Q pont képe; azt állítjuk, hogy $\mathbf{T}(Q') = Q$. Nyilvánvaló ez az állítás, ha $Q = Q'$; tegyük fel tehát, hogy Q és Q' különböző. A **13**.3 tétel szerint van az egyenesnek olyan projektív leképezése önmagára, melynél a P, P', Q, Q' pontnégyes a P', P, Q', Q négyesbe megy át. Minthogy ez a leképezés, ugyanúgy mint **T**, a P, P', Q pontnak rendre a P', P, Q' képpontot felelteti meg, az **5**.5. tétel szerint a két leképezés azonos egymással. Tehát a **T** leképezésnél is Q' a Q pontba megy át, s így **T** involutorius. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Ha a **J** involutorius leképezés felcseréli egymással a P és P' pontot, akkor a P, P' pontok által meghatározott két szakasz vagy önmagába, vagy egymásba megy át. Ha a két szakasz egymásba megy át, legyen Q az egyiknek egy pontja, Q' ennek a képe; fennáll a $(PQP'Q')$ ciklikus elrendezés. Mivel a (PQP') és $(P'Q'P)$ irányítások megegyezők, tehát a leképezés megtartja az egyenes irányítását. A leképezésnek nincs fixpontja, tehát **J** *elliptikus involució.*

Ha a **J** involutorius leképezésnél a P, P' pontok egymásba s az általuk meghatározott két szakasz önmagába megy át, akkor a leképezés megfordítja az egyenes irányítását. Ha ugyanis Q tetszőleges, P-től és P'-től különböző pont, és Q' a Q pont képe, akkor a (PQP') és $(P'Q'P)$ ponthármasok, melyek **J**-nél egymásba mennek át, az egyenes ellenkező irányítását határozzák meg. A **10**.5 lemma szerint mindegyik PP' szakaszon van a leképezésnek egy-egy A és B fixpontja, tehát a **J** leképezés *hiperbolikus involució.* Jelöljük a P pontnak az A, B pontokra vonatkozó harmonikus párját Q'-vel, s legyen $Q=\mathbf{J}(Q')$ a Q' pontnak **J**-nél származó képe. Az A, B, P, Q' harmonikus pontnégyesnek a **J** leképezésnél az $A, B, P'\ Q$ harmonikus négyes felel meg, mivel **J** megtartja a harmonikus elválasztásokat. A **J** leképezés megfordítja az egyenes irányítását, s ezért fennáll az $(APBP')$ elrendezés ; a P és Q' pontokat az A, B pontpár harmonikusan választja el, tehát fennáll az $(APBQ')$ elrendezés is. Ebből következik, hogy P' és Q' ugyanahhoz az AB szakaszhoz tartozik. Azt állítjuk, hogy Q' egybeesik P'-vel ; az ellenkezőt téve fel, legyen elrendezésük például $(AP'Q'B)$. A **9**.6 tétel szerint a P', Q' pontoknak az A, B pontokra vonatkozó Q, P harmonikus párjára fennáll az $(AQPB)$ elrendezés. Másrészt a **J** leképezés megtartja a ciklikus rendezést, s ezért az $(AP'Q'B)$ elrendezésből a képpontok $(APQB)$ elrendezése következnék ; ez ellenmondás. Ezzel bebizonyítottuk, hogy **J** *az* A, B *fixpontokra vonatkozó harmonikus involució,* mely minden P pontnak az A, B pontokra vonatkozó harmonikus párját felelteti meg.

Eredményünket a következő tételben mondjuk ki :

14.2. Tétel. *Az egyenes minden olyan involuciója, mely megtartja az egyenes irányítását, elliptikus, azaz nincs fixpontja. Az egyenes minden olyan involuciója, mely megfordítja az egyenes irányítását, hiperbolikus, azaz van két A és B fixpontja, s az A, B fixpontokra vonatkozó harmonikus involucióval azonos.*

Ha A, A', B, B' az a egyenes négy tetszőleges, egymástól különböző pontja, akkor van az a egyenesnek önmagára egy és csak egy olyan projektív leképezése, melynél az A, A', B pontnak rendre az A', A, B' pont felel meg (**5**.7 tétel) ; ez a leképezés egy **J** involució, mivel felcseréli az A és A' pontot (**14**.1 tétel). Ha az A, A' és B, B' pontpárok elválasztják egymást, akkor az (ABA') és $(A'B'A)$ irányítások, melyek **J**-nél egymásnak felelnek meg, megegyezők, s ezért **J** elliptikus involució. Ha pedig A, A' és B, B' nem választják el egymást, akkor az (ABA') és $(A'B'A)$ irányítások ellenkezők, s ezért **J** hiperbolikus involució.

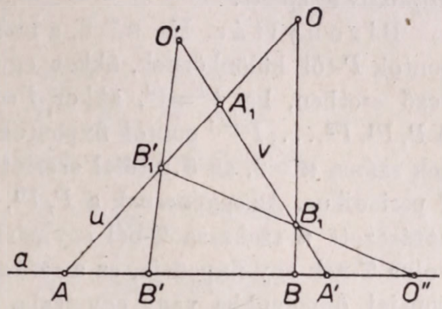
Ha az a egyenes A, A', B, B' pontjairól nem tesszük fel, hogy valamennyien különbözők, csak azt, hogy A és A' különbözik B-től és B'-től, akkor is van az a egyenesnek egy és csak egy olyan involuciója, melynél A és A' egymásnak, B és B' is egymásnak felel meg. Ha például A egybeesik A'-vel, de B és B' egymástól és A-tól különbözik, akkor van az a egyenesnek önmagára egy és csak egy olyan projektív leképezése, mely az A, B, B' pontnak rendre az A, B', B pontot felelteti meg; ez a leképezés egy **J** involució, mivel felcseréli a B és B' pontot. Ha pedig A egybeesik A'-vel, és B egybeesik B'-vel, de A különbözik B-től, akkor az A, B fixpontokra vonatkozó harmonikus involució az a egyenes egyetlen olyan involuciója, melynek fixpontjai A és B.

Ezeket az eredményeket a következő tételben foglaljuk össze:

14.3. Tétel. *Ha A, A', B, B' az a egyenes olyan pontjai, melyek közül A és A' B-től és B'-től különbözik, akkor van az a egyenesnek egy és csak egy olyan involuciója, mely A-t A'-vel, és B-t B'-vel felcseréli. Ez az involució akkor és csak akkor elliptikus, ha az A, A' és B, B' pontpárok elválasztják egymást, más esetben hiperbolikus.*

Megjegyzés. A **14**.3 tétel alapján a **10**.6 tétel következő, egyszerű bizonyítását kapjuk. Legyen C, C', D, D' az a egyenes négy tetszőleges, egymástól különböző pontja. Van az a egyenesnek egy és csak egy olyan projektív leképezése önmagára, mely a C, C', D pontnak rendre a C', C, D' pontot felelteti meg (**5**.7), ez a leképezés involutorius, mivel felcseréli C-t és C'-t (**14**.1), s ezért egymásba viszi át D-t és D'-t. A leképezés egy elliptikus vagy hiperbolikus involució, a szerint, hogy a C, C' és D, D' pontpárok elválasztják egymást vagy nem (**14**.3). Az utóbbi esetben a hiperbolikus involució fixpontjai a C, C' és D, D' pontpárok közös harmonikus pontpárját alkotják.

Annak a **J** involuciónak megszerkesztésére, mely az A pontot A'-vel és B-t B'-vel cseréli fel, alkalmazzuk a **13**.1 tételt, illetve a bizonyításában használt módszert. Vegyünk fel egy, az A ponton átmenő u, s egy, az A' ponton átmenő v egyenest, melyek egymást egy A_1 pontban metszik. Legyen O az u-nak, O' a v-nek egy-egy tetszőleges, az A, A', A_1 pontoktól különböző pontja. Az OB és $O'A'$ egyenesek B_1 metszéspontját kössük össze az $O'B'$ és OA egyenesek B_1' metszéspontjával, s jelöljük O''-vel a B_1B_1' egyenesnek az a egyenessel közös pontját (23. ábra). A **J** involuciót úgy állíthatjuk elő, hogy a-t az O pontból v-re, v-t O''-ből u-ra és u-t O'-ből a-ra vetítjük. Az általános projektív leképezések előállításától (**13**.1) az involuciók előállítása abban különbözik, hogy involutorius leképezés esetén az u és v közti perspektív vonatkozás O'' középpontja az a egyeneshez tartozik. A jelölések alkalmas megváltoztatásával ezt a következő tételben mondjuk ki:



23. ábra.

14.4. Tétel. *Ha az ABC háromszög bármely két oldala között egy-egy perspektív vonatkozást létesítünk, melynek középpontja a harmadik oldalon fekszik, akkor az AB és BC, a BC és CA, s a CA és AB oldalak közti perspektív vonatkozások szorzata az AB oldalnak önmagára való involutorius leképezését adja.*

Bizonyítás. Jelöljük O, O', O''-vel rendre az AC, BC, AB oldalnak egy-egy, az A, B, C pontoktól különböző pontját. Jelöljük $\mathbf{T}_1$-gyel az AB oldalnak a BC oldalra az O pontból, $\mathbf{T}_2$-vel BC-nek AC-re az O'' pontból és $\mathbf{T}_3$-mal AC-nek AB-re az O' pontból való vetítését. $\mathbf{T}_1$-nél az A pont C-be, $\mathbf{T}_2$-nél C önmagába, $\mathbf{T}_3$-nál C a B pontba megy át; tehát a $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3$ leképezésnél az A pont képe B. $\mathbf{T}_1$-nél B önmagába, $\mathbf{T}_2$-nél A-ba, s $\mathbf{T}_3$-nál A önmagába megy át; tehát a $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3$ leképezésnél a B pont képe A. Ebből a **14**.1 tétel szerint következik, hogy $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3 = \mathbf{J}$ egy involució. Jelöljük Q-val az OO' egyenesnek az AB oldallal közös pontját. Az O'' és Q pont **J**-nél egymásnak felel meg, mint könnyen belátható. A **14**.3 tétel szerint tehát a **J** *involució elliptikus vagy hiperbolikus, a szerint, hogy az OO' egyenesnek az AB egyenessel való Q metszéspontját az O'' ponttól elválasztja, vagy nem választja el az A, B pontpár.*

A **14**.1 tétel következő általánosítása jellemzi az egyenes periodikus projektív leképezéseit:

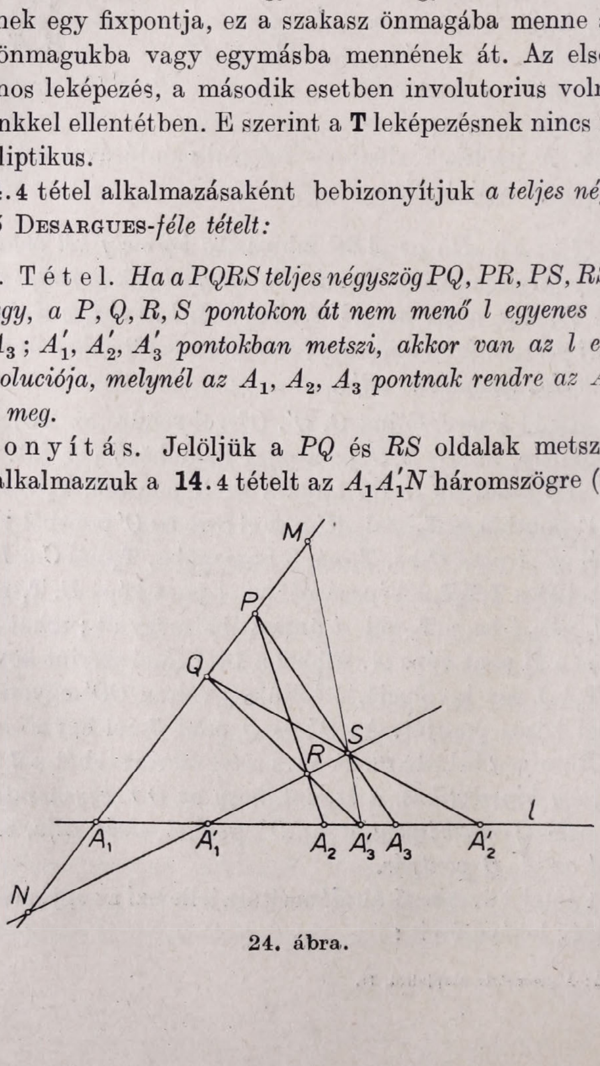
14.5. Tétel. *Ha az egyenes önmagára való* **T** *projektív leképezésénél a P pont egy tőle különböző P^1 pontba, s* **T** *valamelyik hatványánál önmagába megy át, akkor* **T** *periodikus, s ha periodusa $n > 2$, akkor elliptikus leképezés.*

Bizonyítás. Ha $n > 2$, s ha a $P^1 = \mathbf{T}(P), \ldots, P^{n-1} = \mathbf{T}^{n-1}(P)$ pontok P-től különböznek, akkor egymástól is különböznek; ellenkező esetben, ha $P^k = P^l$, akkor $P = \mathbf{T}^{-k}(P^k) = \mathbf{T}^{-k}(P^l) = P^{l-k}$ $(k < l)$. A $P, P^1, P^2, \ldots, P^{n-1}$ pontok fixpontok a $\mathbf{T}^n$ leképezésnél, s mivel ezeknek száma $n > 2$, az **5.6** tétel szerint $\mathbf{T}^n$ az azonosság: $\mathbf{T}^n = \mathbf{I}$, azaz **T** periodikus. Az egyenesnek a $P, P^1, P^2, \ldots, P^{n-1}$ pontok által meghatározott n szakasza **T**-nél egymásba megy át. Ha valamelyiken volna **T**-nek egy fixpontja, ez a szakasz önmagába menne át, s végpontjai önmagukba vagy egymásba mennének át. Az első esetben **T** az azonos leképezés, a második esetben involutorius volna (**14.1**), feltevésünkkel ellentétben. E szerint a **T** leképezésnek nincs fixpontja, azaz **T** elliptikus.

A **14.4** tétel alkalmazásaként bebizonyítjuk *a teljes négyszögekre vonatkozó* DESARGUES-*féle tételt:*

14.6. Tétel. *Ha a $PQRS$ teljes négyszög PQ, PR, PS, RS, QS, QR oldalait egy, a P, Q, R, S pontokon át nem menő l egyenes rendre az A_1, A_2, A_3; A_1', A_2', A_3' pontokban metszi, akkor van az l egyenesnek olyan involuciója, melynél az A_1, A_2, A_3 pontnak rendre az A_1', A_2', A_3' pont felel meg.*

Bizonyítás. Jelöljük a PQ és RS oldalak metszéspontját N-nel, s alkalmazzuk a **14.4** tételt az $A_1 A_1' N$ háromszögre (24. ábra).



24. ábra.

Az A_1N oldal P pontjából vetítsük az l egyenest az A'_1N, vagyis az RS oldalra, ezt az A'_3 pontból az A_1N, vagyis a PQ oldalra, s az utóbbit S-ből az l egyenesre ; a három perspektív leképezést jelöljük sorban $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$-mal ; ezeknek $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3=\mathbf{J}$ szorzata az l egyenesnek egy involuciója a **14.4** tétel szerint. Mivel

$$\mathbf{T}_1\text{-nél}: \quad A_1 \to N, \quad A_2 \to R, \quad A_3 \to S,$$ [1]

$$\mathbf{T}_2\text{-nél}: \quad N \to N, \quad R \to Q, \quad S \to M,$$

ahol M jelenti az A'_3S és PQ egyenesek metszéspontját, és

$$\mathbf{T}_3\text{-nál}: \quad N \to A'_1, \quad Q \to A'_2, \quad M \to A'_3,$$

ezért

$$\mathbf{J}\text{-nél}: \quad A_1 \to A'_1, \quad A_2 \to A'_2, \quad A_3 \to A'_3.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A **14.6** tételből következik, hogy az A_1, A'_1 és A_2, A'_2 pontpárok és az A_3 pont egyértelműen meghatározzák az l egyenes A'_3 pontját, mint az A_3 pont képét annál az involuciónál, mely A_1-et A'_1-vel és A_2-t A'_2-vel felcseréli. Ebben a meghatározásban szimmetrikus az A_1 és A'_1 pont szerepe (s ugyanúgy A_2 és A'_2-é). Ezzel egy a **8.4** tétel tárgyalásakor függőben maradt kérdést intéztünk el, mely arra vonatkozik, hogy egy teljes négyszögnek az l egyenessel való metszéspontjai közül öt pont mennyiben határozza meg a hatodik pontot. Az ottan (34. o.) felvetett kérdésre a felelet a következő : az $(A_1, A_2, A_3 ; A'_1, A'_2)$ és az $(A'_1, A_2, A_3 ; A_1, A'_2)$ pontcsoport ugyanazt az A'_3 hatodik pontot határozza meg. Ezt az eredményt, amelyet a DEDEKIND-féle axióma felhasználásával, nevezetesen a **12.1** tétel alapján bizonyítottunk be, így mondhatjuk ki :

14.7. Tétel. *Ha $A_1, A_2, A_3 ; A'_1, A'_2$ az l egyenes olyan pontjai, melyek közül bármely két, nem egyenlő indexű pont különbözik egymástól, akkor ezek egyértelműen meghatározzák az l egyenes egy A'_3 pontját a következő értelemben: bármely olyan teljes négyszögnek, melynek két-két átellenes oldalához tartozik az A_1 és A'_1, illetve az A_2 és A'_2 pont, s ötödik oldalához az A_3 pont, a hatodik oldala átmegy az A'_3 ponton.*

Ennek a tételnek speciális esete a **8.4** tétel, melyben a **14.7** tétel feltételein kívül még azt is feltesszük, hogy a teljes négyszögnek az A_1, A_2, A_3 pontokon áthaladó oldalai egy pontban (a teljes négyszög egyik csúcsában) metszik egymást.

[1] $A_1 \to N$ azt jelenti, hogy az A_1 pont N-be megy át.

15. §. Az egyenes hiperbolikus és parabolikus leképezései.

15.1. Tétel. *Az egyenesnek minden olyan projektív leképezése önmagára, mely megfordítja az irányítást, hiperbolikus, azaz van két fixpontja.*

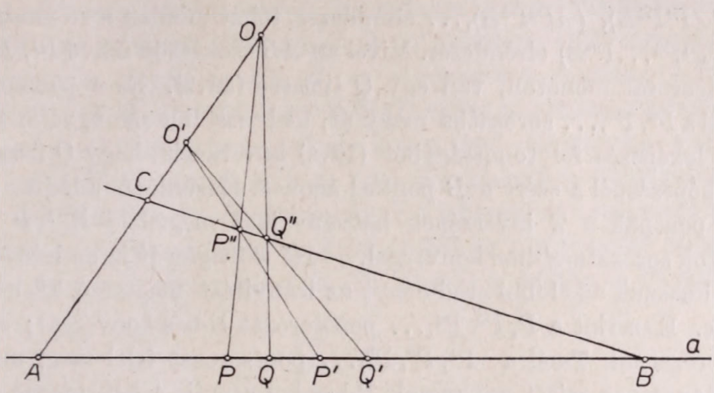
Bizonyítás. Legyen A az a egyenesnek olyan pontja, mely képétől, az A' ponttól különbözik; legyen A'' az A' pont képe. Feltehetjük, hogy A'' különbözik A-tól, különben a leképezés hiperbolikus involució (**14.**1, 2). Mivel a leképezés feltevés szerint megfordítja az egyenes irányítását, az $(AA'A'')$ irányításnak az ezzel ellenkező $(A'AA'')$ irányítást felelteti meg, s ezért az A'' pontot tartalmazó $AA''A'$ szakaszt ennek $A'A''$ rész-szakaszába viszi át. A **10.**5 lemma szerint tehát van a leképezésnek egy fixpontja azon az $A'A''$ szakaszon, mely nem tartalmazza az A pontot. Hasonlóan, az inverz leképezésnél az $A'AA''$ szakasz ennek AA' rész-szakaszába megy át, s így ezen a szakaszon is van egy fixpontja a leképezésnek. A leképezés tehát hiperbolikus.

15.2. Tétel. *Ha A, B, P, P' az a egyenes négy tetszőleges, egymástól különböző pontja, van egy és csak egy olyan hiperbolikus leképezése az a egyenesnek önmagára, melynél A és B önmagába, és a P pont P'-be megy át.*

Ugyanis az **5.**7 tétel szerint van az a egyenesnek önmagára egy és csak egy olyan projektív leképezése, mely az A, B, P pontnak rendre az A, B, P' pontot felelteti meg. Ez a hiperbolikus leképezés megfordítja vagy megtartja az egyenes irányítását, a szerint, hogy A, B és P, P' pontpárok elválasztják egymást, vagy nem.

15.3. Tétel. *Ha az A, B fixpontokkal bíró* **T** *hiperbolikus leképezésnél a P pont P'-be, s a Q pont Q'-be megy át, akkor van egy és csak egy olyan hiperbolikus leképezés, melynek fixpontjai ugyancsak A és B, s melynél a P pont Q-ba, P' pedig Q'-be megy át.*

Bizonyítás. (25. ábra.) Felveszünk az A ponton át egy, AB-től különböző egyenest, s ezen két, egymástól és A-tól különböző O, O' pontot; az OP és $O'P'$ egyenesek P'' metszéspontját összekötjük B-vel. Az O pontból vetítjük az AB egyenest a BP'' egyenesre, s ez utóbbit az O' pontból az AB egyenesre. A két vetítés összetételéből származó projektív leképezésnél az A és B pont önmagába, P pedig P'-be megy át; ez a leképezés tehát a megadott **T** hiperbolikus leképezés. Mivel feltevésünk szerint **T**-nél a Q pont Q'-be megy át, ezért az OQ és $O'Q'$ egyenesek Q'' metszéspontja a BP'' gyenesen fekszik. Jelöljük C-vel az AO és BP'' egyenesek metszés ontját. Az AB egyenest vetítsük a P'' pontból az AO egyenesre; az A, B, P, P' pontoknak rendre az A, C, O, O' pontok felelnek meg.



25. ábra.

Vetítsük az AO egyenest Q''-ből az AB egyenesre; az A, C, O, O' pontoknak az A, B, Q, Q' pontok felelnek meg. A két vetítés összetételéből származó leképezés tehát hiperbolikus, fixpontjai A és B, s ez a leképezés a P pontot Q-ba, P'-t Q'-be viszi át.

A most bebizonyított tételt másképpen így mondhatjuk ki:

15.4. Tétel. *Ha* **S** *és* **T** *ugyanazokhoz az A, B fixpontokhoz tartozó hiperbolikus leképezések, akkor felcserélhetők egymással, azaz:* **ST**=**TS**.

Bizonyítás. Legyen ugyanis P az egyenes tetszőleges, a fixpontoktól különböző pontja, legyen továbbá $\mathbf{T}(P)=P'$ és $\mathbf{S}(P)=Q$ a P pontnak ezeknél a leképezéseknél származó képe, és $Q'=\mathbf{T}(Q)$ a Q pont képe **T**-nél. A **15**.3 tétel szerint az **S** leképezésnél, mely az A, B, P pontokat az A, B, Q pontokba viszi át, a P' pont képe Q'. E szerint a P pont az **ST** és a **TS** leképezésnél egyaránt Q'-be megy át, s így **ST** azonos **TS**-sel.

15.5. Tétel. *Ha a* **T** *hiperbolikus leképzés nem involutorius, akkor bármely, a fixpontoktól különböző P pontnak* **T** *hatványainál származó képei az egyik fixponthoz,* **T** *inverzének hatványainál származó képei a másik fixponthoz konvergálnak.*

Bizonyítás. Legyen A és B a **T** leképezés két fixpontja, s P egy ezektől különböző pont. Tegyük fel, hogy $\mathbf{T}$ megtartja az irányítást, akkor P képe, P^1 az APB szakaszhoz tartozik; feltehetjük, hogy fennáll az (APP^1B) elrendezés. Jelöljük P^n-nel a P pont képét $\mathbf{T}$ n-edik hatványánál: $\mathbf{T}^n$-nél; az (APP^1B) elrendezésből következik az (AP^1P^2B), (AP^2P^3B),... elrendezés, tehát minden n-re fennáll az $(APP^1P^2...P^nB)$ elrendezés. Mivel az AB szakaszon fekvő $P^1, P^2,...$ pontsorozat monoton, van egy Q limesze (**10**.2). Ez a pontsorozat $\mathbf{T}$-nél a $P^2, P^3,...$ sorozatba megy át, melynek limesze ugyancsak Q; a $\mathbf{T}$ leképezés folytonosságából (**10**.3) következik, hogy Q fixpont a $\mathbf{T}$ leképezésnél s ezért a B ponttal azonos. Hasonlóan adódik, hogy a P pontnak a $\mathbf{T}$ inverzének hatványainál megfelelő $P^{-1}, P^{-2},...$ pontok sorozata A-hoz konvergál. — Ha $\mathbf{T}$ megfordítja az irányítást, alkalmazzuk az előbbi eredményt az irányítást megtartó $\mathbf{T}^2$ leképezésre. E szerint a $P, P^2, P^4,...$ pontsorozat B-hez konvergál; ennek a sorozatnak $\mathbf{T}$-nél a $P^1, P^3, P^5,...$ pontsorozat felel meg, mely $\mathbf{T}$ folytonossága miatt ugyancsak B-hez konvergál. A két sorozat egyesítéséből származó (nem monoton) $P, P^1, P^2, P^3,...$ sorozatnak tehát szintén B a limesze. Hasonló meggondolás szerint a $P^{-1}, P^{-2}, P^{-3},...$ sorozat A-hoz konvergál.

A **15**.2 és **15**.4 tételek összefoglalása a következő:

15.6. Tétel. *Az a egyenesnek az A, B fixpontokhoz tartozó hiperbolikus leképezései kommutatív csoportot alkotnak, mely az egyenesen az A, B fixpontok kivételével egyszeresen tranzitív; azaz bármely két, A-tól és B-től különböző P és P' pontnak a csoport egy és csak egy olyan leképezése felel meg, mely P-t P'-be viszi át.*

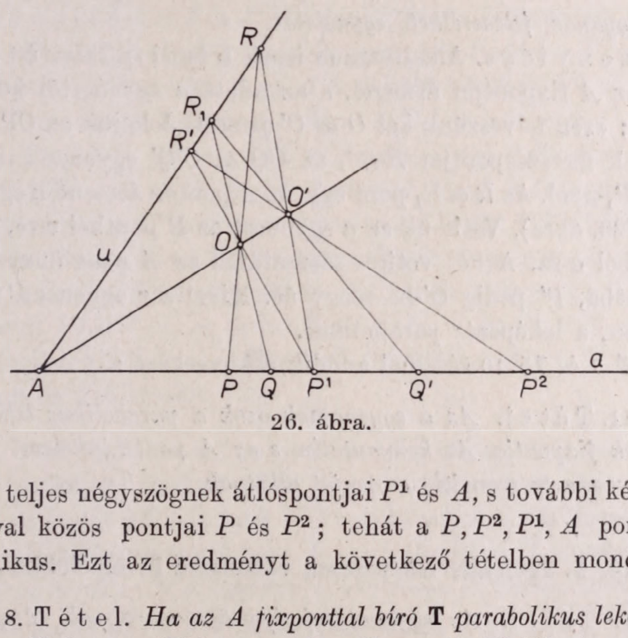
A parabolikus és a hiperbolikus leképezéseket a **13**.2 tételben leírt tulajdonságuk különbözteti meg egymástól. Minden olyan parabolikus leképezést, melynek fixpontja A, egy, az A ponton áthaladó u egyenes s az adott a egyenes közti két perspektív vonatkozás szorzataként állíthatunk elő, s ezeknek a perspektív vonatkozásoknak középpontjai egy, az A ponton áthaladó egyenesen feküsznek. (Lásd erre vonatkozóan a Möbius-féle hálózat-szerkesztést is, 48. o.).

15.7. Tétel. *Ha A, P, P' az a egyenes három tetszőleges, egymástól különböző pontja, van az a egyenesnek önmagára egy és csak egy olyan parabolikus leképezése, mely A-t önmagába, és P-t P'-be viszi át.*

Bizonyítás. Vegyünk fel egy, az A ponton átmenő s a-tól különböző egyenesen két O és O' pontot, melyek egymástól és A-tól különböznek. Jelöljük R-rel az OP és $O'P'$ egyenesek metszéspontját

(26. ábra). Az $AR=u$ egyenesre vetítsük az a egyenest az O pontból, majd u-t a-ra az O' pontból. A két vetítés összetétele olyan parabolikus leképezés, mely A-t önmagába, és P-t P'-be viszi át. A szerkesztésből következik, hogy a nevezett adatokkal a parabolikus leképezés egyértelműen meg van határozva. Ha ugyanis Q az a egyenes tetszőleges másik pontja, ennek Q' képét az O'-vel összekötő $O'Q'$ egyenes és az OQ egyenes metszéspontja, R_1 az u egyenesen fekszik; tehát az A, P, P'; A, Q', Q pontok az RR_1OO' teljes négyszög oldalainak az a egyenessel való metszéspontjai; a **8**.3 tétel szerint tehát a Q' pontot az A, P, P' pontok és a Q pont egyértelműen meghatározzák.

Jelöljük P^2-vel a $P^1=P'$ pontnak a leképezésnél származó képét. Ennek megszerkesztésére vetítsük O'-ből az a egyenesre az OP^1 és AR egyenes R' metszéspontját (26. ábra); a vetület a P^2 pont. Az



26. ábra.

$OO'RR'$ teljes négyszögnek átlóspontjai P^1 és A, s további két oldalának a-val közös pontjai P és P^2; tehát a P, P^2, P^1, A pontnégyes harmonikus. Ezt az eredményt a következő tételben mondjuk ki:

15.8. Tétel. *Ha az A fixponttal bíró* **T** *parabolikus leképezésnél a P pont P^1-be, s ez P^2-be megy át, akkor a P, P^2, P^1, A pontnégyes harmonikus.*

A **15**.8 tételből következik, hogy bármely, az A fixponttól különböző P pontnak a **T** parabolikus leképezés $\mathbf{T}^n$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) hatványainál származó $P^1, P^2, P^3, \ldots$ képei harmonikus sorozatot alkotnak. E szerint a Dedekind-féle axiómából levezethető a következő tétel, mely aequivalens az Archimedes-féle axiómával (**11**.4):

15.9. Tétel. *Ha a* **T** *parabolikus leképezés hatványainál az A fixponttól különböző P pont a $P^1, P^2, \ldots$ pontokba megy át, akkor a P^n pontok sorozata a PP^1A szakaszon monoton, s az A fixponthoz konvergál.*

Ugyanez az állítás érvényes a **T** inverzének hatványainál származó P^{-n} képpontok sorozatára, mivel **T** inverze ugyanahhoz a fixponthoz tartozó parabolikus leképezés.

A **15**.3 tételnek parabolikus leképezésekre vonatkozóan a következő felel meg:

15.10. Tétel. *Ha az A fixponttal bíró* **T** *parabolikus leképezés a P pontot P'-be, s Q-t Q'-be viszi át, akkor van egy és csak egy olyan, az A fixponthoz tartozó parabolikus leképezés, mely P-t Q-ba, P'-t Q'-be viszi át. — E szerint bármely két parabolikus leképezés, melynek fixpontja ugyanaz, felcserélhető egymással.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk ismét a fenti szerkesztést; legyen v egy, az A fixponton átmenő, s az adott a egyenestől különböző egyenes; ezen felveszünk két O és O' pontot. Jelöljük az OP és $O'P'$ egyenesek metszéspontját R-rel, az OQ és $O'Q'$ egyenesek metszéspontját R_1-gyel. Az R és R_1 pont egy, az A ponton átmenő u egyenesen fekszik (26. ábra). Vetítsük az a egyenest az R pontból v-re, s ezt az R_1 pontból a-ra. A két vetítés szorzatánál az A pont önmagába, P a Q pontba, P' pedig Q'-be megy át. Mivel a v egyenes átmegy az A ponton, a leképezés parabolikus.

A **15**.7 és **15**.10 tételből adódik a következő:

15.11. Tétel. *Az a egyenesnek azok a parabolikus leképezései, melyeknek fixpontja A, kommutatív, s az A pont kivételével az egyenesen egyszeresen tranzitív csoportot alkotnak.*

16. §. Projektív leképezések előállítása involuciókkal.

16.1. Tétel. *Az egyenes minden önmagára való* **T** *projektív leképezése vagy involutorius, vagy előállítható két involució szorzataként, melyek közül legalább az egyik hiperbolikus.*

Bizonyítás. Legyen P az egyenes olyan pontja, mely különbözik a **T** leképezésnél származó P' képétől; P' képe, P'' különbözik P'-től. Ha P'' egybeesik P-vel, akkor **T** involutorius (**14**.1). Tegyük fel, hogy P'' különbözik P-től; jelöljük Q-val a P' pontnak a P, P'' pontokra vonatkozó harmonikus párját, és **J**-vel azt a harmonikus involuciót, melynek fixpontjai P' és Q. A **T** és **J** leképezések **T**.**J** szorzata felcseréli egymással a P és P' pontot ; ugyanis

$$\begin{array}{lll} \mathbf{T}\text{-nél}: & P \to P', & P' \to P'', \\ \mathbf{J}\text{-nél}: & P' \to P', & P'' \to P, \end{array}$$

s ezért a **14**.1 tétel szerint **T**.**J**=**J**′ involutorius leképezés. Ebből adódik, hogy

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}'.\mathbf{J},$$

tehát a **T** leképezés a **J**′ és **J** involuciók szorzata.

16.2. Tétel. *Ha* **J** *és* **J**′ *hiperbolikus involuciók, melyeknek egyik fixpontja közös, másik fixpontjuk különböző, akkor a két involució szorzata parabolikus leképezés.*

Bizonyítás. A **J** és **J**′ involuciók közös U fixpontja nyilván fixpontja a **T**=**J**.**J**′ leképezésnek is. Legyen A és B a **J** és a **J**′ involució másik fixpontja ; feltesszük, hogy A és B különböző, ellenkező esetben ugyanis **T** az azonos leképezés volna. A **T** leképezésnek U-n kívül nincs más fixpontja. Ha ugyanis valamely, U-tól különböző C pont **T**-nél önmagába menne át, ez azt jelentené, hogy a C pont **J**-nél és **J**′-nél ugyanabba a C' pontba menne át. A C' pont különbözik C-től, ellenkező esetben a $C=C'$ pont másik közös fixpontja volna **J**-nek és **J**′-nek, feltevésünkkel ellentétben. A C' pont is fixpont a **T** leképezésnél, mivel **J**-nél C-be, ez pedig **J**′-nél C'-be megy át. A **T** projektív lekepezésnek tehát három különböző fixpontja volna : U, C és C', ellentétben az **5**.6 tétellel.

16.3. Tétel. *Minden* **T** *parabolikus leképezés előállítható két olyan* **J** *és* **J**′ *hiperbolikus involució* **J**.**J**′ *szorzataként, melyek közül* **J** *egyik fixpontja egybeesik a* **T** *leképezés U fixpontjával, s másik fixpontja egy tetszőleges, U-tól különböző A pont.* **J**′ *egyik fixpontja U, a másik pedig U-nak az A és $A'=$* **T**(A) *pontokra vonatkozó B harmonikus párja.*

Bizonyítás. A **J**.**J**′ szorzat az előbbi tétel szerint az U fixponthoz tartozó parabolikus leképezés. **J**-nél az A pont önmagába, **J**′-nél A'-be, tehát **J**.**J**′-nél A az A' pontba megy át, ugyanúgy, mint a **T** parabolikus leképezésnél ; ebből a **15**.7 tétel szerint következik, hogy **T**=**J**.**J**′.

16.4. Tétel. Ha *a* **J** *és* **J**′ *hiperbolikus involuciók fixpontjai A, B és A', B' egymástól különböznek, akkor a* **T**=**J**.**J**′ *projektív leképezés* *elliptikus, vagy hiperbolikus, a szerint, hogy az A, B és A', B' pontpárok elválasztják egymást, vagy nem.*

Bizonyítás. A tétel közvetlenül következik a **9**.6 és **10**.6 tételből. Ha ugyanis az A, B és A', B' pontpárok nem választják el egymást, akkor a **10**.6 tétel szerint van egy közös harmonikus X, Y pontpárjuk ; a $\mathbf{J}.\mathbf{J}'=\mathbf{T}$ leképezésnél X és Y fixpontok, tehát $\mathbf{T}$ hiperbolikus leképezés. — Ha pedig A, B és A', B' elválasztják egymást, akkor nincs közös harmonikus párjuk (**9**.6), tehát a $\mathbf{J}.\mathbf{J}'=\mathbf{T}$ leképezésnek nincs fixpontja, azaz $\mathbf{T}$ elliptikus.

16.5. Tétel. *Ha* $\mathbf{J}$ *elliptikus és* $\mathbf{J}'$ *elliptikus vagy hiperbolikus involució, akkor a két involució szorzata hiperbolikus leképezés* (vagy az azonosság).

Bizonyítás. Ha a két involució közül az egyik hiperbolikus, a másik elliptikus, akkor az egyik megfordítja, a másik megtartja, tehát a kettő szorzata megfordítja az egyenes irányítását, s ezért a **15**.1 tétel szerint hiperbolikus leképezés. — Ha $\mathbf{J}$ és $\mathbf{J}'$ mindkettő elliptikus involució, jelöljük valamely A pontnak $\mathbf{J}$-nél és $\mathbf{J}'$-nél származó képét rendre A'-vel és B-vel, s A' $\mathbf{J}'$-nél származó képét B'-vel. A $\mathbf{J}.\mathbf{J}'$ leképezésnél az A pont B'-be, A' pedig B-be megy át. Ha A' egybeesik B-vel, akkor A és A' két különböző fixpontja a $\mathbf{J}.\mathbf{J}'$ leképezésnek s így ez hiperbolikus (vagy az azonosság). Ha azonban A' és B különböző, akkor az A, B és A', B' pontpárok elválasztják egymást, a **14**.3 tétel szerint, mivel a $\mathbf{J}'$ elliptikus involuciónál az A és A' pont a B és B' pontba megy át. Mivel pedig a $\mathbf{J}.\mathbf{J}'$ leképezés megtartja az irányítást, az az AA' szakasz, mely tartalmazza a B, B' pontokat, a $\mathbf{J}.\mathbf{J}'$ leképezésnél az A, A' pontokat nem tartalmazó $B'B$ szakaszba, azaz egy részébe megy át ; a **10**.5 lemma szerint van $\mathbf{J}.\mathbf{J}'$-nek egy C fixpontja a nevezett $B'B$ szakaszon. C-nek $\mathbf{J}$-nél származó C' képe különbözik C-től, mivel $\mathbf{J}$-nek nincs fixpontja ; C' a $\mathbf{J}'$ involuciónál C-be megy át ; eszerint C' is fixpontja $\mathbf{J}.\mathbf{J}'$-nek, s ezért $\mathbf{J}.\mathbf{J}'$ hiperbolikus leképezés.

17. §. Felcserélhető leképezések.

17.1. Tétel. *Az A, B fixpontokhoz tartozó* $\mathbf{J}$ *hiperbolikus involució felcserélhető mindazokkal a* $\mathbf{J}'$ *involuciókkal, melyeknél A és B egymásba megy át; más involucióval nem cserélhető fel.*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{J}'$ olyan (elliptikus, vagy hiperbolikus) involució, mely felcseréli egymással A-t és B-t, akkor a $\mathbf{J}.\mathbf{J}'$ leképezésnél is A és B egymásba megy át, s ezért a **14**.1 tétel szerint $\mathbf{J}.\mathbf{J}'$ is involutorius, azaz megegyezik inverzével:

$$\mathbf{J}.\mathbf{J}' = (\mathbf{J}.\mathbf{J}')^{-1} = \mathbf{J}'.\mathbf{J}.$$

Ha viszont $\mathbf{J}'$ olyan involució, mely felcserélhető $\mathbf{J}$-vel, akkor jelöljük A'-vel a $\mathbf{J}$ involució A fixpontjának $\mathbf{J}'$-nél származó képét; $\mathbf{J}.\mathbf{J}'$-nél, s mert $\mathbf{J}.\mathbf{J}'=\mathbf{J}'.\mathbf{J}$, tehát $\mathbf{J}'.\mathbf{J}$-nél is az A pont A'-be megy át, úgyhogy A' fixpontja $\mathbf{J}$-nek. Ugyancsak fixpontja $\mathbf{J}$-nek a B pont $\mathbf{J}'$-nél származó B' képe. Az A', B' pontok tehát, sorrendtől eltekintve, megegyeznek az A, B pontokkal. Ha azonban $A=A'$, $B=B'$ volna, akkor $\mathbf{J}=\mathbf{J}'$; ha $\mathbf{J}$ és $\mathbf{J}'$ különböző, akkor $\mathbf{J}'$ felcseréli egymással $\mathbf{J}$ két fixpontját.

M e g j e g y z é s. Ha $\mathbf{J}$ és $\mathbf{J}'$ egymással felcserélhető hiperbolikus involuciók, akkor $\mathbf{J}$ és $\mathbf{J}'$ fixpontjai harmonikusan választják el egymást, a most bebizonyított tétel szerint.

17.2. T é t e l. *A* $\mathbf{J}$ *elliptikus involució felcserélhető minden olyan* $\mathbf{J}'$ *hiperbolikus involucióval, melynek fixpontjai* $\mathbf{J}$*-nél egymásba mennek át;* $\mathbf{J}$ *nem cserélhető fel más involucióval.*

B i z o n y í t á s. A tétel első állítása a **17**.1 tételben foglaltatik. A második állítás bizonyítása a következő. Ha a $\mathbf{J}'$ hiperbolikus involució felcserélhető a $\mathbf{J}$ elliptikus involucióval, akkor a **17**.1 tétel szerint $\mathbf{J}$ felcseréli egymással $\mathbf{J}'$ fixpontjait. Ha pedig $\mathbf{J}'$ egy $\mathbf{J}$-től különböző elliptikus involució, akkor nem cserélhető fel $\mathbf{J}$-vel, mivel a $\mathbf{J}.\mathbf{J}'$ szorzat, mely a **16**.5 tétel szerint hiperbolikus leképezés, az irányítást megtartja, s ezért nem involutorius (**14**.2).

17.3. Ha $\mathbf{J}$ tetszőleges elliptikus involució, és $\mathbf{J}'$ olyan hiperbolikus involució, mely felcserélhető $\mathbf{J}$-vel, akkor a $\mathbf{J}'.\mathbf{J}$ leképezés involutorius, s mivel megfordítja az egyenes irányítását, tehát egy $\mathbf{J}''$ hiperbolikus involució. Ebből $\mathbf{J}=\mathbf{J}'.\mathbf{J}''$, vagyis *minden elliptikus involució két hiperbolikus involució szorzataként állítható elő.*

A **16**.1 tétel szerint az egyenes minden önmagára való projektív leképezése vagy involutorius, vagy két involució szorzata, melyek közül legalább az egyik hiperbolikus. Ebből és előbbi eredményünkből következik tehát:

17.4. T é t e l. *Az egyenes minden önmagára való projektív leképezése előállítható legfeljebb három hiperbolikus involució szorzataként.*

Az egyenes irányítását megtaórt, tetszőleges projektív leképezés két hiperbolikus involució szorzata ; minden, az irányítást megfordító projektív leképezés vagy hiperbolikus involució, vagy három ilyennek a szorzata.

17.5. Tétel. *Nincs olyan* **J** *involució, mely egy* **T** *parabolikus leképezéssel felcserélhető.*

Bizonyítás. Ha a **J** involució felcserélhető **T**-vel, azaz $\mathbf{J}.\mathbf{T}=\mathbf{T}.\mathbf{J}$, akkor a **T** leképezés U fixpontja **J**-nél is önmagába megy át ; ugyanis a $\mathbf{J}(U)$ pont fixpontja a

$$\mathbf{T}=\mathbf{J}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{J}$$

leképezésnek. mivel $\mathbf{J}^{-1}$-nél U-ba, ez **T**-nél önmagába, és **J**-nél $\mathbf{J}(U)$-ba megy át. E szerint **J** hiperbolikus involució, melynek egyik fixpontja a $\mathbf{J}(U)=U$ pont ; **J** másik fixpontja, A önmagába megy át a **T** leképezésnél, mivel $\mathbf{T}(A)$ fixpontja a

$$\mathbf{J}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{T}$$

leképezésnek. Ez azonban ellenmondás, mert **T**-nek csak egy fixpontja van.

17.6. Tétel. *A* **T** *nem involutorius hiperbolikus leképezés egy és csak egy involucióval cserélhető fel, mégpedig azzal a hiperbolikus involucióval, melynek fixpontjai* **T** *fixpontjaival megegyeznek.*

Bizonyítás. Jelöljük A-val és B-vel a **T** leképezés két fixpontját. A **15.4** tételből következik, hogy **T** felcserélhető az A, B fixpontokhoz tartozó hiperbolikus involucióval. Legyen **J** tetszőleges olyan involució, mely felcserélhető **T**-vel, azaz : $\mathbf{TJ}=\mathbf{JT}$. Mivel

$$\mathbf{T}=\mathbf{J}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{J},$$

ezért a **T** leképezés A, B fixpontjainak **J**-nél származó képei : $\mathbf{J}(A)$ és $\mathbf{J}(B)$ ugyancsak fixpontjai a **T** leképezésnek, vagyis az A, B pontok **J**-nél önmagukba vagy egymásba mennek át. Ha önmagukba mennek át, akkor **J** az A, B fixpontokhoz tartozó hiperbolikus involució. Ha **J** egymásba viszi át A-t és B-t, akkor **TJ** is ; ezért **TJ** involutorius, vagyis :

$$\mathbf{JT}=\mathbf{TJ}=\mathbf{J}'.$$

Ebből

$$\mathbf{T}=\mathbf{J}.\mathbf{J}'=\mathbf{J}'.\mathbf{J}=(\mathbf{J}.\mathbf{J}')^{-1}=\mathbf{T}^{-1},$$

tehát **T** involutorius leképezés, amit pedig kizártunk.

17.7. Tétel. *A* **T** *nem involutorius elliptikus leképezés egy és csak egy involucióval cserélhető fel; ez az involució is elliptikus.*

Bizonyítás. Legyen P és Q az egyenes két tetszőleges pontja, P^1, Q^1 és P^{-1}, Q^{-1} ezeknek a **T**, illetve a $\mathbf{T}^{-1}$ leképezésnél származó képe. Mivel **T** nem involutorius és elliptikus, a P, P^1, P^{-1} pontok, s ugyancsak a Q, Q^1, Q^{-1} pontok különböznek egymástól. Ha a Q pontot a P, P^1, P^{-1} pontoktól különbözőnek vesszük fel, a **14**.3 tétel szerint van az egyenesnek egy olyan $\mathbf{J}'$ involuciója, mely a P pontot P^1-gyel, és Q-t Q^1-gyel felcseréli. A $\mathbf{TJ}'$ leképezésnél P és Q fixpontok, a P^{-1} pont P^1-be, Q^{-1} pedig Q^1-be megy át; ez a leképezés hiperbolikus. A **15**.3 tétel szerint van egy, a P, Q fixpontokhoz tartozó **S** hiperbolikus leképezés, mely P^1-et Q^1-be, és P^{-1}-et Q^{-1}-be viszi át. Vegyük fel a Q pontot úgy, hogy *Q a P pontnak a P^1, P^{-1} pontokra vonatkozó harmonikus párja legyen.* A P, Q, P^1, P^{-1} harmonikus négyesnek az **S** leképezésnél megfelelő négyes: P, Q, Q^1, Q^{-1} szintén harmonikus, vagyis *a Q^1 pontnak a P, Q pontokra vonatkozó harmonikus párja Q^{-1}.*

Jelöljük **J**-vel azt az involuciót, mely P-t Q-val és P^1-et Q^1-gyel cseréli fel. Ennél az involuciónál a P^{-1} pontnak a Q^{-1} pont felel meg; ugyanis a P, Q, P^1, P^{-1} harmonikus négyesnek **J**-nél olyan harmonikus négyes felel meg, melynek első három pontja Q, P, Q^1; negyedik pontja tehát Q^1-nek a Q, P pontokra vonatkozó harmonikus párja, azaz Q^{-1}. E szerint

J-nél: $P \to Q,\ Q \to P;\ P^1 \to Q^1,\ Q^1 \to P^1;\ P^{-1} \to Q^{-1},\ Q^{-1} \to P^{-1};$

T-nél: $P \to P^1,\ Q \to Q^1,\ P^{-1} \to P,\ Q^{-1} \to Q,$

tehát

$\mathbf{J}.\mathbf{T}$-nél: $P \to Q^1,\ Q \to P^1,\ P^{-1} \to Q;$

ugyanígy a $\mathbf{T}.\mathbf{J}$ leképezésnél is; ebből következik, hogy

$$\mathbf{T}.\mathbf{J} = \mathbf{J}.\mathbf{T},$$

vagyis, hogy *a* **T** *elliptikus leképezés felcserélhető a* **J** *involucióval.*

A **J** *involució elliptikus.* Ellenkező esetben **J**-nek volna két fixpontja, s a $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{T}$ egyenlet folytán ezek **T**-nél önmagukba vagy egymásba mennének át; az első esetben **T** hiperbolikus, a második esetben **T** involutorius volna, **T**-re vonatkozó feltevésünkkel ellentétben.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{J}_1$ egy másik olyan involució, mely **T**-vel felcserélhető. Legyen P tetszőleges olyan pont, mely különbözik $\mathbf{J}_1$-nél származó Q képétől, s jelöljük ismét P^1, Q^1-gyel és P^{-1}, Q^{-1}-gyel a

P és Q pontnak $\mathbf{T}$-nél, illetve $\mathbf{T}^{-1}$-nél származó képét. Mivel feltevésünk értelmében $\mathbf{T}.\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_1.\mathbf{T}$, azaz

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}_1\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{J}_1\mathbf{T}^{-1},$$

tehát $\mathbf{J}_1$-nél P^1 és Q^1 egymásba, s ugyancsak P^{-1} és Q^{-1} egymásba megy át. E szerint $\mathbf{J}_1$-nél a P, Q, P^1, P^{-1} pontnégyes a Q, P, Q^1, Q^{-1} pontnégyesbe megy át. Mint a bizonyítás kezdetén megjegyeztük, megadható egy olyan $\mathbf{S}$ hiperbolikus leképezés, mely a P, Q, P^1, P^{-1} pontnégyest a P, Q, Q^1, Q^{-1} pontnégyesbe viszi át. A $\mathbf{J}_1.\mathbf{S}^{-1}$ leképezésnél a P, Q, P^1, P^{-1} négyesnek a Q, P, P^1, P^{-1} négyes felel meg; e szerint a $\mathbf{J}_1.\mathbf{S}^{-1}$ leképezés a P^1, P^{-1} fixpontokra vonatkozó hiperbolikus involució (**14**.1), s a Q pont a P pontnak a P^1, P^{-1} pontokra vonatkozó harmonikus párja. Tehát $\mathbf{J}_1$ a fent meghatározott $\mathbf{J}$ elliptikus involucióval azonos.

17.8. Tétel. *Az egymástól és az azonosságtól különböző* **T** *és* **S** *projektív leképezések a következő négy esetben felcserélhetők egymással, más esetben nem:*

1) *mindkettő involutorius, s közülök az egyik hiperbolikus involució, melynek két fixpontját a másik involució felcseréli egymással;*

2) *mindkét leképezés parabolikus s fixpontjuk közös;*

3) *mindkét leképezés hiperbolikus s fixpontjaik közösek;*

4) *mindkét leképezés elliptikus, s ugyanazzal a* **J** *elliptikus involucióval cserélhetők fel.*

Bizonyítás. Ha a **T** és **S** leképezések közül legalább az egyik involutorius, ebben az esetben a tétel állítása a **17**.1, 2, 5, 6, 7 tételekben foglaltatik. Tegyük fel tehát, hogy *sem* **T**, *sem* **S** *nem involutorius.*

Ha **T** *hiperbolikus* leképezés, s felcserélhető **S**-sel, akkor $\mathbf{ST} = \mathbf{TS}$, és

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{TS} = \mathbf{T},$$

s ezért **T** fixpontjainak, A-nak és B-nek **S**-nél származó képei fixpontok a **T** leképezésnél; e szerint **S** egymásba vagy önmagukba viszi át az A és B pontokat. Az előbbi esetben azonban **S** involutorius volna (**14**.1), amit kizártunk. Tehát **S** az A, B fixpontokhoz tartozó hiperbolikus leképezés. Megfordítva, minden az A, B fixpontokhoz tartozó **S** hiperbolikus leképezes felcserélhető **T**-vel (**15**.4).

Ha **T** *parabolikus* és **S** felcserélhető **T**-vel, akkor az

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{TS} = \mathbf{T}$$

egyenlet folytán **S** önmagába viszi át a **T** leképezés A fixpontját ; ezért **S** parabolikus vagy hiperbolikus. Előbbi eredményünk szerint azonban hiperbolikus leképezés nem cserélhető fel parabolikus leképezéssel, tehát **S** is parabolikus. Megfordítva, minden, az A fixponthoz tartozó **S** parabolikus leképezés felcserélhető **T**-vel (**15**.10).

Ha **T** *elliptikus* leképezés és **S** felcserélhető **T**-vel (s mint feltettük, sem **S**, sem **T** nem involutorius), akkor előbbi eredményeink szerint **S** nem lehet sem hiperbolikus, sem parabolikus, tehát **S** is elliptikus leképezés.

Jelöljük **J**-vel azt az egyértelműen meghatározott elliptikus involuciót, mely felcserélhető **T**-vel (**17**.7). Legyen A egy tetszőleges pont, A' ennek **J**-nél származó képe ; az A, A' fixpontokhoz tartozó hiperbolikus involució, melyet $\mathbf{J}_{AA'}$-vel jelölünk, a **17**.1 tétel szerint felcserélhető **J**-vel. Legyen $\mathbf{T}_1$ egy tetszőleges, **J**-vel felcserélhető elliptikus leképezés. Két, **J**-vel felcserélhető leképezés szorzata is felcserélhető **J**-vel ; például :

$$\mathbf{J}.\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1.\mathbf{J} \quad \text{és} \quad \mathbf{J}.\mathbf{J}_{AA'} = \mathbf{J}_{AA'}.\mathbf{J},$$

ebből :

$$\mathbf{J}.\mathbf{T}_1\mathbf{J}_{AA'} = \mathbf{T}_1\mathbf{J}\mathbf{J}_{AA'} = \mathbf{T}_1\mathbf{J}_{AA'}.\mathbf{J}.$$

A $\mathbf{T}_1.\mathbf{J}_{AA'}$ leképezés megfordítja az egyenes irányítását, ezért hiperbolikus, s mivel felcserélhető a **J** elliptikus involucióval, a **17**.6 tétel szerint maga is involutorius ; fixpontjai, B és B' a **J** involuciónál egymásba mennek át ; e szerint :

$$\mathbf{T}_1.\mathbf{J}_{AA'} = \mathbf{J}_{BB'}, \quad \text{és} \quad \mathbf{T}_1 = \mathbf{J}_{BB'}.\mathbf{J}_{AA'}.$$

Ezt az eredményünket a következő tételben mondjuk ki :

17.9. *Minden,* **J**-*vel felcserélhető* $\mathbf{T}_1$ *elliptikus leképezés előállítható két olyan,* **J**-*vel felcserélhető hiperbolikus involució szorzataként, melyek közül a második független* $\mathbf{T}_1$-*től.*

Legyen $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ két, **J**-vel felcserélhető elliptikus leképezés ; állítsuk elő ezeket **J**-vel felcserélhető hiperbolikus involuciók szorzataként :

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{J}_{BB'}.\mathbf{J}_{AA'}, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{J}_{CC'}.\mathbf{J}_{AA'}.$$

A $\mathbf{J}_{BB'}$, $\mathbf{J}_{AA'}$, $\mathbf{J}_{CC'}$ hiperbolikus involuciók $\mathbf{J}_{BB'}.\mathbf{J}_{AA'}.\mathbf{J}_{CC'}$ szorzata megfordítja az egyenes irányítását, tehát hiperbolikus leképezés, s mivel a három involucióval együtt ezek szorzata is felcserélhető a $\mathbf{J}$ elliptikus involucióval, tehát involutorius (**17**.6), azaz:

$$\mathbf{J}_{BB'}\cdot\mathbf{J}_{AA'}\cdot\mathbf{J}_{CC'}=(\mathbf{J}_{BB'}\cdot\mathbf{J}_{AA'}\cdot\mathbf{J}_{CC'})^{-1}=\mathbf{J}_{CC'}\cdot\mathbf{J}_{AA'}\cdot\mathbf{J}_{BB'}.$$

Ezt az egyenletet jobbról $\mathbf{J}_{AA'}$-vel szorozva azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{J}_{BB'}\mathbf{J}_{AA'}\cdot\mathbf{J}_{CC'}\mathbf{J}_{AA'}=\mathbf{J}_{CC'}\mathbf{J}_{AA'}\cdot\mathbf{J}_{BB'}\mathbf{J}_{AA'},$$

azaz, hogy

$$\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1.$$

E szerint:

17.10. *A* $\mathbf{J}$ *elliptikus involucióval felcserélhető elliptikus leképezések egy kommutatív* $\mathbf{G}$ *csoportot alkotnak.*

17.11. *A* $\mathbf{J}$ *elliptikus involucióval felcserélhető elliptikus leképezések* $\mathbf{G}$ *csoportja az egyenesen egyszeresen tranzitív,* azaz bármely két P és Q pontnak megfelel a csoportnak egy és csak egy olyan leképezése, mely a P pontot Q-ba viszi át. Legyen ugyanis P' és Q' a P és a Q pont képe a $\mathbf{J}$ involuciónál. Ha P' egybeesik Q-val, akkor a $\mathbf{G}$ csoport $\mathbf{J}$ leképezésénél a P pont Q-ba megy át. Ha $\mathbf{T}_1$ a $\mathbf{G}$ csoportnak egy másik olyan leképezése, melynél P Q-ba megy át, akkor $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{J}$ felcserélhetősége folytán $\mathbf{T}_1$-nél a $P'=Q$ pont a $Q'=P$ pontba megy át, tehát $\mathbf{T}_1$ is involutorius; a $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{J}$ egymással felcserélhető elliptikus involuciók a **17**.2 tétel szerint azonosak egymással. Tegyük fel, hogy P' különbözik Q-tól; a P, Q és P', Q' pontpárok, mivel a $\mathbf{J}$ elliptikus involuciónál egymásnak felelnek meg, nem választják el egymást (**14**.3), tehát van egy közös X, Y harmonikus párjuk (**10**.6). $\mathbf{J}$-nél a P, Q és P', Q' pontpár egymásba, ezért az X, Y pontpár önmagába, r mert $\mathbf{J}$-nek nincs fixpontja, tehát X és Y egymásba megy át. E szesint $Y=\mathbf{J}(X)=X'$. A $\mathbf{J}$-vel felcserélhető $\mathbf{J}_{PP'}$ és $\mathbf{J}_{XX'}$ hiperbolikus involuciók szorzata

$$\mathbf{J}_{PP'}\cdot\mathbf{J}_{XX'}$$

a $\mathbf{G}$ csoporthoz tartozik, s a P pontot a Q pontba viszi át. Ezenkívül nincs $\mathbf{G}$-nek más olyan eleme, mely P-t Q-ba viszi át; különben azt is felírhatnók $\mathbf{J}_{RR'}\cdot\mathbf{J}_{XX'}$ alakban; de mert $\mathbf{J}_{RR'}$-nél P fixpont, tehát

$$\mathbf{J}_{RR'}=\mathbf{J}_{PP'}.$$

Ha $\mathbf{S}$ tetszőleges olyan leképezés, mely a nem involutorius, elliptikus $\mathbf{T}$ leképezéssel felcserélhető, jelöljük P-vel az egyenes valamely pontját, és $Q = \mathbf{S}(P)$-vel ennek **S**-nél származó képét. A **G** csoportban is van egy olyan $\mathbf{T}_1$ leképezés, mely P-t Q-ba viszi át (**17**.11), azaz:

$$\mathbf{S}(P) = \mathbf{T}_1(P).$$

Jelöljük P^1-gyel és P^2-vel a P pontnak **T**-nél és $\mathbf{T}^2$-nél származó képét. Tekintettel **T**-nek **S**-sel és $\mathbf{T}_1$-gyel való felcserélhetőségére, az

$$\mathbf{S}(P) = \mathbf{T}_1(P) = Q$$

egyenletből adódik, hogy

$$\mathbf{S}(P^1) = \mathbf{TS}(P) = \mathbf{ST}(P) = \mathbf{T}_1\mathbf{T}(P) = \mathbf{TT}_1(P) = \mathbf{T}_1(P^1),$$

és

$$\mathbf{S}(P^2) = \mathbf{T}^2\mathbf{S}(P) = \mathbf{ST}^2(P) = \mathbf{T}_1\mathbf{T}^2(P) = \mathbf{T}^2\mathbf{T}_1(P) = \mathbf{T}_1(P^2)\,;$$

e szerint az **S** és $\mathbf{T}_1$ leképezések megegyeznek egymással három különböző P, P^1, P^2 pontban, s így az **5**.5 tétel szerint azonosak. Vagyis *minden,* **T**-*vel felcserélhető* **S** *leképezés a* **G** *csoporthoz tartozik.*

Ezzel a **17**.8 tétel összes állítását bebizonyítottuk, s azonkívül a következő tételt is, mely elliptikus leképezések esetében megfelel a **15**.2 és **15**.7 tételnek:

17.12. Tétel. *Az egyenesnek bármely önmagára való* **T** *elliptikus leképezéséhez, s az egyenes két tetszőleges P és P' pontjához megadható egy és csak egy,* **T**-*vel felcserélhető elliptikus leképezés, mely a P pontot P'-be viszi át.*

18. §. Az egyenes egytagú elliptikus csoportjai.

A **17**.10, 11, 12 tételek szerint az egyenes minden **T** elliptikus leképezése hozzátartozik az egyenes elliptikus leképezéseinek egy kommutatív, s az egyenesen egyszeresen tranzitív **G** csoportjához, melyet bármely, az azonosságtól különböző eleme egyértelműen meghatároz; a csoportban egy és csak egy **J** involutorius elem van. A **G** csoportot *az egyenes egytagú elliptikus csoportjá*nak nevezzük. Következő tárgyalásunk célja a **G** csoport szerkezetének meghatározása, s a csoportnak egy alkalmasan választott paraméterrel való kifejezése.

Jelöljük O-val az egyenes valamely pontját, $U = \mathbf{J}(O)$-val ennek **J**-nél származó képét. Az egyenes minden P pontjának megfelel a **G** csoport egy és csak egy $\mathbf{T}_P$ leképezése, mely az O pontot P-be viszi át. Jelöljük P^{-1}-gyel azt a pontot, melybe az O pont $\mathbf{T}_P$ inverzénél, $\mathbf{T}_P^{-1}$-nél megy át.

18.1. *Az O, U fixpontokkal bíró $\mathbf{J}_{OU}=\mathbf{J}'$ hiperbolikus involuciónál minden P pontnak a $P^{-1}=\mathbf{T}_P^{-1}(O)$ pont felel meg.*

A $\mathbf{J}'.\mathbf{T}_P$ leképezés ugyanis megfordítja az egyenes irányítását, tehát hiperbolikus (**15**.1) ; $\mathbf{J}'$ felcserélhető a $\mathbf{J}$ elliptikus involucióval, mivel $\mathbf{J}'$ fixpontjai, O és U egymásba mennek át a $\mathbf{J}$ involuciónál (**17**.1), tehát $\mathbf{J}'.\mathbf{T}_P$ is felcserélhető $\mathbf{J}$-vel. Ebből a **17**.6 tétel szerint következik, hogy $\mathbf{J}'.\mathbf{T}_P$ hiperbolikus involució, s így

$$\mathbf{J}'\mathbf{T}_P.\mathbf{J}'\mathbf{T}_P=\mathbf{I},\quad \mathbf{J}'=\mathbf{T}_P\mathbf{J}'\mathbf{T}_P.$$

$\mathbf{J}'$ jobboldali kifejezéséből látható, hogy a P^{-1} pontot a P pontba viszi át ; ugyanis $\mathbf{T}_P$-nél P^{-1} az O pontba, ez $\mathbf{J}'$-nél önmagába és $\mathbf{T}_P$-nél a $\mathbf{T}_P(O)=P$ pontba megy át. Mivel $\mathbf{J}'$ involutorius, ebből következik, hogy a P pontot P^{-1}-be viszi át. Ez a tétel állítása.

Jelöljük a $\mathbf{J}'\mathbf{T}_P$ hiperbolikus involució fixpontjait Q-val és R-rel. A Q pontnak $\mathbf{J}'$-nél származó képe, $\mathbf{J}'(Q)$ azonos a $Q^{-1}=\mathbf{T}_Q^{-1}(O)$ ponttal (**18**.1). Mivel Q fixpontja a $\mathbf{J}'\mathbf{T}_P$ leképezésnek, tehát a Q^{-1} pont $\mathbf{T}_P$-nél a Q pontba megy át. A $\mathbf{T}_Q$ leképezésnél a Q^{-1} pont képe O, s az O pont képe Q ; e szerint $\mathbf{T}_Q^2$-nél, ugyanúgy mint $\mathbf{T}_P$-nél, a Q^{-1} pont Q-ba megy át ; mivel pedig $\mathbf{T}_Q^2$ és $\mathbf{T}_P$ mindketten az egyszeresen tranzitív $\mathbf{G}$ csoporthoz tartoznak, ebből következik, hogy

$$\mathbf{T}_Q^2=\mathbf{T}_P.$$

A $\mathbf{T}_Q$ leképezést a $\mathbf{T}_P$ *leképezés négyzetgyöké*nek nevezzük.

A $\mathbf{J}'\mathbf{T}_P$ leképezés másik fixpontjának, R-nek megfelelő $\mathbf{T}_R$ leképezés szintén négyzetgyöke $\mathbf{T}_P$-nek. Mivel a $\mathbf{J}$ elliptikus involució felcserélhető a $\mathbf{J}'\mathbf{T}_P$ hiperbolikus involucióval, a **17**.2 tétel szerint az utóbbinak Q, R fixpontjai $\mathbf{J}$-nél egymásba mennek át ; tehát $\mathbf{T}_R=\mathbf{T}_Q\mathbf{J}$.

A $\mathbf{T}_Q$ és $\mathbf{T}_Q\mathbf{J}$ leképezéseken kívül nincs a $\mathbf{G}$ csoportnak más olyan $\mathbf{S}$ eleme, melynek négyzete $\mathbf{T}_P$. Ha ugyanis $\mathbf{S}^2=\mathbf{T}_P=\mathbf{T}_Q^2$, akkor $\mathbf{T}_Q^{-2}\mathbf{S}^2=\mathbf{I}$, s így $\mathbf{S}$ és $\mathbf{T}_Q^{-1}$ felcserélhetősége folytán

$$\mathbf{T}_Q^{-2}\mathbf{S}^2=\mathbf{T}_Q^{-1}\mathbf{S}.\mathbf{T}_Q^{-1}\mathbf{S}=(\mathbf{T}_Q^{-1}\mathbf{S})^2=\mathbf{I},$$

tehát

$$\mathbf{T}_Q^{-1}\mathbf{S}=\mathbf{I},\quad \text{vagy}\quad \mathbf{T}_Q^{-1}\mathbf{S}=\mathbf{J},$$

s ebből

$$\mathbf{S}=\mathbf{T}_Q,\quad \text{vagy}\quad \mathbf{S}=\mathbf{T}_Q\mathbf{J}.$$

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt :

18.2. *A* **G** *csoportban minden* $\mathbf{T}_P$ *leképezésnek két négyzetgyöke van ; ha* $\mathbf{T}_Q$ *ezek közül az egyik, akkor a másik* $\mathbf{T}_Q\mathbf{J}$.

Vegyük fel az egyenesnek az O, U pontok által meghatározott egyik szakaszát, s ezen egy P pontot. A **18**.2. tétel szerint van az OPU szakasznak egy és csak egy olyan Q pontja, melyre $\mathbf{T}_Q^2=\mathbf{T}_P$.

18.3. *A Q pont az OPU szakasznak OP rész-szakaszához tartozik.*

Mielőtt ennek az állításnak igazolásához fognánk, jegyezzük meg, hogy két A és B pont, mely nem egymásnak felel meg a **J** elliptikus involuciónál, meghatároz az egyenesen egy olyan AB szakaszt, mely nem tartalmaz két, a **J** involuciónál egymásnak megfelelő pontot ; ezt a szakaszt AB *kisszakasz*nak nevezzük (ideiglenes kifejezés, melyet csak a **G** csoport tárgyalása során alkalmazunk). Mivel a **G** csoport bármely **T** eleme felcserélhető **J**-vel, az AB kisszakasznak **T**-nél az $A'B'$ kisszakasz felel meg, ahol $A'=\mathbf{T}(A)$ és $B'=\mathbf{T}(B)$ A és B képét jelenti.

A $\mathbf{T}_Q$ leképezésnél az O pont Q-ba, Q pedig P-be, tehát az OQ kisszakasz a QP kisszakaszba megy át, s mivel T_Q megtartja az irányítást, fennáll az $(OQPU)$ elrendezés. Vagyis Q az OP kisszakaszhoz tartozik.

18.4. *Ha P és P' az OPU szakasz két pontja, és Q, Q' az OPU szakasznak azok a pontjai, melyekre* $\mathbf{T}_Q^2=\mathbf{T}_P$ *és* $\mathbf{T}_{Q'}^2=\mathbf{T}_{P'}$, *akkor az $(OQQ'U)$ elrendezésből következik az $(OPP'U)$ elrendezés, és megfordítva.*

Tegyük fel az ellenkezőt, például hogy fennáll az $(OQQ'U)$ és az $(OP'PU)$ elrendezés. Mivel **18**.3 szerint ugyancsak fennáll az $(OQPU)$ és az $(OQ'P'U)$ elrendezés, tehát mindezeknek a pontoknak az OPU szakaszon való elrendezése a következő : $(OQQ'P'PU)$. E szerint a $Q'P'$ kisszakasz a QP kisszakasznak része. $\mathbf{T}_Q^{-1}$-nél a QP kisszakasz az OQ kisszakaszba, $\mathbf{T}_{Q'}$-nél az OQ' kisszakasz a $Q'P'$ kisszakaszba megy át ; mivel az OQ' kisszakasznak része az OQ kisszakasz, ez utóbbi $\mathbf{T}_{Q'}$-nél a $Q'P'$ kisszakasz egy részébe megy át. Tehát a QP kisszakasz a $\mathbf{T}_Q^{-1}\mathbf{T}_{Q'}$ leképezésnél egy részébe megy át ; ezen a szakaszon volna fixpontja a leképezésnek a **10**.5 lemma szerint ; ez azonban ellenmondás, mivel P és P' feltevésünk szerint különbözők, s ezért Q és Q' is, tehát $\mathbf{T}_Q^{-1}\mathbf{T}_{Q'}$ nem az azonos leképezés ; a **G** csoport más leképezésének pedig nincs fixpontja.

18.5. Bevezetünk az egyenesen s a **G** csoportban egy *paramétert* ;

a P ponthoz, s a $\mathbf{T}_P$ leképezéshez ugyanazt a számértéket rendeljük hozzá. Az azonosságot $\mathbf{T}^0$-val, a $\mathbf{J}$ involuciót $\mathbf{T}^{1/2}$-vel, ennek egyik négyzetgyökét $\mathbf{T}^{1/4}$-del jelöljük; legyen $P_{1/4}=\mathbf{T}^{1/4}(O)$. Jelentse $\mathbf{T}^{1/8}$ a $\mathbf{T}^{1/4}$ leképezésnek azt a négyzetgyökét, melyre a $\mathbf{T}^{1/8}(O)$ pont az $OP_{1/4}U$ szakaszhoz tartozik; és így tovább: minden n-nél jelöljük $\mathbf{T}^{1/2^n}$-nel a $\mathbf{T}^{1/2^{n-1}}$ leképezésnek azt a négyzetgyökét, melyre a $P_{1/2^n}=\mathbf{T}^{1/2^n}(O)$ pont az $OP_{1/4}U$ szakaszhoz tartozik. A $\mathbf{T}^{1/2^n}$ leképezésnek s a $P_{1/2^n}$ pontnak az $1/2^n$ paraméterértéket feleltetjük meg.

Mivel **18.**3 szerint a $P_{1/2^n}$ pont az $OP_{1/2^{n-1}}$ kisszakaszhoz tartozik, ebből következik, hogy az OU szakaszon fekvő $P_{1/4}, P_{1/8},\ldots$ pontok sorozata *monoton*, s elrendezésük $(UP_{1/4}P_{1/8}\ldots O)$.

18.6. *A $P_{1/4}, P_{1/8},\ldots$ pontsorozat az O ponthoz konvergál.*

Ha a sorozat nem konvergálna O-hoz, volna egy Q limesze, mely minden n-nél az $OP_{1/2^n}$ kisszakaszhoz tartoznék. Ebből **18.**4 szerint következik, hogy a $P=\mathbf{T}_Q(Q)$ pont minden n-nél az $OP_{1/2^{n-1}}$ kisszakaszhoz tartozik, s ezért a P pont az OQ kisszakasznak pontja, vagy végpontja; ez azonban ellentmond a **18.**3 tételnek, mely szerint Q az OP kisszakasznak (belső) pontja.

Jelöljük $\mathbf{T}^{m/2^n}$-nel a $\mathbf{T}^{1/2^n}$ leképezés m-edikét hatványát, és $P_{m/2^n}$-nel az O pontnak $\mathbf{T}^{m/2^n}$-nél származó képét; ehhez a ponthoz s a $\mathbf{T}^{m/2^n}$ leképezéshez az $m/2^n$ paraméterértéket rendeljük hozzá.

18.7. *A $(P_{m/2^n})$ pontok halmaza az egyenesen mindenütt sűrű.*

Legyen K és L az egyenesnek két tetszőleges olyan pontja, melyek nem egymás képei a $\mathbf{J}$ involuciónál. Be fogjuk bizonyítani, hogy a KL kisszakaszon van legalább egy $P_{m/2^n}$ pont. Tegyük fel, hogy a KL kisszakasz KL irányítása megegyezik az $(OP_{1/4}U)$ irányítással. A $\mathbf{T}_K^{-1}$ leképezésnél a KL kisszakasz egy olyan OL' kisszakaszba megy át, mely **18.**6 szerint tartalmaz legalább egy $P_{1/2^n}$ pontot. Tegyük fel, hogy O különbözik K-tól és L-től s nem tartozik a KL kisszakaszhoz (különben a bebizonyítandó tétel **18.**6-ból következnék), s vegyük fel n-et elég nagynak, úgyhogy a $P_{(2^n-1)/2^n}OP_{1/2^n}$ kisszakasz ne tartalmazza se a K, se az L, se az L' pontot. Jelöljük m-mel azt a legnagyobb pozitív egész számot, melynél a $P_{1/2^n}, P_{2/2^n},\ldots, P_{m/2^n}$ pontok valamennyien az OKL szakaszhoz tartoznak. Ha ezek közül a pontok közül egyik sem tartozik a KL kisszakaszhoz, akkor a $P_{m/2^n}, P_{(m+1)/2^n}$ pontok által meghatározott kisszakasznak része a KL kisszakasz. A $\mathbf{T}^{-m/2^n}\mathbf{T}_K$ leképezésnél az előbbi az utóbbinak egy részébe megy át; $\mathbf{T}^{-m/2^n}$-nél ugyanis a $P_{m/2^n}P_{(m+1)/2^n}$ kisszakasz az $OP_{1/2^n}$

kisszakaszba megy át, mely része OL'-nek ; $\mathbf{T}_K$-nál pedig az OL' kisszakasz a KL kisszakaszba megy át. A $\mathbf{T}^{-m/2^n}\mathbf{T}_K$ leképezésnek volna tehát fixpontja a KL kisszakaszon, ami ellenmondás.

Ennek az eredménynek az alapján folytonosan kiterjeszthetjük az egyenes $P_{m/2^n}$ pontjaihoz, illetve a $\mathbf{G}$ csoport $\mathbf{T}^{m/2^n}$ elemeihez rendelt paraméter meghatározását az egyenes összes pontjaira, illetve a $\mathbf{G}$ csoport összes elemeire. Jelöljük P_x-szel az egyenesnek azt a pontját, és $\mathbf{T}^x$-szel a $\mathbf{G}$ csoportnak azt az elemét, mely az x paraméterértéknek felel meg. Ha x és t diadikus racionális számok, akkor a fentiek szerint a $\mathbf{T}^x$ és $\mathbf{T}^t$ leképezések szorzata a $\mathbf{T}^{x+t}$ leképezés. Tehát a P_x pontnak $\mathbf{T}^t$-nél származó képe : $\mathbf{T}^t(P_x)=\mathbf{T}^x\mathbf{T}^t(O)=\mathbf{T}^t\mathbf{T}^x(O)=\mathbf{T}^{x+t}(O)=$ $=P_{x+t}$. Mivel x és t folytonos, ez a kifejezés minden valós x és t értékre érvényes. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt :

18.8. Tétel. *Minden egytagú elliptikus csoporthoz megadható az egyenesen és a csoportban egy olyan x, illetve t paraméter* $(0\leq x<1$, $0\leq t<1)$, *mellyel a csoport összes leképezéseit a következő képlet fejezi ki:*

$$\mathbf{T}^t: x'=x+t \pmod 1.$$

A (mod 1) jel azt jelenti, hogy ha az (egynél kisebb) x és t számok összege $x+t\geq 1$, akkor ez a szám helyettesítendő azzal a $0\leq x<1$ számközbe eső számmal (jelen esetben $x+t-1$-gyel), melytől az $x+t$ összeg egész számmal különbözik.

Ebből a tételből is, de a fenti bizonyítás során nyert eredményekből közvetlenül is levezethető a következő tétel :

18.9. Tétel. *Az egyenes minden önmagára való elliptikus leképezése vagy periodikus, vagy pedig egy tetszőleges pontnak a leképezés hatványainál származó képei az egyenesen mindenütt sűrű halmazt alkotnak.*

Bizonyítás. Ha a $\mathbf{T}$ elliptikus leképezés nem periodikus, akkor egy tetszőleges P pontnak a leképezés hatványainál származó képei végtelen (azaz végtelen sok pontból álló) halmazt alkotnak, s ennek van legalább egy Q sűrűsödési pontja (**10**.1). A $\mathbf{T}$-t tartalmazó $\mathbf{G}$ egytagú elliptikus csoport periodikus leképezéseinél a Q pont képeinek halmaza az egyenesen mindenütt sűrű (**18**.7). Legyen KL az egyenes tetszőleges kisszakasza, s legyen ezen Q_1 egy olyan pont, melybe Q a $\mathbf{G}$ csoporthoz tartozó $\mathbf{S}_1$ periodikus leképezésnél megy át ; a Q_1L kisszakaszon van egy olyan Q_2 pont, melybe a Q pont a $\mathbf{G}$-hez tartozó $\mathbf{S}_2$ periodikus leképezésnél megy át. Az $\mathbf{S}=\mathbf{S}_2\mathbf{S}_1^{-1}$ leképezésnél a Q_1 pont képe Q_2. Mivel a P pontnak a $\mathbf{T}$ leképezés hatványainál származó $P^n = \mathbf{T}^n(P)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ képeiből álló ponthalmaz sűrűsödési pontja a Q pont, tehát a $Q, \mathbf{S}(Q)$ és a $Q, \mathbf{S}^{-1}(Q)$ kisszakaszok közül legalább az egyik tartalmaz a P^n pontok közül legalább kettőt; tegyük fel, hogy a $Q, \mathbf{S}(Q)$ kisszakasz tartalmazza a P^n és $P^{n'}$ pontokat. (Ellenkező esetben, ha a $Q, \mathbf{S}(Q)$ kisszakasz nem, akkor a $Q, \mathbf{S}^{-1}(Q)$ kisszakasz tartalmaz a P^n pontok közül legalább kettőt; ebben az esetben cseréljük fel Q_1 és Q_2, valamint $\mathbf{S}_1$ és $\mathbf{S}_2$ jelölését.) Tegyük fel továbbá, hogy $n' > n$, és legyen $\nu = n' - n$. A P^n pontnak a $\mathbf{T}^\nu$ leképezés hatványainál származó képei közül legalább egy a Q_1Q_2 kisszakaszhoz tartozik; ezt a **18.**7 tétel bizonyításában már alkalmazott, következő meggondolással mutathatjuk meg. A $P^n, P^{n'}, Q_1, Q_2$ pontok elrendezése legyen például $(P^nP^{n'}Q_1Q_2)$. J löljük m-mel azt a legnagyobb pozitív egész számot, melynél a $P^n, P^{n+\nu}, P^{n+2\nu}, \ldots, P^{n+m\nu}$ pontok valamennyien a $P^nP^{n'}Q_2$ szakaszhoz tartoznak. Ha ezek közül a pontok közül egyik sem tartozik a Q_1Q_2 kisszakaszhoz, akkor a Q_1Q_2 kisszakasz a $P^{n+m\nu}P^{n+(m+1)\nu}$ kisszakasznak része, s ez utóbbi a $\mathbf{T}^{-m\nu}\mathbf{S}_1$ leképezésnél a Q_1Q_2 kisszakasznak egy részébe megy át; ennek a leképezésnek volna fixpontja a Q_1Q_2 kisszakaszon, s ez ellenmondás. Ezzel a **18.**9 tételt bebizonyítottuk.

19. §. Leképezések aequivalenciája.

Értelmezés. Az a egyenes önmagára való $\mathbf{T}$ leképezését, s az a' egyenes önmagára való $\mathbf{T}'$ leképezését egymással *aequivalensnek* nevezzük, ha van az a egyenesnek az a' egyenesre olyan kölcsönösen egyértelmű $\mathbf{S}$ leképezése, mely $\mathbf{T}$-t $\mathbf{T}'$-be viszi át, oly értelemben, hogy *$\mathbf{T}$-nek $\mathbf{S}$-sel való transzformáltja* a $\mathbf{T}'$ leképezés:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{S}.$$

Ebben az esetben $\mathbf{T}$ a $\mathbf{T}'$ leképezésnek $\mathbf{S}$ inverzével való transzformáltja:

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}\mathbf{T}'\mathbf{S}^{-1}.$$

A *transzformálás művelete* azt jelenti, hogy az $\mathbf{S}^{-1}$ leképezéssel a'-t átvisszük a-ba, ezen elvégezzük az adott $\mathbf{T}$ leképezést, és $\mathbf{S}$-sel az a egyenest visszavisszük a'-be; ilyen módon az a' egyenes önmagára való leképezését kapjuk. Ha A az a egyenes tetszőleges pontja, s $B = \mathbf{T}(A)$ ennek $\mathbf{T}$-nél, továbbá $A' = \mathbf{S}(A)$ és $B' = \mathbf{S}(B)$ az A és B pontnak $\mathbf{S}$-nél származó képe, akkor a $\mathbf{T}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{S}$ leképezésnél az A' pontnak a B' képpont felel meg, vagyis: $B' = \mathbf{T}'(A')$.

A fenti értelmezés egyképpen vonatkozik két egymással azonos, vagy két különböző a és a' egyenesre. Hasonlóan értelmezzük leképezések aequivalenciáját más alakzatok önmagukra való leképezéseinek esetében.

Értelmezés. Az a egyenes önmagára való $\mathbf{T}$ projektív leképezését s az a' egyenes önmagára való $\mathbf{T}'$ projektív leképezését *projektív aequivalens*nek vagy röviden *aequivalens*nek nevezzük, ha van a-nak a'-re olyan $\mathbf{S}$ projektív leképezése, melynél $\mathbf{T}'=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{S}$.

Ha a $\mathbf{T}$ leképezésnek fixpontja A, akkor a $\mathbf{T}'=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{S}$ leképezésnek fixpontja az $A'=\mathbf{S}(A)$ pont. E szerint két egymással aequivalens leképezésnek ugyanannyi fixpontja van. Ha tehát $\mathbf{T}$ a-nak önmagára való parabolikus, hiperbolikus, illetve elliptikus projektív leképezése, akkor a $\mathbf{T}$-vel aequivalens leképezések sorban ugyanolyan típusúak.

19.1. *Bármely két parabolikus leképezés projektív aequivalens.*

Legyen ugyanis az a egyenes $\mathbf{T}$ parabolikus leképezésének fixpontja U, s a valamely A pontjának képe $B=\mathbf{T}(A)$. Az a' egyenes $\mathbf{T}'$ parabolikus leképezésének fixpontja legyen U', s a' valamely A' pontjának képe $B'=\mathbf{T}'(A')$. Van az a egyenesnek a'-re egy (és csak egy) olyan $\mathbf{S}$ projektív leképezése, mely az U, A, B pontnak az U', A', B' pontot felelteti meg (**5**.7). $\mathbf{T}$-nek $\mathbf{S}$-sel való transzformáltja az a' egyenes önmagára való projektív leképezése, melynek egyetlen fixpontja az $U'=\mathbf{S}(U)$ pont, s melynél az A' pont B'-be megy át ; ez egy parabolikus leképezés, mely **15**.7. tétel szerint megegyezik a megadott $\mathbf{T}'$ parabolikus leképezéssel : $\mathbf{T}'=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{S}$.

19.2. *Ha* $\mathbf{T}$ *és* $\mathbf{T}'$ *az a egyenes hiperbolikus leképezései, melyeknek fixpontjai ugyanazok, s ha* $\mathbf{T}$ *és* $\mathbf{T}'$ *aequivalens egymással, akkor* $\mathbf{T}$ *vagy* $\mathbf{T}'$*-vel, vagy* $\mathbf{T}'$ *inverzével azonos.*

Legyen ugyanis $\mathbf{S}$ az a egyenesnek olyan önmagára való projektív leképezése, melynél $\mathbf{T}'=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{S}$. A $\mathbf{T}$ leképezés két fixpontja U és V az $\mathbf{S}$ leképezésnél vagy önmagába, vagy egymásba megy át. Ha $\mathbf{S}$-nél U és V fixpontok, akkor $\mathbf{S}$ és $\mathbf{T}$ közös fixpontokkal bíró hiperbolikus leképezések, a **15**.4 tétel szerint felcserélhetők, s így

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{S}=\mathbf{T}.$$

Ha pedig $\mathbf{S}$-nél U és V egymásba megy át, akkor $\mathbf{S}\mathbf{T}$-nél is, s a **14**.1 tétel szerint $\mathbf{S}$ és $\mathbf{S}\mathbf{T}$ involutorius leképezések, tehát

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}, \text{ és } \mathbf{ST}.\mathbf{ST} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{TS}.\mathbf{T} = \mathbf{I},$$

ebből

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{TS} = \mathbf{T}^{-1}.$$

19.3. *Az a egyenes bármely* **T** *hiperbolikus leképezésének megfelel az a' egyenesnek pontosan két,* **T**-*vel aequivalens leképezése, melyeknek fixpontja két megadott U' és V' pont; a két leképezés egymás inverze.*

Jelöljük ugyanis **T** fixpontjait U-val és V-vel, s legyen A az a egyenesnek egy, ezektől különböző pontja; legyen továbbá A' az a' egyenesnek tetszőleges, U'-től és V'-től különböző pontja. Az a egyenesnek a'-re való projektív leképezését, melynél U, V, A az U', V', A' pontba megy át, jelöljük **S**-sel. **T**-nek **S**-sel való transzformáltja az a' egyenes önmagára való **T**$'$ hiperbolikus leképezése, melynek fixpontjai U' és V'; **19.2** folytán **T**$'$ független az A' pont megválasztásától. Ha $\mathbf{S}_1$ az a egyenesnek a'-re való projektív leképezése, mely az U, V, A pontokat a V', U', A' pontokba viszi át, akkor pedig $\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{TS}_1 = (\mathbf{T}')^{-1}$.

19.4. *Ha* **T** *és* **T**$'$ *az a egyenes önmagára való elliptikus leképezései, melyek az egyenesnek ugyanahhoz az egytagú elliptikus csoportjához tartoznak (vagyis ugyanazzal a* **J** *elliptikus involucióval cserélhetők fel), s ha* **T** *és* **T**$'$ *aequivalens egymással, akkor* **T** *vagy* **T**$'$-*vel, vagy* **T**$'$ *inverzével azonos.*

Legyen ugyanis **S** az a egyenesnek olyan projektív leképezése önmagára, melynél $\mathbf{T}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{TS}$. Mivel **T** és **J** felcserélhetők, ezeknek **S**-sel való transzformáltjai is:

$$(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{TS})\,(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{JS}) = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{TJ})\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{JT})\mathbf{S} = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{JS})\,(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{TS}).$$

J-nek **S**-sel való transzformáltja $\mathbf{J}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{JS}$ ugyancsak elliptikus involució, s mivel **J** és **J**$'$ mindketten felcserélhetők **T**$'$-vel, a **17.7** tétel szerint **J** azonos **J**$'$-vel, azaz:

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{JS} = \mathbf{J} \quad \text{és} \quad \mathbf{SJ} = \mathbf{JS}.$$

A **J** elliptikus involucióval felcserélhető **S** leképezés vagy elliptikus, a **T**-t tartalmazó egytagú elliptikus csoporthoz tartozik s mivel ez a csoport kommutatív (**17.10.** tétel), tehát

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{TS} = \mathbf{T}.$$

Vagy pedig **S** hiperbloikus involució, amelynek fixpontjai **J**-nél egymásba mennek át (**17.2** tétel); **S**-sel és **T**-vel együtt ezeknek

ST szorzata is felcserélhető **J**-vel, s mert **ST** megfordítja az egyenes irányítását, ez is hiperbolikus involució. Ebből következik, hogy $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}$, és

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{TS} = \mathbf{T}^{-1}.$$

Ebből az eredményből, ugyanúgy mint hiperbolikus leképezések esetében, adódik a következő:

19.5. *Az a egyenes bármely* **T** *elliptikus leképezésének megfelel az a' egyenesnek pontosan két olyan,* **T**-*vel aèquivalens elliptikus leképezése, mely a'-nek egy megadott* **J'** *elliptikus involuciójával felcserélhető; a két leképezés egymásnak inverze.*

Értelmezés. Az a egyenes önmagára való bizonyos projektív leképezéseiből álló **g** csoportot, s az a' egyenes önmagára való projektív leképezéseiből álló **g'** csoportot (projektív) *aequivalens*nek nevezzük, ha van az a egyenesnek a'-re olyan **S** projektív leképezése, mely **g** elemeit **g'** elemeibe viszi át. Az **S**-sel való transzformálás *izomorf vonatkozást* létesít a **g** és **g'** csoportok között: ha a **g** csoport $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ elemének a **g'** csoport $\mathbf{T}_1'$ és $\mathbf{T}_2'$ eleme, akkor a $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ szorzatnak a $\mathbf{T}_1'\mathbf{T}_2'$ szorzat felel meg; ugyanis $\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2)\mathbf{S}=(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}_1\mathbf{S})(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}_2\mathbf{S})$.

Fenti eredményeinkből könnyen adódik a következő tétel:

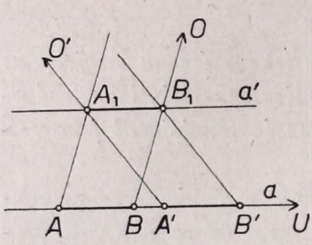
19.6. *Az egyenes bármely két egytagú csoportja, mely ugyanolyan típusú (elliptikus, hiperbolikus, illetve parabolikus), aequivalens egymással.*

20. §. Az egyenes affin leképezései.

Értelmezés. Az *affin síkot* a projektív síkból azáltal kapjuk, hogy egyik u egyenesét mint *végtelen távoli egyenest* kitüntetjük. Legyen a az affin síknak egy közönséges, azaz u-tól különböző egyenese, s U ennek végtelen távoli, vagyis az u egyenessel közös pontja. Az *a egyenes önmagára való affin leképezésé*nek nevezzük minden olyan önmagára való projektív leképezését, mely a végtelen távoli U pontját önmagába viszi át. (Hasonlóan értelmezzük két egyenesnek egymásra való affin leképezését.)

Az egyenes minden, önmagára való affin leképezése vagy hiperbolikus vagy parabolikus, a szerint, hogy U-n kívül van a leképezésnek még egy fixpontja, vagy nincs.

Az *affin parabolikus leképezés*eket a **13**.2 és **15**.7 tétel alapján a következő szerkesztéssel határozzuk meg. Felveszünk egy, a-tól különböző, s az U ponton átmenő, vagyis a-val párhuzamos a' egyenest, továbbá két, egymástól és U-tól különböző O és O' végtelen távoli pontot az a, a' egyeneseken átfektetett síkban. Az a egyenest O-ból a'-re, s ezt O'-ből a-ra vetítjük; a két vetítés összetétele a-nak önmagára való parabolikus leképezése, melynek fixpontja U. Az O és O' végtelen távoli pontokból való vetítés párhuzamos vetítés; ha A és B az a egyenes két tetszőleges pontja, s A_1, B_1 ezeknek az O pontból való vetítésnél az a' egyenesen, továbbá A' és B' az A_1 és B_1 pontoknak az O'-ből való vetítésnél az a egyenesen származó képe, akkor tehát az AA_1 és BB_1 egyenesek, s hasonlóan az A_1A' és $B\,B'$ egyenesek párhuzamosak (27. ábra). Mivel a és a' is párhuzamos, tehát az AB és A_1B_1 szakaszok, s ugyanúgy az A_1B_1 és $A'B'$ szakaszok egy-egy parallelogramma átellenes oldalai. (Az affin egyenes AB *szakaszán* a végesben fekvő, vagyis az U végtelen távoli pontot nem tartalmazó AB szakaszt értjük.)



27. ábra.

Ha az affin síkot az euklidesi síkból állítottuk elő, melyben a szakaszok egyenlősége általánosan értelmezve van, akkor az egybevágósági axiómákból következik, hogy az AB és $A'B'$ szakaszok egyenlők (l. első kötet, 216. o.); ebből adódik továbbá az is, hogy az AA' és BB' szakaszok egyenlők és az a egyenesre vonatkozóan megegyező irányúak. E szerint *az affin egyenes parabolikus leképezése az egyenesnek az AA' szakasszal önmagában való eltolása.*

Ha az affin síkot, mint fent, a projektív síkból állítjuk elő a végtelen távoli egyenes kitüntetésével, akkor általában nincs értelmezve szakaszok egyenlősége. De értelmezhetjük két párhuzamos, vagy ugyanazon az egyenesen fekvő szakasz egyenlőségét a következő előírással.

Legyen AA' és BB' két különböző egyenes; az AA' és BB' *irányított szakaszok* vagy *vektorok aequivalensek,* ha AA' párhuzamos BB'-vel és AB párhuzamos $A'B'$-vel. Az a egyenesen fekvő AA' és CC' vektorok aequivalensek egymással, ha mindketten aequivalensek egy, az a egyeneshez nem tartozó BB' vektorral. A DESARGUES-féle tételnek az affin síkra specializált esetéből következik, hogy ez az utóbbi értelmezés független a BB' vektor választásától; ugyanebből adódik továbbá, hogy ha két vektor egy harmadikkal, akkor a két vektor egymással is aequivalens (lásd erre vonatkozóan első kötet, 244. o.).

Két PQ és RS szakaszt, melyek párhuzamosak, vagy ugyanazon az egyenesen feküsznek, *egyenlőnek* nevezünk, ha a PQ vektor az RS, vagy az SR vektorral aequivalens. Mint könnyen belátható, a szakaszok egyenlőségére adott értelmezés eleget tesz a **III. 1—3** egybevágósági axiomáknak (első kötet, 72 o.).

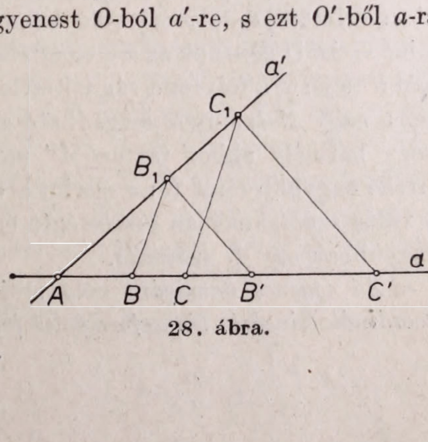
Az affin egyenesnek az AA' szakasszal való eltolásánál minden B pontnak azt a B' pontot feleltetjük meg, melyre az AA' és BB' vektorok aequivalensek.

Az *AB szakasz középpontján* azt a C pontot értjük, melyre az AC és CB vektorok aequivalensek. A teljes négyszög harmonikus tulajdonságából következik, hogy az AB szakasz C középpontja az AB egyenes U végtelen távoli pontjának az A, B pontokra vonatkozó harmonikus párja.

A **15**.8 tétel folytán egy tetszőleges P pontnak a **T** parabolikus leképezés pozitív és negatív kitevőjű hatványainál származó képei: $\ldots, P_{-n}, \ldots, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ az affin egyenesen egy *aequidistans pontsorozatot* képeznek, azaz minden n-re a P_nP_{n+1} vektor aequivalens a P_0P_1 vektorral.

Az affin egyenes hiperbolikus involuciója, mely az O pontot (és U-t) önmagába viszi át, minden P pontnak az O, U pontokra vonatkozó harmonikus párját, tehát azt a P' pontot fel lteti meg, melyre a $P'O$ és OP vektorok aequivalensek. Ez a leképezés az *egyenesnek az O pontra vonatkozó tükrözése.*

Az *affin hiperbolikus leképezéseket* a **13**.2 tétel szerint következőképpen szerkeszthetjük meg. Legyen U és A a **T** hiperbolikus leképezés két fixpontja. Az A ponton átfektetünk egy, a-tól különböző a' egyenest, s felveszünk két, U-tól s egymástól különböző O és O' végtelen távoli pontot. Az a egyenest O-ból a'-re, s ezt O'-ből a-ra vetítjük; a két vetítés összetétele hiperbolikus leképezés, melynek fixpontjai U és A.



28. ábra.

Legyen B és C az a egyenes két tetszőleges, A-tól különböző pontja, B_1 és C_1 ezeknek az O pontból való vetítésnél az a' egyenesen, továbbá B' és C' a B_1, C_1 pontoknak az O' pontból való vetítésnél az a egyenesen származó képe. A BB_1 egyenes párhuzamos CC_1-gyel, s ugyanúgy B_1B' párhuzamos C_1C'-vel (28. ábra).

Ha az affin síkot az euklidesi síkból származtatjuk, akkor a fenti szerkesztéssel nyert leképezés *az egyenesnek az A középpontra vonatkozó hasonlósági leképezése,* melynél minden B és C pontra s ezeknek B' és C' képére fennáll a következő arány :

$$AB : AB' = AC : AC'.$$

Az euklidesi síkra, illetve az egybevágósági axiómákra való hivatkozás nélkül is eljuthatunk ugyanerre az eredményre, párhuzamos szakaszok egyenlőségének fenti értelmezése alapján. Ennek az eljárásnak részleteit illetően, lásd a következő szakasz tárgyalását.

Eredményeinket a következő tételben foglaljuk össze :

20.1. *Az egyenes minden önmagára való affin leképezése vagy parabolikus, s ebben az esetben az egyenesnek önmagában való eltolása, vagy hiperbolikus, s ekkor az egyenesnek egy A középpontra vonatkozó hasonlósági leképezése.*

21. §. Az egyenes projektív leképezéseinek analitikus kifejezése.

A 11. §-ban harmonikus pontsorozatok segítségével értelmeztünk az egyenesen egy projektív koordinátát, amennyiben az egyenes minden P pontjának (egy U pont kivételével) megfeleltettünk egy x valós számot, kölcsönösen egyértelmű módon s a rendezési vonatkozások megtartásával. *Az x koordináta folytonos* az egyenes minden U-tól különböző P pontjában, a következő értelemben : ha a P pont koordinátája x, s ha ε tetszőleges kis pozitív szám, akkor megadható a P pontnak olyan környezete, hogy bármely ahhoz tartozó P' pont x' koordinátájának x-től való különbsége abszolut értékben kisebb mint ε. Az U pontnak az $x=\infty$ értéket feleltetjük meg ; ebben a pontban is teljesül a folytonosság feltétele a következő értelemben : tetszőleges nagy N számhoz megadható az U pontnak olyan környezete, hogy bármely ahhoz tartozó P' pont x' koordinátájának abszolut értéke nagyobb mint N; e szerint a ∞ *számérték környezetén* azoknak a valós számoknak az összességét értjük, melyek abszolut értékben nagyobbak egy N számnál.

Az egyenes önmagára való projektív leképezéseit az x projektív koordináta lineáris transzformációi fejezik ki ; azaz minden projektív leképezésnek megfelel négy olyan valós a, b, c, d szám ($ad-bc \neq 0$), hogy bármely P pont x koordinátája s képpontjának x' koordinátája között az

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}$$

összefüggés áll fenn. Ennek a tételnek a bebizonyításával fogunk most foglalkozni.

Legyenek P_0, P_1, U az egyenesen értelmezett projektív koordináta alappontjai. A P_0 pontot O-val, az x koordinátájú pontot P_x-szel, vagy x-szel is fogjuk jelölni.

21.1. *Az O, U fixpontokra vonatkozó hiperbolikus leképezések.*

Jelöljük $\mathbf{T}_r$-rel azt a hiperbolikus leképezést, melynek fixpontjai O és U, s mely a P_1 pontot az r koordinátájú P_r pontba viszi át.

Tegyük fel először, hogy r diadikus racionális szám. Mivel a $\mathbf{T}_r$ leképezés a P_0, P_1, U pontokat a P_0, P_r, U pontokba, ezért az előbbi ponthármas által származtatott harmonikus sorozat m-edik elemét, azaz P_m-et, az utóbbi ponthármas által származtatott harmonikus sorozat m-edik elemébe, azaz P_{mr}-be viszi át. A $P_0, P_{1/2^n}, U$ pontok által származtatott harmonikus sorozatban P_1 a 2^n-edik elem; ennek $\mathbf{T}_r$-nél a $P_0, P_{r/2^n}, U$ pontok által származtatott harmonikus sorozat 2^n-edik eleme, P_r felel meg, tehát minden m-nél az első sorozat m-edik elemének a $\mathbf{T}_r$ leképezés a második sorozat m-edik elemét, vagyis $m/2^n$-nek $mr/2^n$-et felelteti meg. E szerint minden diadikus racionális x pontnak $\mathbf{T}_r$-nél az $x'=rx$ pont felel meg. Mivel a $\mathbf{T}_r$ leképezés folytonos (**10**.3 tétel), s az x koordináta az egyenesen folytonos, tehát minden valós x számra is érvényes ez a megállapításunk, s e szerint a $\mathbf{T}_r$ leképezés kifejezése:

$$\mathbf{T}_r: \quad x' = r.x.$$

Másodszor, ha $r=\varrho$ nem diadikus racionális szám, jelentsen x tetszőleges diadikus racionális számot. Az x pontnak $\mathbf{T}_\varrho$-nál származó képe megegyezik a P_1 pontnak a $\mathbf{T}_x$ és a $\mathbf{T}_\varrho$ leképezések $\mathbf{T}_x\mathbf{T}_\varrho$ szorzatánál származó képével; ugyanis $\mathbf{T}_x$-nél a P_1 pont x-be megy át. A **15**.4 tétel szerint az O, U fixpontokhoz tartozó $\mathbf{T}_x$, $\mathbf{T}_\varrho$ hiperbolikus leképezések felcserélhetők, azaz $\mathbf{T}_x.\mathbf{T}_\varrho = \mathbf{T}_\varrho.\mathbf{T}_x$. Ezért x-nek $\mathbf{T}_\varrho$-nál származó képe megegyezik ϱ-nak $\mathbf{T}_x$-nél származó képével, tehát előbbi eredményünk szerint

$$\mathbf{T}_\varrho(x) = \mathbf{T}_x(\varrho) = x.\varrho.$$

Ebből következik, tekintettel a $\mathbf{T}_\varrho$ leképezés és a koordináta folytonosságára, hogy minden x-nél $\mathbf{T}_\varrho$ kifejezése:

$$\mathbf{T}_\varrho: \quad x' = \varrho . x.$$

21.2. *Az O, U fixpontokhoz tartozó $\mathbf{J}_{OU}$ hiperbolikus involució* kifejezése, mivel ennél a leképezésnél a P_1 pont a P_{-1} pontba megy át, **21**.1 szerint:

$$\mathbf{J}_{OU}: \quad x' = -x.$$

21.3. *A P, U fixpontokhoz tartozó $\mathbf{J}_{PU}$ hiperbolikus involució.*

Ha $P = P_r$ diadikus racionális pont, s x egy másik diadikus racionális pont, írjuk fel r-et és x-et közös nevezővel:

$$r = \frac{a}{2^n}, \quad x = \frac{b}{2^n} \qquad (a, b, n \text{ egész számok, } n \geqq 0).$$

A **11**.1 tétel szerint a P_0, $P_{1/2^n}$, U pontok által származtatott harmonikus sorozatban a b-edik és a $(2a-b)$-edik elem harmonikusan választja el egymástól az a-adik elemet és az U pontot; e szerint a $\mathbf{J}_{PU}$ involuciónál az

$$x = \frac{b}{2^n} \quad \text{és az} \quad x' = \frac{2a-b}{2^n} = 2r - x$$

pont egymásnak felel meg. A leképezés s a koordináta folytonosságát tekintve adódik ebből minden x-re $\mathbf{J}_{PU}$ következő kifejezése:

$$\mathbf{J}_{PU}: \quad x' = 2r - x.$$

21.4. *Az U fixponthoz tartozó parabolikus leképezések* előállíthatók két, az U fixponthoz tartozó $\mathbf{J}_{OU}$ és $\mathbf{J}_{PU}$ hiperbolikus involució szorzataként (**16**.3). Ha P diadikus racionális pont, koordinátája r, akkor **21**.2 és 3 szerint a $\mathbf{J}_{OU} . \mathbf{J}_{PU}$ leképezés kifejezése:

$$x' = x + 2r.$$

Ez a $\mathbf{T}'_{2r}$ parabolikus leképezés az O pontot a $2r$ pontba viszi át. Ha ϱ nem diadikus racionális szám, legyen x egy diadikus racionális szám, és $\mathbf{T}'_\varrho$, illetve $\mathbf{T}'_x$ az az U fixponthoz tartozó parabolikus leképezés, melynél az O pont rendre a ϱ, illetve az x pontba megy át. Mivel ez a két leképezés a **15**.10 tétel szerint felcserélhető, tehát az x pontnak $\mathbf{T}'_\varrho$-nél származó képe ϱ-nak $\mathbf{T}'_x$-nél származó képével, azaz $x+\varrho$-val megegyezik. A $\mathbf{T}'_\varrho$ leképezés és a koordináta folytonosságára való tekintettel adódik ebből minden valós x értékre $\mathbf{T}'_\varrho$ következő kifejezése:

$$\mathbf{T}'_\varrho: \quad x' = x + \varrho.$$

21.5. Minden *az U pontot változatlanul hagyó* **S** *projektív leképezés* előállítható egy parabolikus és egy hiperbolikus leképezés szorzataként, melyeknél U fixpont. Legyen ugyanis A és B az O és P_1 pontnak az $\mathbf{S}^{-1}$ leképezésnél származó képe. A **15.**7 tétel szerint van egy és csak egy olyan $\mathbf{T}'$ parabolikus leképezés, mely U-t önmagába, és az A pontot O-ba viszi át; ennél a B pont valamely B' pontba megy át. A **15.**2 tétel szerint van egy és csak egy olyan **T** hiperbolikus leképezés, melynél O és U önmagába, s a B' pont P_1-be megy át. A két leképezés $\mathbf{T}'\mathbf{T}$ szorzata ugyanúgy, mint az **S** leképezés, az A, B, U pontokat rendre az O, P_1, U pontokba viszi át, s ezért az **5.**5 tétel folytán $\mathbf{S} = \mathbf{T}'\mathbf{T}$. **21.**1 és 4 szerint tehát minden, az U fixponthoz tartozó projektív leképezés az

$$x' = ax + b$$

lineáris egész transzformációival fejezhető ki, hol $a \neq 0$.

Megfordítva, minden ilyen transzformáció egy, az U fixponthoz tartozó projektív leképezést állít elő, tudniillik azt, mely az O és a P_1 pontot rendre a b, illetve az $a+b$ koordinátájú pontba viszi át.

21.6. *A P_1, P_{-1} fixpontokhoz tartozó $\mathbf{J}_{1,-1}$ hiperbolikus involució* felcseréli egymással az O és U pontot, mivel O, U, P_1, P_{-1} harmonikus pontnégyes. Legyen c az egyenes valamely pontjának koordinátája, s jelöljük $\mathbf{J}(c)$-vel a $\mathbf{J}_{1,-1}$ involuciónál származó képének koordinátáját. A $\mathbf{T}_c$ hiperbolikus leképezés, mely O-t és U-t önmagába, s a P_1 pontot c-be viszi át, kifejezhető **21.**1 szerint a

$$\mathbf{T}_c: \quad x' = cx$$

képlettel. A $\mathbf{T}_c . \mathbf{J}_{1,-1}$ leképezésnél O és U egymásba megy át, tehát ez a leképezés involutorius (**14.**1). A P_1 pont ennél a $c' = \mathbf{J}(c)$ pontba, s ezért a c' pont P_1-be megy át. Másrészt a c' pont $\mathbf{T}_c$-nél a fenti képlet szerint a cc' pontba, s ez $\mathbf{J}_{1,-1}$-nél a $\mathbf{J}(cc')$ pontba megy át; ezért a $\mathbf{J}(cc') = P_1$ pont koordinátája: $\mathbf{J}(cc') = 1$. Mivel a P_1 pont $\mathbf{J}_{1,-1}$-nek fixpontja, ebből következik, hogy $cc' = 1$, vagyis $c' = 1/c$. Tegyünk ebben a képletben c és c' helyett x-et és x'-t, így kapjuk $\mathbf{J}_{1,-1}$ következő kifejezését:

$$\mathbf{J}_{1,-1}: \quad x' = \frac{1}{x}.$$

21.7. *Minden hiperbolikus involució lineáris transzformációval fejezhető ki.* Ha az involució egyik fixpontja U, akkor **21**.2 és 3 szerint érvényes ez az állításunk. Ha a két fixpont, P és Q különbözik U-tól, akkor van egy olyan $\mathbf{S}$ projektív leképezés, mely U-t önmagába, és a P_1, P_{-1} pontokat a P, Q pontokba viszi át; $\mathbf{S}$ lineáris egész transzformációval fejezhető ki **21**.5 szerint. A $\mathbf{J}_{PQ}$ involució megegyezik $\mathbf{J}_{1,-1}$-nek $\mathbf{S}$-sel való $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{J}_{1,-1}\mathbf{S}$ transzformáltjával, s mivel $\mathbf{S}^{-1}$, $\mathbf{J}_{1,-1}$ és $\mathbf{S}$ lineáris transzformációk, ezeknek szorzata, $\mathbf{J}_{PQ}$ is lineáris transzformáció (l. **22**.2).

21.8. Az egyenes minden önmagára való projektív leképezése lineáris transzformációval fejezhető ki, mivel előállítható legfeljebb három hiperbolikus involució szorzataként (**17**.4).

Megfordítva, minden lineáris transzformáció az egyenesnek önmagára való projektív leképezését fejezi ki; az

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (ad-bc \neq 0)$$

lineáris transzformáció annak a projektív leképezésnek a kifejezése, mely az O, P_1, U pontokat rendre a b/d, $(a+b)/(c+d)$, a/c koordinátájú pontokba viszi át; ha valamelyik tört nevezője 0, számlálója 0-tól különbözik, az ennek megfelelő pont az U pont.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

21.9. Tétel. *Az egyenes minden önmagára való projektív leképezését az x projektív koordináta lineáris transzformációjával fejezhetjük ki; azaz minden projektív leképezésnek megfelel négy olyan a, b, c, d valós szám $(ad-bc \neq 0)$, hogy bármely pont x koordinátája, s a képpont x' koordinátája között az*

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}$$

összefüggés áll fenn.

Az egyenes önmagára való affin leképezéseinek kifejezésére bevezetünk az egyenesen egy *affin koordinátát,* azaz egy olyan x projektív koordinátát, melynek U $(x=\infty)$ alappontja az egyenes végtelen távoli pontjával egybeesik. Erre alkalmazva a **21**.5 alatti eredményt, a következő tételt kapjuk:

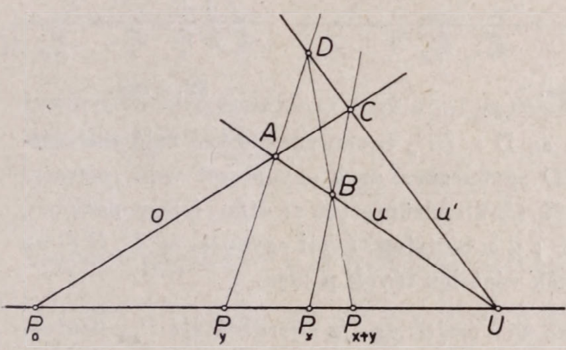
21.10. *Az egyenes önmagára való affin leképezéseit az x affin koordináta*

$$x' = ax + b$$

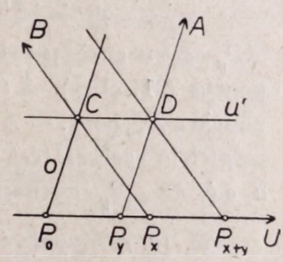
lineáris egész transzformációi fejezik ki; a leképezés parabolikus, vagy hiperbolikus, a szerint, hogy $a=1$, vagy $a \neq 1$.

Alapműveletek az egyenes pontjaival.

21.11. Ha x és y két tetszőleges valós szám, az x és y koordinátájú P_x *és* P_y *pontok összegén* értjük az $x+y$ koordinátájú P_{x+y} pontot. Az $x'=x+y$ képlet az egyenesnek azt a parabolikus leképezését fejezi ki, melynél az U ($x=\infty$) pont fixpont, s amely a P_0 pontnak a P pontot felelteti meg; ennél a leképezésnél a P_x pont a P_{x+y} pontba megy át (**21**.4). Ezt a parabolikus leképezést a **13**.2 tétel értelmében megszerkeszthetjük egy tetszőleges, a megadott a egyenesen átmenő



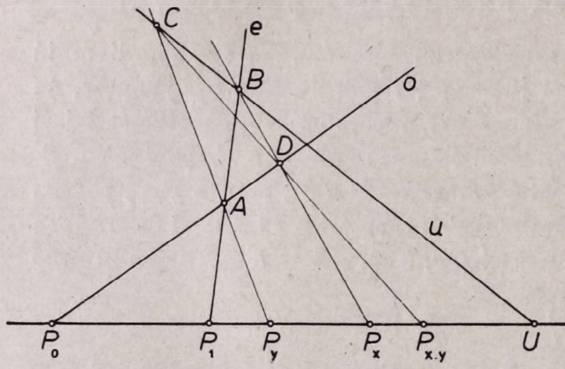
29. ábra.



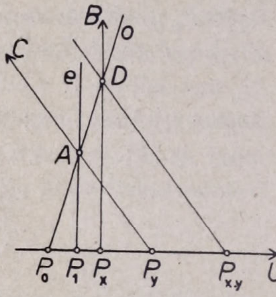
30. ábra.

a síkban; felveszünk egy o egyenest a P_0, s két u és u' egyenest az U ponton át, melyek egymástól és a-tól különböznek (29. ábra). Jelöljük az o egyenesnek u-val és u'-vel közös pontját A-val és C-vel. Kössük össze A-t P_y-nal, C-t P_x-szel, s jelöljük az AP_y és u' egyenesek metszéspontját D-vel, a CP_x és u egyenesek metszéspontját B-vel. A BD egyenesnek az a egyenessel való metszéspontja a P_{x+y} pont. — A 30. ábrán ennek az összeadásnak az affin síkban megfelelő szerkesztést is feltüntettük; u a végtelen távoli egyenes, és U az a egyenes végtelen távoli pontja.

21.12. A P_x és P_y *pontok szorzatán* értjük az xy koordinátának megfelelő P_{xy} pontot; ez a P_x pontnak a képe annál a hiperbolikus leképezésnél, melynek fixpontjai P_0 és U, s mely a P_1 pontot P_y-ba viszi át (**21**.1). A leképezést a **13**.2 tétel szerint következőképpen szerkeszthetjük meg. Felveszünk az a síkban a P_0, P_1 és U ponton át egy-egy o, e és u egyenest, melyeknek nincs közös pontja; jelöljük A-val o és e metszéspontját, B-vel e és u metszéspontját. Legyen C az



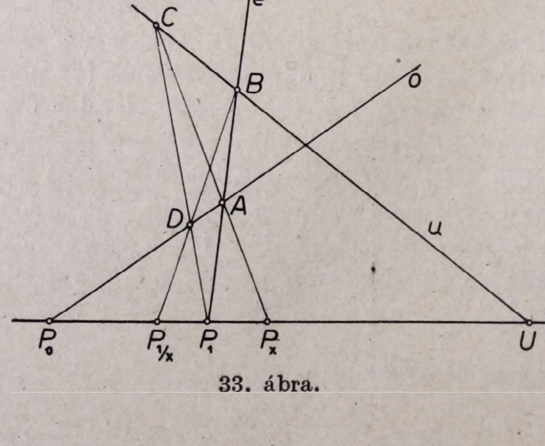
31. ábra.



32. ábra.

AP_y egyenesnek u-val, és D a BP_x egyenesnek o-val való metszéspontja (31. ábra). A CD egyenesnek az a egyenessel való metszéspontja a P_{xy} pont. — A 32. ábrán feltüntettük az affin síkra vonatkozó, megfelelő szerkesztést is; u a végtelen távoli egyenes, és U, B, C az a, e és az AP_y egyenesnek végtelen távoli pontja.

21.13. A P_x *pont inverzén* értjük az $1/x$ koordinátájú $P_{1/x}$ pontot. A szorzat fenti megszerkesztéséből könnyen adódik a $P_{1/x}$ pont követ-



33. ábra.

kező megszerkesztése. Legyenek az α síkban o, e, u közös pont nélküli egyenesek, melyek sorban a P_0, P_1, U ponton mennek át. Legyen A az o, e és B az u, e egyenespárok metszéspontja. Az AP_x egyenesnek u-val való C metszéspontját összekötjük P_1-gyel; jelöljük D-vel a CP_1 egyenesnek o-val közös pontját (33. ábra); a BD és a egyenesek metszéspontja $P_{1/x}$. Könnyen belátható, hogy ugyanezt a $P_{1/x}$ pontot kapjuk meg, ha előbb a P_1 pontnak a P_0, U pontokra vonatkozó P_{-1} harmonikus konjugáltját, majd a P_x pontnak a P_1, P_{-1} pontokra vonatkozó $P_{1/x}$ harmonikus konjugáltját szerkesztjük meg (l. **21.**6).

22. §. Lineáris transzformációk.

A lineáris transzformációkkal a 91. §-ban fogunk részletesen foglalkozni; itt csak néhány megjegyzést teszünk.

Legyenek a, b, c, d olyan valós számok, melyekre $ad-bc \neq 0$. Az

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{1}$$

lineáris transzformációnak fixpontjai azoknak az x számoknak felelnek meg, melyekre

$$x = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{2}$$

vagyis x eleget tesz a következő *fixpont-egyenlet*nek:

$$cx^2 + (d-a)x - b = 0.$$

Ha $c=0$, akkor a lineáris transzformáció kifejezése:

$$x' = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}:$$

ennek fixpontja az U $(x=\infty)$ pont. Ha $a \neq d$, akkor van még egy fixpontja a leképezésnek:

$$x = \frac{b}{d-a};$$

ha pedig $a=d$, akkor $x=\infty$ az egyedüli fixpont. Az előbbi esetben *hiperbolikus*, az utóbbiban *parabolikus* a leképzés.

Ha $c \neq 0$, akkor a fixpontok meghatározására szolgáló fenti egyenlet másodfokú, s gyöke két egymástól különböző valós szám, vagy egy valós szám, vagy két konjugált komplex szám, a szerint, hogy

$$(a-d)^2+4bc=(a+d)^2-4(ad-bc)$$

pozitív, zérus, vagy negatív. A három esetnek megfelelően a leképezés rendre *hiperbolikus, parabolikus*, illetve *elliptikus*.

22.1. Tétel. *Az* (1) *lineáris transzformáció megtartja, vagy megfordítja az egyenes irányítását, a szerint, hogy az $ad-bc$ determináns pozitív, vagy negatív.*

Legyen ugyanis x_1, x_2, x_3 három tetszőleges olyan valós szám, melynek $(x_1x_2x_3)$ ciklikus elrendezése az x érték növekedésének megfelelő, pozitív irányítást határozza meg, akkor

$$(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)>0.$$

Az (1) lineáris transzformációnál az x_i értéknek az

$$x_i'=\frac{ax_i+b}{cx_i+d} \qquad (i=1,2,3)$$

érték, s az x_i-x_k különbségnek az

$$x_i'-x_k'=\frac{(ad-bc)(x_i-x_k)}{(cx_i+d)(cx_k+d)}$$

érték felel meg. E szerint

$$(x_1'-x_2')(x_2'-x_3')(x_3'-x_1')=$$
$$=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)\frac{(ad-bc)^3}{[(cx_1+d)(cx_2+d)(cx_3+d)]^2}$$

s így a baloldalon álló kifejezés előjele megegyezik az $(ad-bc)$ determináns előjelével. Ha $ad-bc>0$, akkor

$$(x_1'-x_2')(x_2'-x_3')(x_3'-x_1')>0$$

s ezért az $(x_1'x_2'x_3')$ ciklikus elrendezés az egyenesen a pozitív irányítást határozza meg, és megfordítva.

22.2 Az

$$x'=\frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{és} \quad x'=\frac{a'x+b'}{c'x+d'}$$

lineáris transzformációknak ebben a sorrendben vett *szorzata* a következő lineáris transzformáció:

$$x'=\frac{a'\dfrac{ax+b}{cx+d}+b'}{c'\dfrac{ax+b}{cx+d}+d'}=\frac{(aa'+cb')x+(ba'+db')}{(ac'+cd')x+(bc'+dd')}.$$

22.3 Az

$$x'=\frac{ax+b}{cx+d}$$

lineáris transzformáció *inverze* az

$$x'=\frac{dx-b}{-cx+a}=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

lineáris transzformáció.

22.4 Ha egy lineáris transzformáció *involutorius*, akkor megegyezik az inverzével, tehát a fenti képletek szerint $d=-a$. Az involuciók kifejezése tehát a következő:

$$x'=\frac{ax+b}{cx-a}\qquad (a^2+bc\neq 0);$$

ez az involució *hiperbolikus*, vagy *elliptikus*, a szerint, hogy a^2+bc pozitív, vagy negatív.

23. §. A kettősviszony értelmezése projektív alapon.

Az x projektív koordinátát az egyenesen a projektív geometria axiómái (**P I, II** és **D**) alapján vezettük be (**11**.7); ennek a koordinátának segítségével az egyenes négy tetszőleges A, B, C, D pontjának kettősviszonyát mint a megfelelő x_1, x_2, x_3, x_4 koordinátákból alkotott

$$(x_1x_2x_3x_4)=\frac{(x_3-x_1)(x_4-x_2)}{(x_4-x_1)(x_3-x_2)}$$

kettősviszonyt értelmezzük. Meg kell azonban mutatnunk, hogy a kettősviszony értéke független az x projektív koordináta speciális választásától.

Legyenek P_0, P_1, U az x projektív koordináta alappontjai; legyen P_0', P_1', U' az egyenes tetszőleges másik ponthármasa, s jelöljük x'-vel az ezekre az alappontokra vonatkozó projektív koordinátát. Ha **T** az egyenesnek az az önmagára való projektív leképezése, mely a P_0, P_1, U pontoknak rendre a P'_0, P'_1, U' pontokat felelteti meg, akkor minden P pontnak x koordinátája egyenlő a **T**-nél származó $P' = \mathbf{T}(P)$ képpontjának x' koordinátájával: $x' = x$. Ugyanis a **T** leképezés megtartja a harmonikus elválasztásokat, s ezért a $P_0, P_1, P_2, \ldots$ harmonikus sorozat **T**-nél a $P'_0, P'_1, P'_2, \ldots$ harmonikus sorozatba, s ugyancsak a $P_0, P_{1/2^n}, U$ pontok által származtatott harmonikus sorozat a $P'_0, P'_{1/2^n}, U'$ pontok által származtatott harmonikus sorozatba megy át. Ebből következik, hogy minden $x = \frac{a}{2^n}$ diadikus racionális koordinátájú P pontnak **T**-nél származó P' képéhez az $x' = \frac{a}{2^n}$ koordinátaérték tartozik. A projektív koordináta folytonosságára való tekintettel, következik ebből továbbá, hogy bármely P pontnak x koordinátája és képének x' koordinátája egyenlő.

A **T** projektív leképezést a **21.**9 tétel szerint az x' koordináta lineáris transzformációja állítja elő; legyen **T** kifejezése:

$$x = \frac{ax' + b}{cx' + d} \qquad (ad - bc \neq 0).$$

Ha A, B, C, D az egyenes négy tetszőleges pontja, s ezeknek x' koordinátája x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, akkor x koordinátájuk:

$$x_i = \frac{ax'_i + b}{cx'_i + d} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

A két koordinátarendszerre vonatkozó kettősviszonyok egyenlők, mint a következő számolás igazolja:

$$(x_1x_2x_3x_4) = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)} =$$
$$= \frac{\left(\frac{ax'_3+b}{cx'_3+d} - \frac{ax'_1+b}{cx'_1+d}\right)\left(\frac{ax'_4+b}{cx'_4+d} - \frac{ax'_2+b}{cx'_2+d}\right)}{\left(\frac{ax'_4+b}{cx'_4+d} - \frac{ax'_1+b}{cx'_1+d}\right)\left(\frac{ax'_3+b}{cx'_3+d} - \frac{ax'_2+b}{cx'_2+d}\right)} =$$
$$= \frac{(x'_3 - x'_1)(x'_4 - x'_2)}{(x'_4 - x'_1)(x'_3 - x'_2)} = (x'_1x'_2x'_3x'_4).$$

Az $(x_1x_2x_3x_4)$ kettősviszonyt *az* x_1, x_2, x_3, x_4 *számok kettősviszonyának* is fogjuk nevezni, s fenti számolásunk eredményére a következő alakban fogunk hivatkozni:

23.1. *Bármely négy x_1, x_2, x_3, x_4 számnak s egy tetszőleges lineáris transzformációnál megfelelő négy x_1', x_2', x_3', x_4' számnak a kettősviszonya egyenlő, vagyis a kettősviszonyok lineáris transzformációknál, melyeknek $ad-bc$ determinánsa 0-tól különbözik, változatlanok.*

A projektív módon értelmezett kettősviszony az 5. §-ban bevezetett kettősviszonnyal megegyezik, ha az egyenesen szakaszok egyenlősége értelmezve van az euklidesi **III. 1—3** axiómák szerint.

24. §. Homogén koordináták.

Az analitikus tárgyalásban nagyobb szimmetriát érhetünk el, ha az x projektív koordinátát homogén (x_1, x_2) koordinátákkal helyettesítjük a következő előírás szerint. Az x koordinátájú P pontnak megfeleltetünk minden olyan (x_1, x_2) számpárt, melyre

$$x = \frac{x_1}{x_2};$$

az $x = \infty$ koordinátájú U ponthoz az $(x_1, 0)$ számpárt, s az $x = 0$ koordinátájú O ponthoz a $(0, x_2)$ számpárt rendeljük hozzá, melyekben x_1 és x_2 tetszőleges, 0-tól különböző számok. E szerint az (x_1, x_2) és a $(\lambda x_1, \lambda x_2)$ számpárok ugyanannak a pontnak a koordinátái $(\lambda \neq 0)$.

Ha (y_1, y_2) és (z_1, z_2) az egyenes két különböző pontjának egy-egy teljesen meghatározott homogén koordináta-párja, akkor az egyenes minden P pontjának megfelel egy, arányossági tényezőtől eltekintve, egyértelműen meghatározott, olyan λ, μ számpár, melyre

$$x_1 = \lambda y_1 + \mu z_1, \quad x_2 = \lambda y_2 + \mu z_2$$

az illető P pont homogén koordinátái. Ha ugyanis ezt a két egyenletet a λ, μ ismeretlenek meghatározására szolgáló egyenletrendszernek tekintjük, melyben x_i, y_i, z_i fix számértékek, akkor van az egyenletrendszernek egy és csak egy λ, μ megoldása (λ és μ nem mindkettő 0), mivel $y_1 z_2 - y_2 z_1 \neq 0$.

24.1. *Az egyenes négy tetszőleges $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, P^{(4)}$ pontjának kettősviszonya egyenlő az ezeknek a fenti előállításban megfelelő λ, μ értékekből alkotott*

$$\left(\frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}} \; \frac{\lambda^{(2)}}{\mu^{(2)}} \; \frac{\lambda^{(3)}}{\mu^{(3)}} \; \frac{\lambda^{(4)}}{\mu^{(4)}}\right)$$

kettősviszonnyai. Ugyanis a fenti képletekből:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1\frac{\lambda}{\mu} + z_1}{y_2\frac{\lambda}{\mu} + z_2}$$

s ez azt jelenti, hogy a $\frac{\lambda}{\mu}$ számokból a megfelelő $\frac{x_1}{x_2}$ értékeket lineáris transzformációval kapjuk, melynek együtthatói y_1, z_1, y_2, z_2, s determinánsa $y_1z_2 - y_2z_1 \neq 0$. Tehát **23**.1 folytán

$$\left(\frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}}\ \frac{\lambda^{(2)}}{\mu^{(2)}}\ \frac{\lambda^{(3)}}{\mu^{(3)}}\ \frac{\lambda^{(4)}}{\mu^{(4)}}\right) = \left(\frac{x_1^{(1)}}{x_2^{(1)}}\ \frac{x_1^{(2)}}{x_2^{(2)}}\ \frac{x_1^{(3)}}{x_2^{(3)}}\ \frac{x_1^{(4)}}{x_2^{(4)}}\right)$$

s a jobboldalon álló kifejezés az értelmezés szerint a $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, P^{(4)}$ pontok kettősviszonya.

Helyettesítsünk az $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ lineáris transzformációban x helyett $\frac{x_1}{x_2}$-t és x' helyett $\frac{x_1'}{x_2'}$-t ; adódik a következő egyenlet :

$$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{ax_1 + bx_2}{cx_1 + dx_2}$$

mely aequivalens a következő két egyenletből álló egyenletrendszerrel :

$$\varrho x_1' = ax_1 + bx_2, \qquad \varrho x_2' = cx_1 + dx_2 \qquad (\varrho \neq 0) ;$$

az együtthatók jelölésének alkalmas módosításával így is fogjuk írni :

$$\varrho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \qquad \varrho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2.$$

A fixpontok meghatározására ebben az esetben a következő egyenletrendszer szolgál :

$$(a_{11} - \varrho)x_1 + a_{12}x_2 = 0$$
$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \varrho)x_2 = 0.$$

Ennek az egyenletrendszernek akkor és csak akkor van a (0, 0) számpártól különböző (x_1, x_2) megoldása, ha determinánsa nullával egyenlő :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho \end{vmatrix} = \varrho^2 - \varrho(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

Az utóbbi, ϱ-ban másodfokú egyenlet gyöke két, egymástól különböző valós szám, vagy egy valós szám, vagy két konjugált komplex szám, a szerint, hogy

$$(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$$

pozitív, zérus vagy negatív. A három esetnek megfelelően a leképezés rendre *hiperbolikus, parabolikus,* illetve *elliptikus,* fenti eredményünkkel megegyezően.

III. A sík projektív geometriája.

25. §. A projektív sík alkata. (P I, II).

25.1. Tétel. *A projektív síkot egy egyenese nem osztja szét; két egyenese két részre, három, nem egy ponton áthaladó egyenese négy részre osztja fel.*

Bizonyítás. A tétel *első állítása* részletesen kifejezve azt jelenti, hogy ha az α síkban a egy egyenes és P, Q két tetszőleges, a-hoz nem tartozó pont, akkor megadható egy olyan egyenes szakasz vagy törtvonal[1] az α síkban, melynek végpontjai P és Q, s melynek nincs a-val közös pontja. Tekintsük ugyanis a PQ egyenest; ennek egy és csak egy A pontja tartozik az a egyeneshez; a PQ egyenesnek az A pontot nem tartalmazó PQ szakasza összeköti a P, Q pontokat s nem metszi az a egyenest.

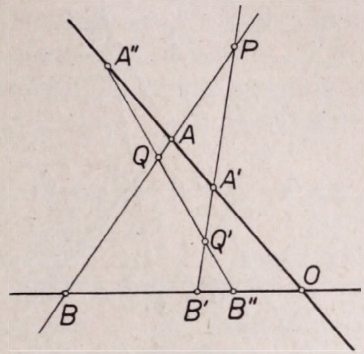
A tétel *második állításának* igazolása a következő. Legyen a és b két különböző egyenes, és P, Q hozzájuk nem tartozó két pont, valamennyien az α síkban. A PQ egyenesnek az a és a b egyenessel való metszéspontja legyen A és B. Ha a PQ egyenesen A és B nem választja el egymástól a P, Q pontokat, akkor P és Q ugyanahhoz az a, b egyenespár által meghatározott síkrészhez, ellenkező esetben különböző síkrészekhez tartoznak.

A következő meggondolással igazoljuk, hogy vannak különböző síkrészekhez tartozó P, Q pontok. Legyen P olyan pont, mely sem a-hoz, sem b-hez nem tartozik; legyen A az a egyenesnek valamely, b-hez nem tartozó pontja, B a PA egyenesnek b-vel közös pontja, és Q ugyancsak a PA egyenesnek olyan pontja, melyet P-től elválaszt az A, B pontpár. Az előbbi értelmezés szerint P és Q az a, b egyenespár által meghatározott különböző síkrészekhez tartoznak.

Ha P és Q s ugyancsak P és Q' különböző síkrészekhez, akkor

[1] Értelmezését l. első kötet, 16. o.

Q és Q' ugyanahhoz a síkrészhez tartoznak. Legyen ugyanis A, B, illetve A', B' a PQ és a PQ' egyenesnek a-val és b-vel közös pontja (34. ábra). Feltevés szerint fennáll a $(PAQB)$ és a $(PA'\,Q'\,B')$ ciklikus elrendezés. Az a és b egyenes közös O pontjából vetítsük a P, A', Q', B' pontokat a PQ egyenesre ; a Q' pont vetülete legyen Q'' ; a P, A', B' pont vetülete P, A, B. Tegyük fel, hogy Q'' különbözik Q-tól, különben a bebizonyítandó állítás nyilvánvaló. A $(PA'Q'B')$ elrendezés következtében fennáll a vetületekre a $(PAQ''B)$ elrendezés ; ebből és a $(PAQB)$ elrendezésből következik, hogy az A, B, Q, Q'' pontokra vagy az $(ABQQ'')$, vagy az $(ABQ''Q)$ elrendezés érvényes, tehát a Q és Q'' pontok ugyanahhoz a síkrészhez tartoznak. Vetítsük az A, B, Q, Q'' pontokat az O pontból a QQ' egyenesre, s jelöljük a QQ' egyenesnek az a és a b egyenessel való metszéspontját A''-vel és B''-vel. A vetületekre fennáll az $(A''B''QQ')$, vagy az $(A''B''Q'Q)$ elrendezés, tehát a Q és Q' pontok ugyanahhoz a síkrészhez tartoznak. Egészen hasonló meggondolással következik, hogyha P és Q ugyanahhoz, s Q és R is ugyanahhoz a síkrészhez, akkor P és R ugyanahhoz a síkrészhez tartoznak.



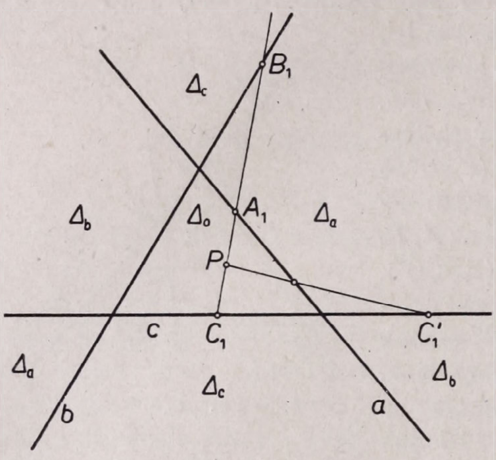
34. ábra.

A fentiekből következik, hogy minden olyan törtvonal, melynek két végpontja két különböző síkrészhez tartozik, metszi az a, b egyenesek közül legalább az egyiket. Az a, b egyenespár által meghatározott két síkrészt *szögtartományok*nak nevezzük.

A tétel *harmadik állításá*nak igazolása a következő. Legyen a, b, c három, nem egy ponton áthaladó egyenes, és P, Q a síknak két tetszőleges olyan pontja, mely nem tartozik a három egyenes közül egyikhez sem. A PQ egyenesnek az a, b, c egyenesekkel való metszéspontja legyen A_1, B_1, C_1. Ha a PQ egyenesnek a P, Q pontok által meghatározott két szakasza közül ugyanahhoz tartoznak az A_1, B_1, C_1 pontok (vagyis a másik PQ szakasz nem tartalmazza az A_1, B_1, C_1 pontok közül egyiket sem), akkor azt mondjuk, hogy a Q pont a Δ_0 síkrészhez tartozik. Ha a P, Q pontok által meghatározott két szakasz közül az egyik tartalmazza az A_1, a másik a B_1 és C_1 pontot, akkor a Q pont a Δ_a síkrészhez tartozik. Hasonlóan értelmezzük a Δ_b és Δ_c

síkrészt, felcserélve egymással az A_1, B_1, C_1 pontot az előbbi értelmezésben (35. ábra).

Ha Q és Q' a Δ_0 síkrészhez tartozik, akkor az egyik QQ' szakasznak nincs az a, b, c egyenesek közül egyikkel sem közös pontja. Ugyanis a fent bebizonyított második állítás szerint, mivel P és Q s ugyancsak P és Q' ugyanahhoz az a, b egyenespár által meghatározott szögtartományhoz tartoznak, tehát Q és Q' is, s ezért a QQ' egyenesnek a Q, Q' pontok által meghatározott két szakasza közül az egyik nem metszi sem a-t, sem b-t, a másik pedig metszi mindkét egyenest. Ugyanez érvényes a b, c egyenesekre vonatkozóan is. Tehát annak a QQ' szakasznak, mely nem metszi sem a-t, sem b-t, nincs c-vel sem közös pontja.



35. ábra.

Ha Q és Q' mindketten a Δ_a síkrészhez tartoznak, akkor az alkalmasan választott PQ és PQ' szakaszok nem metszik sem b-t, sem c-t, s ezért a QQ' egyenesnek alkalmasan választott QQ' szakasza sem metszi sem b-t, sem c-t. Ennek a QQ' szakasznak a-val sincs közös pontja ; az a, b egyenespár elválasztja ugyanis egymástól P-t és Q-t, s ugyancsak P-t és Q'-t, tehát nem választja el Q-t és Q'-t. E szerint az a QQ' szakasz, mely nem metszi b-t és c-t, nem metszi a-t sem.

Hasonló meggondolás érvényes a Δ_b, Δ_c síkrészekre vonatkozóan is. Ezzel igazoltuk, hogy bármely két pontot, mely a $\Delta_0, \Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ síkrészek közül ugyanahhoz tartozik, összeköthetünk egymással olyan egyenes szakasszal, mely az a, b, c egyenesek közül egyiket sem metszi.

Ugyanebből a meggondolásból következik, hogyha a QQ' szakasz egyik pontja vagy végpontja sem tartozik az a, b, c egyenesekhez, akkor a Q és Q' pontok ugyanahhoz a síkrészhez tartoznak. Továbbá, ha Q és Q' két különböző síkrészhez tartozik, akkor minden olyan törtvonalnak, mely a Q és a Q' pontot összeköti, van az a, b, c egyenesek közül legalább az egyikkel közös pontja.

A P pontot az a, b egyenesek C metszéspontjával összekötő egyenesnek c-vel közös pontja legyen C'; a P-t tartalmazó CC' szakasz pontjai $\varDelta_0$-hoz, a másik CC' szakasz pontjai $\varDelta_c$-hez tartoznak; hasonlóan a másik két egyenespárra. Ezzel igazoltuk a négy síkrész létezését, s így a **25**.1 tétel összes állítását bebizonyítottuk.

Értelmezés. Azokat a síkrészeket, melyeket három, nem egy ponton áthaladó egyenes a síkban meghatároz, *háromszögtartományoknak* nevezzük.

A fenti tétel szerint *bármely három, nem egy ponton átmenő egyenes a síkot négy háromszögtartományra osztja fel.*

Értelmezés. A nem egy ponton átmenő a, b, c egyenesek által meghatározott $\varDelta_0$ *háromszögtartomány határán* értjük az a, b, c egyenesek ama pontjainak az összességét, melyek összeköthetők $\varDelta_0$ valamely pontjával a $\varDelta_0$ háromszögtartományban fekvő szakasszal. Hasonlóan értelmezzük a $\varDelta_a$, $\varDelta_b$, $\varDelta_c$ háromszögtartományok határát.

Jelöljük A, B, C-vel rendre a b, c, a c, a és az a, b egyenespárok metszéspontját.

25.2. *A $\varDelta_0$ háromszögtartomány határa az A, B, C pontokon kívül az a, b, c egyeneseknek egy-egy az A, B, C pontok által meghatározott BC, CA, AB szakaszából áll.*

Például $\varDelta_0$ határának a c egyenesen fekvő pontjai A, B és az egyik AB szakasz; ezt a következő meggondolással látjuk be. Legyen P a $\varDelta_0$ tartomány valamely pontja, C_1 és C_1' pedig a $c = AB$ egyenesnek két olyan pontja, melyet az A, B pontok a c egyenesen elválasztanak egymástól (35. ábra). Ha a PC_1 szakasznak nincs az a, b, c egyenesek közül egyikkel sem közös pontja, vagyis ha C_1 a $\varDelta_0$ tartomány határához tartozik, akkor, mivel a C_1 és C_1' pontokat, tehát a P és C_1' pontokat is elválasztják egymástól az a, b egyenesek, van a PC_1' szakasznak vagy az a, vagy a b egyenessel közös pontja; ezért a C_1' pont a fenti értelmezés szerint nem tartozik $\varDelta_0$ határához. Ugyanezzel a meggondolással látjuk be, hogyha C_1' nem tartozik $\varDelta_0$ határához, akkor a C_1 pont $\varDelta_0$ határához tartozik.

$\varDelta_0$ határának a c egyeneshez tartozó szakasza $\varDelta_c$ határához is tartozik; ez a $\varDelta_c$ tartomány meghatározásából közvetlenül következik a háromszögtartomány határának fenti értelmezése szerint.

Hasonlóan, Δ_0 határának az a, illetve a b egyeneshez tartozó szakasza rendre a Δ_a és a Δ_b tartománynak is a határához tartozik. E szerint az A, B, C pontok a négy háromszögtartomány közül mindegyiknek a határához tartoznak, s az e pontok által az a, b, c egyeneseken meghatározott hat szakasz közül mindegyik két-két tartomány határához.

A fenti meggondolásból könnyen adódik a következő állítás is:

25.3. *Ha a p egyenes nem megy át az A, B, C pontok közül egyiken sem, s ha van p-nek a Δ_0 tartományban pontja, akkor Δ_0 határával is van közös pontja, és megfordítva.*

Jelöljük, mint a fenti bizonyításban, Δ_0-val az a, b, c egyenesek által meghatározott háromszögtartományok közül az egyiket, és $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$-vel rendre azokat, melyek Δ_0-val egy, az a, b, illetve c egyeneshez tartozó szakasz mentén határosak. A Δ_0 és Δ_a *háromszögtartományok összegén* értjük a Δ_0-hoz és a Δ_a-hoz tartozó pontok összességét, kiegészítve az a egyenes ama szakaszának pontjaival, mely a Δ_0 és a Δ_a háromszögtartományok határához tartozik. E szerint egy P pont, mely nem tartozik sem a b, sem a c egyeneshez, akkor és csak akkor tartozik a $\Delta_0+\Delta_a$ tartományhoz, ha vagy Δ_0-nak, vagy Δ_a-nak pontja, vagy a-n és egy olyan egyenes szakaszon fekszik, melynek egyik végpontja Δ_0-hoz, a másik Δ_a-hoz tartozik. A $\Delta_0+\Delta_a$ és a $\Delta_b+\Delta_c$ tartomány tehát az a két szögtartomány, melyre a b, c egyenesek a síkot felosztják. Hasonlóan $\Delta_0+\Delta_c$ és $\Delta_a+\Delta_b$ az a, b egyenesek által meghatározott szögtartományok. Jelöljük az a, b, illetve a b, c egyenespárok által meghatározott szögtartományokat a fenti sorrendben σ_1, σ_2-vel, és σ_1', σ_2'-vel; σ_1 és σ_1' közös része a Δ_0, továbbá σ_2 és σ_2' közös része a Δ_b háromszögtartomány. Tehát:

25.4. σ_1 és σ_1' *közös részének, s σ_2 és σ_2' közös részének összege az a, c egyenesek által meghatározott egyik szögtartomány;* hasonlóan, σ_1 és σ_2' közös részének, s σ_2 és σ_1' közös részének összege az a, c egyenesek által meghatározott másik szögtartomány.

Értelmezés. A sík P pontjának a *síkra vonatkozó környezetén* értünk minden olyan háromszögtartományt, mely tartalmazza a P pontot. — Az α sík P pontját az α síkban fekvő S *ponthalmaz sűrűsödési pontjá*nak nevezzük, ha a P pontnak minden, az α síkra vonatkozó környezete tartalmazza az S halmaznak legalább egy, P-től különböző pontját.

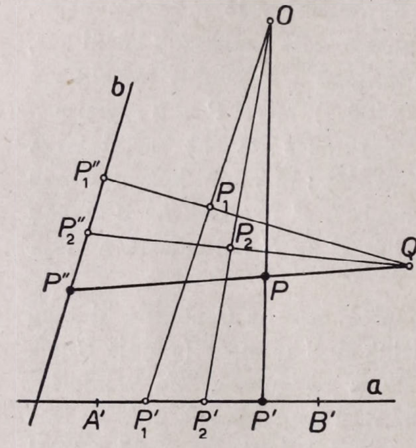
(**P I, II** és **D**). A DEDEKIND-féle axióma alapján bebizonyítjuk a következő tételt:

25.5. Tétel. *A projektív sík kompakt halmaz, azaz minden, a projektív síkban fekvő végtelen ponthalmaznak van legalább egy sűrűsödési pontja.*

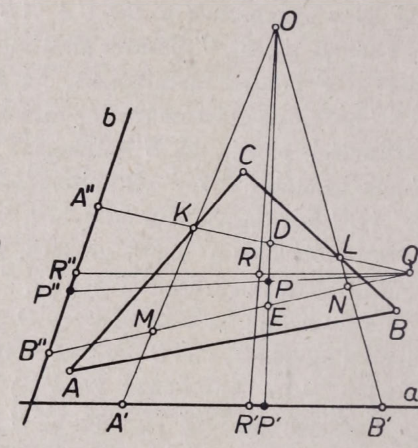
Bizonyítás. Legyen S egy végtelen (azaz végtelen sok pontból álló) ponthalmaz az α síkban. Ha van olyan a egyenes, mely az S halmaz végtelen sok pontját tartalmazza, akkor az egyenes kompaktsága folytán (**10**.1) van S-nek az a egyenesen legalább egy P sűrűsödési pontja. Legyen ABC az α síkban tetszőleges olyan háromszögtartomány, mely tartalmazza a P pontot. Jelöljük A', B', C'-vel az a egyenesnek a BC, CA, AB egyenessel való metszéspontját, és s-sel az A', B', C' pontok által meghatározott szakaszok közül azt, mely a P pontot tartalmazza. Az s szakasz a P pontot tartalmazó ABC háromszögtartományhoz tartozik (**25**.1). Mivel P az a egyenesen sűrűsödési pontja az S halmaznak, ezért az s szakasz tartalmazza S-nek legalább egy, P-től különböző pontját ; ez a pont hozzátartozik az ABC háromszögtartományhoz, vagyis a P pontnak az α síkban felvett tetszőleges környezetéhez, tehát P az S halmaznak a síkra vonatkozóan is sűrűsödési pontja.

Felveszünk az α síkban egy O pontot, egy, az O ponton át nem menő a egyenest, s az O pontból vetítjük az S halmazt (vagyis S-nek minden, O-tól különböző pontját) az a egyenesre. Ha valamely, az O ponton átmenő egyenes az S halmaz végtelen sok pontját tartalmazza, akkor előbbi eredményünk szerint érvényes a **25**.5 tétel állítása. Zárjuk ki a továbbiakban ezt a lehetőséget ; ekkor van tehát végtelen sok olyan, az O ponton átmenő egyenes, mely S-nek O-tól különböző pontjait tartalmazza ; ezeknek a-val való metszéspontjai egy S' végtelen ponthalmazt alkotnak. Az S' halmaznak van az a egyenesen legalább egy Q' sűrűsödési pontja. Ha $A'Q'B'$ a Q' pontnak tetszőleges környezete az a egyenesen, akkor az $A'Q'$ és $Q'B'$ részszakaszok közül legalább az egyik, mondjuk $A'Q'$, tobábbá ennek minden $A_1'Q'$ részszakasza az S' halmaznak végtelen sok pontját tartalmazza. Legyenek tehát $P_1', P_2', \ldots$ az S' halmaznak olyan pontjai, hogy P_1' a nevezett $A'Q'$ szakaszhoz, P_2' az előbbinek $P_1'Q'$ részszakaszához,..., P_{n+1}' az előbbinek $P_n'Q'$ részszakaszához tartozik, és így tovább. A $P_1', P_2', \ldots$ pontsorozat az $A'P_1'Q'$ szakaszon fekszik és monoton, van tehát egy P' limesze (**10**.2). Legyen minden n-re P_n az S halmaznak egy, O-tól különböző, az OP_n' egyenesen fekvő pontja (36. ábra).

Felveszünk az α síkban egy másik, b egyenest, mely nem megy át az O ponton, továbbá egy O-tól különböző Q pontot, mely az a, b, OP' egyenesek közül egyikhez sem tartozik. A Q pontból a b egyenesre vetítjük a $P_1, P_2, \ldots$ pontokat; a vetületeket jelöljük $P_1'', P_2'', \ldots$-vel. Ha egyik a Q ponton átmenő egyenes sem tartalmazza a $(P_1, P_2, \ldots)$ ponthalmaznak végtelen sok pontját, akkor a b egyenesre való vetület is végtelen ponthalmaz; ennek van b-n legalább egy sűrűsödési pontja. Az előbbi meggondolást ismét alkalmazva, kiválasztunk a $P_1, P_2, \ldots$ sorozatból egy olyan sorozatot, amelynek megfelelő



36. ábra.



37. ábra.

vetületek a b egyenesen egy P'' ponthoz konvergálnak; ezt a részsorozatot jelöljük, egyszerűség kedvéért, ismét $P_1, P_2, \ldots$-vel.

Az OP' és QP'' egyenesek P metszéspontja a $P_1, P_2, \ldots$ pontsorozatnak a limesze, vagyis a P pontnak az α síkban felvett tetszőleges környezetéhez megadható egy n_0 pozitív egész szám, úgyhogy a sorozatnak mindazok a pontjai, melyeknek indexe nagyobb mint n_0, a P pont megadott környezetéhez tartoznak.

Ennek az állításnak igazolása céljából előbb a következőt mutatjuk meg: Legyen $\Delta_0 = ABC$ az α síkban egy olyan háromszögtartomány, mely tartalmazza a P pontot; megadható az a egyenesen a P' pontnak egy $A'B'$, s a b egyenesen a P'' pontnak egy $A''B''$ környezete úgy, hogyha R' az $A'P'B'$, és R'' az $A''P''B''$ szakasznak egy-egy tetszőleges pontja, akkor az OR' és QR'' egyenesek R metszéspontja a Δ_0 tartományhoz tartozik. — Feltehetjük, hogy Q nem tartozik Δ_0-hoz; vegyünk fel az OP egyenesen egy olyan DE szakaszt, mely tartalmazza a P pontot, s mely végpontjaival együtt a Δ_0 tartományhoz tartozik (37. ábra). A QD és QE egyeneseknek az AB, BC, CA háromszögoldalakkal való metszéspontjait vetítsük az O pontból az a egyenesre; ezek a vetületek az a egyenest véges sok szakaszra osztják fel; legyen $A'P'B'$ ezek közül az a szakasz, mely tartalmazza a P' pontot. Jelöljük K-val és L-lel a QD egyenesnek, M-mel és N-nel a QE egyenesnek azokat a pontjait, melyeknek O-ból az a egyenesre való vetülete az A', illetve a B' pont. Ezeknek a pontoknak a meghatározásából következik, hogy a KDL és az MEN szakaszok a Δ_0 háromszögtartományhoz tartoznak; a **25**.1 tétel bizonyításából adódik továbbá, hogy a QP egyenest metsző KM és LN szakaszok is Δ_0-hoz tartoznak. Jelöljük A''-vel és B''-vel a D és az E pontnak a Q pontból a b egyenesre való vetületét. Ha R' az $A'P'B'$ szakasznak, és R'' az $A''P''B''$ szakasznak egy-egy tetszőleges pontja, akkor az OR' és QR'' egyenesek R metszéspontja az ABC háromszögtartományhoz tartozik.

Mivel a $P_1', P_2', \ldots$ pontsorozat a P' ponthoz konvergál, tehát elegendő nagy n-re a P_n' pont az $A'P'B'$ szakaszhoz tartozik; mivel hasonlóan a $P_1'', P_2'', \ldots$ pontsorozat a P'' ponthoz konvergál, minden elegendő nagy n indexű P_n'' pont az $A''P''B''$ szakaszhoz tartozik. A P_n pont, mint az OP_n' és QP_n'' egyenesek metszéspontja, a Δ_0 háromszögtartományhoz, vagyis a P pont tetszőlegesen felvett környezetéhez tartozik. Ezzel bebizonyítottuk a **25**.5 tételt, nevezetesen azt, hogy a fenti eljárással meghatározott *P pont az S halmaznak sűrűsödési pontja.*

A fenti levezetés csekély módosításával bebizonyíthatjuk a következő tételt is, melyre később hivatkozni fogunk:

25.6. Tétel. *Ha a és a' az a síkban két tetszőleges, egymástól különböző egyenes, és A, A' ezeknek egy-egy pontja, mely különbözzik egymástól, akkor megadható az a és a' egyenesek O metszéspontjának tetszőleges (síkbeli) környezetéhez az A, és az A' középpontú sugársorban az a, illetve az a' egyenesnek egy-egy környezete olyan módon, hogy bármely ezekhez tartozó b, illetve b' egyenesnek közös pontja az O pont megadott környezetéhez tartozik.*

Erre a tételre röviden így fogunk hivatkozni: *ha egy síkban fekvő két sugársor egy-egy sugarát folytonosan változtatjuk, akkor ezeknek metszéspontja is folytonosan változik.*

A **25**.1 tétel utolsó részének a síkbeli dualitás szerint a következő tétel felel meg:

25.7. Tétel. *Az α sík bármely három, nem egy egyenesen fekvő A, B, C pontja az α sík ezeken a pontokon át nem menő egyeneseinek összességét négy osztályra osztja fel; két egyenes akkor és csak akkor tartozik ugyanahhoz az osztályhoz, ha a két egyenes által meghatározott két szögtartomány közül ugyanahhoz tartozik az A, B és C pont.*

Értelmezés. Jelöljük a BC, CA, AB egyenest rendre a, b, c-vel, s az ezek által meghatározott négy háromszögtartományt Δ_0, Δ_a, Δ_b, Δ_c-vel. Bármely olyan egyenest, mely nem megy át az A, B, C pontok közül egyiken sem, az a, b, c egyenesekkel való metszéspontjai három szakaszra osztják fel; ebből következik, hogy az illető egyenesnek a négy háromszögtartomány közül hárommal van közös pontja. — Jelöljük $\delta_O, \delta_A, \delta_B, \delta_C$-vel azoknak az A, B, C pontokon át nem menő egyeneseknek az összességét, melyeknek nincs pontjuk rendre a Δ_0, Δ_a, Δ_b, Δ_c háromszögtartományban; ezek a **25**.7 tétel értelmében meghatározott osztályok. A δ_O, δ_A, δ_B, δ_C osztályokat *a sugármezőben az A, B, C pontok által meghatározott tartományok*nak, s a sugármező δ_O tartományát és a pontmező Δ_0 tartományát *egymásnak megfelelő tartományok*nak fogjuk nevezni.

Értelmezés. *A sugármezőben egy p egyenes környezetén* értünk minden olyan, a p egyenest tartalmazó δ_O tartományt, melyet három, nem a p egyeneshez tartozó, s nem egy egyenesen fekvő A, B, C pont határoz meg. A δ_O tartományhoz tartozó egyenesek pontjainak összességét a *p egyenes síkbeli környezeté*nek fogjuk nevezni.

A **25**.6 tételnek a síkbeli dualitás elve szerint a következő tétel felel meg:

25.8. *Ha az α síkban A és A' két különböző pont, s a és a' egy-egy az A, illetve az A' ponton átmenő, egymástól különböző egyenes, akkor megadható az AA' egyenesnek tetszőleges síkbeli környezetéhez az A pontnak az a egyenesen, s az A' pontnak az a' egyenesen egy-egy környezete, úgyhogy bármely ezekhez tartozó B és B' pontot összekötő BB' egyenes az AA' egyenes megadott környezetéhez tartozik. Azaz ha két, egy síkban fekvő, egymástól különböző egyenes egy-egy pontját folytonosan változtatjuk, akkor az ezeket összekötő egyenes is folytonosan változik.*

Megjegyezzük, hogy a **25**.6 és 8 tételből könnyen adódik következő általánosításuk:

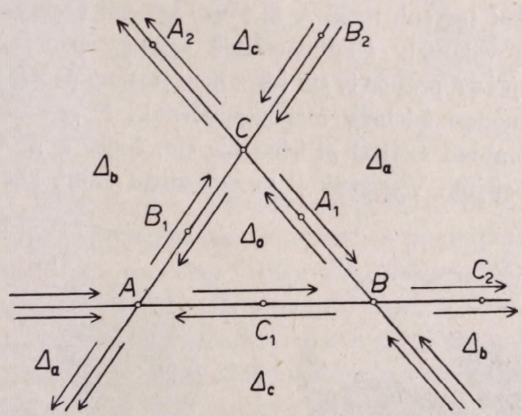
25.9. *Két különböző, egy síkban fekvő egyenes metszéspontja folytonos módon változik a két egyenes folytonos változásával, melynek folyamán a két egyenes egymástól különböző marad.*

25.10. *Két különböző, egy síkban fekvő pontot összekötő egyenes folytonos módon változik a két pont folytonos változásával, feltéve, hogy a két pont egymástól különböző marad.*

25.11. Tétel. *A projektív sík nem irányítható.*[1]

Bizonyítás. A projektív sík pontjainak egy, a síkon kívül fekvő pontból való vetítéssel egy sugárnyaláb felel meg. A sugárnyalábot egyaránt értelmezhetjük a projektív geometria **P I**, **II** axiomái, vagy az euklidesi geometria **I**, **II** axiomái alapján. Az euklidesi térben fekvő sugárnyalábra vonatkozóan az első kötet 171. tételének levezetése során azt az eredményt kaptuk, hogy a sugárnyaláb nem irányítható ; ugyanez érvényes tehát a projektív síkra vonatkozóan is.

A tétel közvetlen bizonyítása egyébként a következő. Legyen A, B, C az α projektív sík három, nem egy egyenesen fekvő pontja ;



38. ábra.

az AB, BC, CA egyenesek közül mindegyiken felveszünk két-két olyan C_1, C_2, A_1, A_2, B_1, B_2 pontot, melyek az illető egyenesen elválasztják az A és B, a B és C, s a C és A pontokat (38. ábra). Jelöljük Δ_0-val az AB, BC, CA egyenesek által meghatározott háromszögtartományok közül az egyiket ; tegyük fel, hogy ennek határát az AC_1B, BA_1C, CB_1A szakaszok alkotják. A Δ_0 háromszögtartomány

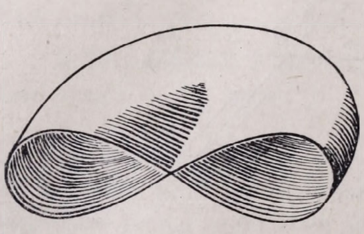
[1] Értelmezést l. első kötet, 119. o.

$(AC_1BA_1CB_1)$ irányításának a többi három tartománynak rendre következő irányítása felel meg:

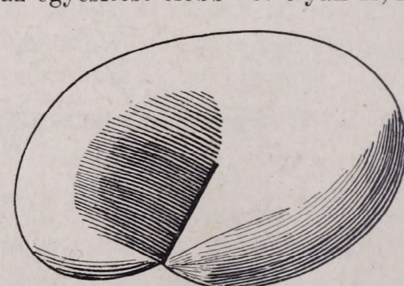
$$(BC_1AB_2CA_2),\quad (CA_1BC_2AB_2),\quad (AB_1CA_2BC_2).$$

A három utóbbi irányítás nem összetartozó; például a két utolsó háromszög közös oldala BC_2A, s ennek ugyanaz az irányítása mindkét tartományra vonatkozóan.

A projektív sík pontjainak megfeleltettük egy, a síkon kívül fekvő O ponton áthaladó egyenesek összességét. Az O középponttal bíró valamely gömb átellenes (azaz egy átmérőn fekvő) pontpárjai és a projektív sík pontjai ezáltal kölcsönösen egyértelmű és folytonos módon felelnek meg egymásnak. (A gömbön a pontok környezetét természetes módon értelmezzük; l. első kötet 286—287. o.). Ennek a vonatkozásnak az alapján a projektív síknak következőképpen feleltethetünk meg kölcsönösen egyértelmű és folytonos leképezéssel egy, az euklidesi térben fekvő, szinguláris (vagy kettős-) vonallal bíró felületet. Vágjuk ketté a gömböt egy K főkörrel s a két félgömb közül csak az egyiket tartsuk meg. A K főkör két-két átellenes pontja s a projektív sík valamely l egyenesének egy-egy pontja, valamint a félgömb pontjai s a projektív sík l-hez nem tartozó pontjai kölcsönösen egyértelmű módon felelnek meg egymásnak. E szerint a projektív síkot a félgömbből azáltal állíthatjuk elő, hogy a K kör átellenes pontjait egyesítjük. Végezzük el az egyesítést előbb két olyan A, A'



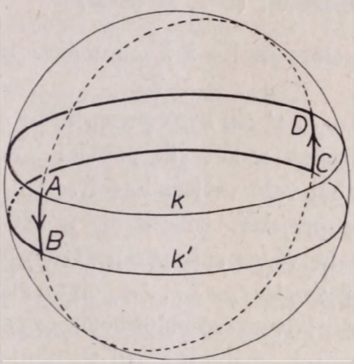
39. ábra.



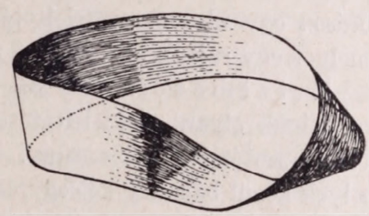
40. ábra.

és B, B' átellenes pontpárra, melyeket összekötő átmérők merőlegesek egymásra. Az A, A' pontpár egyesítésével a 39. ábrán feltüntetett felületet kapjuk. Az AB és $A'B'$ ívekhez tartozó pontok egyesítése, majd a BA' és a $B'A$ ívek pontjainak egyesítése egy olyan zárt felülethez vezet, melynek AB vonala a felületnek kettősvonala: a felületnek az AB vonalhoz csatlakozó darabjai ennek a vonalnak mentén keresztezik egymást (40. ábra). Ez a szinguláris vonallal bíró zárt felület a projektív síknak megvalósítását, vagy modelljét adja a háromméretű euklidesi térben.

Mivel a fenti kép a szinguláris vonal miatt kevéssé szemléletes, a projektív sík összefüggési viszonyait egy másik képpel is fogjuk szemléltetni. Kihagyjuk a projektív síkon egy pontnak valamely környezetét, s a megmaradó felületet, az úgynevezett *pontozott projektív síkot* állítjuk elő a háromméretű euklidesi térben. Ismét abból indulunk ki, hogy a projektív sík pontjait egy gömbfelület átellenes pontpárjaival állítjuk elő. A pontozott projektív síkot ebből úgy



41. ábra.



42. ábra.

kapjuk, hogy felveszünk a gömbön egy k kört, mely azonban nem főkör, s az ennek belsejébe eső pontokat, s ugyancsak az átellenes k' kör belsejébe eső pontokat elhagyjuk. Megmarad egy gömböv, mint a pontozott projektív sík kétszeres képe. A k és k' kör középpontján áthaladó valamely főkörrel osszuk ketté a gömbövet, s a két rész közül csak az egyiket, például a 41. ábrán vastag vonallal határolt $ABCD$ gömbi négyszöget tartsuk meg. Ennek AB és CD oldalát olyan módon kell egyesítenünk, hogy az A pont C-vel, és a B pont D-vel kerüljön fedésbe ; ilyen módon kapjuk a 42. ábrán feltüntetett *Möbius-féle szalagot*, mely a fentiek szerint a pontozott projektív síknak a háromméretű euklidesi térben való modellje, szinguláris pont, vagy vonal nélkül. Jegyezzük meg, hogy ennek a felületnek *egy* határvonala van (járjuk végig az ábrán). A felületnek csak egy oldala van ; ha valamelyik pontban a felület két oldalát megjelöljük, egyiket pozitív, másikat negatív oldalnak nevezzük, s ha ezt a megkülönböztetést a pontnak a felületen való folytonos mozgásával az egész felületre ki akarjuk terjeszteni, azt találjuk, hogy a felület pozitív és negatív oldala a felületen egymásba folyik; ezt úgy fejezzük ki, hogy a felület *egyoldalú.* Összefügg ez azzal a megállapításunkkal, hogy a projektív sík nem irányítható felület, s a pontozott projektív sík sem.

A most szerkesztett képekkel csak szemléltetni akartuk a projektív sík alkatát, a nélkül, hogy következő tárgyalásunkban hivatkoznánk erre. A szemléletre való hivatkozás nélkül bizonyítottuk be azonban, hogy a projektív sík nem-irányítható felület.

26. §. A sík projektív leképezései. (P I, II és D)

Következő tárgyalásunkban egyelőre csak a **P I** axiómákat teszszük fel.

Értelmezés. *Két különböző a és a' sík közti perspektív vonatkozáson* egy olyan megfeleltetést értünk a két sík pontjai között, amelyet egy rajtuk kívül fekvő pontból való vetítés létesít.

Értelmezés. *Két sík közti projektív vonatkozás* a két sík pontjainak olyan megfeleltetése, mely véges sok perspektív vonatkozás összetételéből származik. — Legyenek $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ olyan síkok, melyek közül bármely két egymásután következő különbözik egymástól; legyenek $O_1, O_2, \ldots, O_n$ olyan pontok, melyek közül O_ν nem tartozik sem $\alpha_{\nu-1}$-hez, sem α_ν-höz. Jelöljük $\mathbf{S}_\nu$-vel az $\alpha_{\nu-1}$ síknak az α_ν síkra az O_ν középpontból való vetítését. Az $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_n$ perspektív leképezések $\mathbf{S}=\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\ldots\mathbf{S}_n$ szorzata az α_0 síknak az α_n síkra való projektív leképezése. — Ha az α_n sík azonos α_0-val, akkor az $\mathbf{S}$ leképezést az α_0 *sík önmagára való projektív leképezésé*nek nevezzük.

26.1. Az $\mathbf{S}_\nu$ leképezésnél az $\alpha_{\nu-1}$ sík minden egyenesének az α_ν síkban egyenes felel meg, s a két egyenes közti vonatkozás perspektív; ugyancsak minden, az $\alpha_{\nu-1}$ síkban fekvő sugársornak az S_ν leképezésnél az α_ν síkban egy sugársor felel meg, s a két sugársor vonatkozása perspektív. Ebből következik, hogy *az* $\mathbf{S}=\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\ldots\mathbf{S}_n$ *leképezésnél az* α_0 *sík minden egyenesének az* α_n *síkban egyenes felel meg, s a két egyenesnek* $\mathbf{S}$ *által származtatott vonatkozása projektív. Hasonlóan minden, az* α_0 *síkban fekvő sugársornak az* α_n *síkban egy sugársor felel meg, s a két sugársor vonatkozása projektív.*

26.2. Tétel. *Ha az α és α' síkok közti projektív vonatkozásnál a két sík l metszésvonalának minden pontja önmagának felel meg, akkor a vonatkozás perspektív.*

Bizonyítás. Legyen A és B az α sík két tetszőleges, nem az l egyenesen fekvő pontja ; az AB egyenesnek l-lel közös pontja legyen P. Jelöljük A', B'-vel az A, B pontoknak a megadott leképezésnél az α' síkban megfelelő pontokat. Az AB egyenes képe az $A'B'$ egyenes, s mivel P feltevésünk szerint fixpont, tehát P az AB és $A'B'$ egyenesek közös pontja. Az A, B, A', B' pontok egy síkban feküsznek, ezért az AA' és BB' egyeneseknek van egy közös O pontja. Az α és α' síkok közti projektív vonatkozás az AB és $A'B'$ egyenesek között egy olyan projektív vonatkozást létesít, melynél a két egyenes metszéspontja : P fixpont ; ez egy perspektív vonatkozás a két egyenes között (**6**.4), s a perspektivitás középpontja az AA' és BB' egyenesek O metszéspontja. Ha tehát C az AB egyenes tetszőleges pontja, és C' ennek a képe, akkor a CC' egyenes átmegy az O ponton. Ha pedig C az α síknak olyan pontja, mely nem tartozik sem az AB, sem az l egyeneshez, és C' a C pont képe, akkor az AB és $A'B'$, az AC és $A'C'$, valamint a BC és $B'C'$ egyenesek az l egyenesen metszik egymást, vagyis az ABC és $A'B'C'$ háromszögek perspektívek az l tengelyre vonatkozóan ; ebből a **8**.1 tétel szerint következik, hogy a két háromszög perspektív egy középpontra vonatkozóan, mely az AA' és BB' egyenesek O metszéspontjával azonos. Tehát ebben az esetben is, a CC' egyenes átmegy az O ponton.

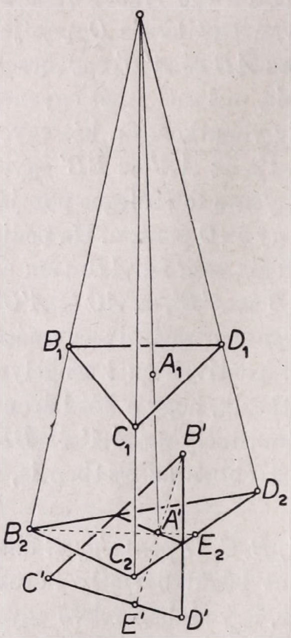
Értelmezés. Az α síkban fekvő A, B, C, D *pontnégyest általános helyzetűnek* nevezzük, ha a négy pont közül bármely három nem fekszik egy egyenesen. Hasonlóan négy, egy síkban fekvő egyenest általános helyzetűnek nevezünk, ha közülök bármely háromnak nincs közös pontja.

26.3. Tétel. *Ha az α síkban fekvő A, B, C, D, s az α' síkban fekvő A', B', C', D' pontnégyesek általános helyzetűek, akkor van az α síknak az α' síkra olyan projektív leképezése, melynél az A, B, C, D pontoknak rendre az A', B', C', D' pontok felelnek meg.*

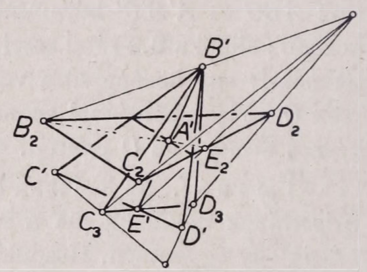
Bizonyítás. Ha az α sík azonos α'-vel, felveszünk α-ban egy g egyenest, mely nem megy át az A, B, C, D pontok közül egyiken sem, s átfektetünk g-n egy α-tól különböző α_1 síkot. Erre a síkra vetítjük az α síkot egy tetszőleges olyan pontból, mely nem tartozik sem α-hoz, sem α_1-hez. Ennél a vetítésnél az A, B, C, D pontoknak az α_1 síkban négy általános helyzetű A_1, B_1, C_1, D_1 pont felel meg, melyek közül egyik sem tartozik az α' síkhoz. Ha az α sík különbözik α'-től, akkor jelöljük α_1-gyel az α síkot, és $A_1, B_1\ C_1, D_1$-gyel az A, B, C, D pontot.

Az $A'A_1$ egyenesen átfektetünk egy olyan β síkot, mely nem megy át a $B', C', D', B_1, C_1, D_1$ pontok közül egyiken sem; a β síknak az α' síkkal való metszésvonalán átfektetünk egy olyan α_2 síkot, mely különbözik α'-től, s nem megy át az A_1 ponton. Az $A'A_1$ egyenes valamely, A'-tól és A_1-től különböző pontjából vetítjük az α_1 síkot az α_2 síkra; az A_1 pont vetülete A'; a B_1, C_1, D_1 pontoknak olyan B_2, C_2, D_2 pontok felelnek meg, hogy az A', B_2, C_2, D_2 pontnégyes általános helyzetű (43. ábra).

Jelöljük E'-vel az $A'B'$ és $C'D'$ egyenesek metszéspontját, E_2-vel az $A'B_2$ és C_2D_2 egyenesek metszéspontját. Az $E'E_2$ és $B'B_2$ egyenesek az $A'B'B_2$ síkban feküsznek, tehát van egy közös pontjuk; ebből



43. ábra.



44. ábra.

vetítjük az α_2 síkot egy olyan α_3 síkra, mely az $A'B'$ egyenesben metszi az α' síkot. A B_2 és E_2 pont vetülete B' és E'; a C_2 és D_2 pont vetületét jelöljük C_3-mal és D_3-mal (44. ábra).

A $C'C_3$ és $D'D_3$ egyenesek az $E'C'C_3$ síkban feküsznek, tehát van közös pontjuk; ebből vetítjük az α_3 síkot az α' síkra; a C_3 és D_3 pont vetülete C' és D'.

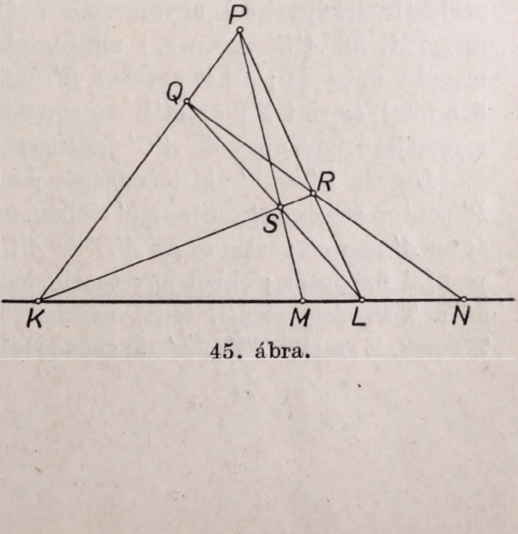
Az egymásután alkalmazott perspektív leképezések összetétele az α síknak az α' síkra való projektív leképezését adja, mely az A, B, C, D pontnégyesnek az A', B', C', D' pontnégyest fe elteti meg.

A továbbiakban feltesszük a **P I, II** és **D** axiómákat. Ezek alapján bebizonyítjuk *a sík projektív leképezéseire vonatkozó* Staudt-*féle alaptételt:*

26.4. Tétel. *Ha az α síknak az α' síkra való egyértelmű leképe-*

zésénél az α sík bármely két különböző pontjának az α' síkban két különböző pont, s a bármely három, egy egyenesen fekvő pontjának α'-ben három, egy egyenesen fekvő pont felel meg, s ha van az α síkban három olyan (nem egy egyenesen fekvő) pont, melynek képe nem fekszik egy egyenesen, akkor a leképezés a két sík között egy (kölcsönösen egyértelmű) projektív leképezés.

Bizonyítás. Legyen A, B, C az α sík három olyan pontja, mely a megadott **T** leképezésnél az α' sík három, nem egy egyenesen fekvő A', B', C' pontjába megy át; feltevésünk folytán A, B, C sem fekszik egy egyenesen. Ha P az AB egyenes tetszőleges pontja, ennek képe, P' az $A'B'$ egyenesen fekszik, feltevésünk szerint. Viszont, ha P az α sík olyan pontja, mely nem tartozik az AB egyeneshez, akkor képe, P' nem tartozik az $A'B'$ egyeneshez; ennek az állításnak az igazolása a következő. Az AC és BP egyenesek Q metszéspontja különbözik A-tól és B-től, s ezért Q képe, Q' különbözik A'-től és B'-től. Mivel A, Q, C egy egyenesen feküsznek, tehát Q' az $A'C'$ egyenes pontja, s mert A'-től különbözik, Q' nem tartozik az $A'B'$ egyeneshez; e szerint a $B'Q'$ egyenes különbözik $A'B'$-től. A P pont képe, P' a $B'Q'$ egyeneshez tartozik, s különbözik B'-től, tehát P' nem tartozik az $A'B'$ egyeneshez. Ebből könnyen levezethető, hogy *bármely három, nem egy egyenesen fekvő A_1, B_1, P pont képe, A_1', B_1', P' nem tartozik egy egyeneshez;* ugyanis az A', B', C' pontok között van legalább egy olyan, például C', mely nem tartozik az $A_1'B_1'$ egyeneshez; az előbbi meggondolásban A-t és B-t A_1-gyel és B_1-gyel helyettesítve adódik, hogy az A_1B_1 egyeneshez nem tartozó P pont képe, P' nem tartozik az $A_1'B_1'$ egyeneshez. *Az α sík minden a egyenesének megfelel tehát az α' síkban egy és csak egy a' egyenes, úgyhogy az a egyenes pontjainak, s csakis ezeknek a képe az a' egyeneshez tartozik.*



45. ábra.

Vegyünk fel az a egyenesen egy tetszőleges K, L, M, N harmonikus pontnégyest; felveszünk az α síkban egy olyan $PQRS$ teljes négyszöget, melynek PQ és RS oldala a K ponton, PR és QS oldala az L ponton, PS oldala az M, és QR oldala az N ponton megy át

(45. ábra). Jelöljük $K', \ldots, S'$-vel a **T** leképezésnél az α' síkban megfelelő pontokat. Mivel **T**-nél az α sík minden egyenesének az α' síkban egy egyenes felel meg, a PQ egyenesen fekvő P, Q és K pont képe, P', Q' és K' egy egyenesen fekszik. Hasonlóan egy-egy, az α' síkban fekvő egyeneshez tartoznak a következő ponthármasok:

$$P'Q'K',\ R'S'K',\ P'R'L',\ Q'S'L',\ P'S'M',\ Q'R'N'.$$

Mivel az α sík bármely két különböző pontjának **T**-nél az α' sík két különböző pontja felel meg, tehát a K', L', M', N' pontok különbözők, s ugyancsak a P', Q', R', S' pontok is. Az utóbbi négy pont közül bármely három nem fekszik egy egyenesen; az általuk meghatározott $P'Q'R'S'$ teljes négyszögnek két átlóspontja K' és L', további két oldalának a $K'L'=a'$ átlóval közös pontja M' és N', vagyis a K', L', M', N' pontnégyes harmonikus. Ezzel bebizonyítottuk, hogy *a* **T** *leképezésnél az a egyenes minden harmonikus pontnégyesének az a' egyenesen harmonikus pontnégyes felel meg.* A **12**.2 tételből következik, hogy *a* **T** *leképezés az a egyenesnek az a' egyenesre való (kölcsönösen egyértelmű) projektív leképezését származtatja.*

Legyen A, B, C, D egy általános helyzetű pontnégyes az α síkban, és A', B', C', D' az ennek az α' síkban **T**-nél megfelelő pontnégyes, mely, mint éppen láttuk, szintén általános helyzetű. A **26**.3 tétel szerint megadható az α' síknak az α síkra egy olyan **T**$'$ projektív leképezése, mely az A', B', C', D' pontokat az A, B, C, D pontokba viszi át. A **T**$'$**T** leképezés az α' síknak önmagára való egyértelmű leképezése, melynél az A', B', C', D' pontok közül mindegyik önmagába megy át. Mivel **T**$'$ és **T** egyeneseket egyenesekbe visz át, s két megfelelő egyenes vonatkozása projektív, ugyanez érvényes a **T**$'$**T** leképezésre is; vagyis a **T**$'$**T** leképezésnél az α' sík minden egyenese projektív leképezéssel ugyanannek a síknak valamely egyenesébe megy át. Az $A'B'$ egyenes, s ugyancsak a $C'D'$ egyenes **T**$'$**T**-nél önmagába megy át; a két egyenes E' metszéspontja fixpont, s így az **5**.6 tétel szerint **T**$'$**T** az $A'B'$ egyenesen az azonos leképezést származtatja, s ugyanúgy az $A'C'$ egyenesen is.

Legyen P' az α' sík tetszőleges pontja, s legyen p' és q' két, a P' ponton átmenő egyenes az α' síkban, melyek közül egyik sem megy át az A' ponton; ezeknek az $A'B'$ és $A'C'$ egyenesekkel való metszéspontjai fixpontok; ebből következik, hogy p' és q' önmagába megy át a **T**$'$**T** leképezésnél, tehát ezeknek metszéspontja, P' fixpontja **T**$'$**T**-nek. E szerint **T**$'$**T** az α' sík azonos leképezése; a megadott **T** leképezés tehát a **T**′ projektív leképezés inverzével azonos, s ezért maga is projektív leképezés.

A **26**.4 tétel korolláriuma a következő tétel:

26.5. *Ha az α síknak az α' síkra való kölcsönösen egyértelmű leképezésénél az α sík minden egyenesének az α' síkban egyenes felel meg, akkor a leképezés projektív, azaz előállítható perspektív leképezések szorzataként.*

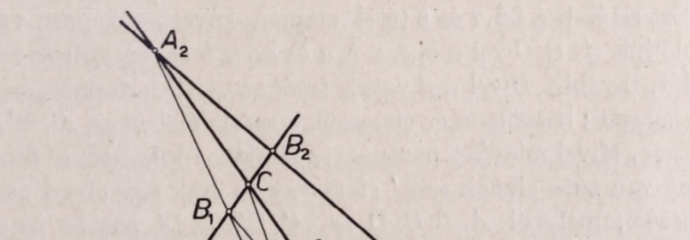
A fenti bizonyításban levezettük a következő tételt is, melyre a további tárgyalás során hivatkozni fogunk:

26.6. Tétel. *Ha az α sík önmagára való projektív leképezésénél egy általános helyzetű pontnégyes mindegyik pontja fixpont (vagy ha két egyenes minden pontja fixpont), akkor a leképezés az azonosság.*

Ebből és a **26**.3 tételből következik:

26.7. Tétel. *Ha az α síkban A, B, C, D, és az α' síkban A', B', C', D' általános helyzetű pontnégyesek, akkor van az α síknak az α' síkra egy és csak egy olyan projektív leképezése, mely az A, B, C, D pontnak rendre az A', B', C', D' pontot felelteti meg.*

26.8. Tétel. *Ha az α síknak az α' síkra való projektív leképezésénél az ABC háromszög az $A'B'C'$ háromszögbe megy át, s ha P az α sík tetszőleges olyan pontja, mely nem tartozik az ABC háromszög*



46. ábra.

egyik oldalához sem, s P-nek az ABC háromszögre vonatkozó polárisa p, akkor a p egyenes p' képe a P pont P' képének az A'B'C' háromszögre vonatkozó polárisa.

Bizonyítás. Jelöljük A_1, B_1, C_1-gyel a P pontnak az A, B, C csúcsból az ABC háromszög átellenes oldalára való vetületét és A_2, B_2, C_2-vel a p egyenesnek a BC, CA, AB oldallal való metszéspontját (46. ábra). Az A_1, A_2, B, C pontnégyes harmonikus, tekintettel az APB_1C_1 teljes négyszögre (l. **8**.2); ugyancsak harmonikus pontnégyesek B_1, B_2, C, A és C_1, C_2, A, B. Jelöljük A_1', B_1', C_1'-vel a P' pontnak az A', B', C' csúcsból az $A'B'C'$ háromszög átellenes oldalára való vetületét, s A_2', B_2', C_2'-vel a p' egyenesnek a $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ oldallal való metszéspontját. A sík megadott leképezésénél az A_1 pont képe A_1', tehát A_1-nek a B, C pontokra vonatkozó A_2 harmonikus konjugáltja A_1'-nek a B', C' pontokra vonatkozó A_2' harmonikus konjugáltjába megy át ; hasonlóan B_2 és C_2 képe B_2' és C_2'. Tehát p képe, p' a P' pontnak az $A'B'C'$ háromszögre vonatkozó polárisa.

A **26**.7 tételnek a síkbeli dualitás elve szerint a következő tétel felel meg :

26.9. Tétel. *Ha az α síkban fekvő a, b, c, d és az α' síkban fekvő a', b', c', d' sugárnégyesek általános helyzetűek, akkor van az α síknak az α' síkra egy és csak egy olyan projektív leképezése, mely az a, b, c, d egyenesnek rendre az a', b', c', d' egyenest felelteti meg.*

Ezt a tételt a **26**.7 és 8 tétel alapján következőképpen vezetjük le. Jelöljük A, B, C-vel a b, c, a c, a és az a, b egyenespárok metszéspontját, továbbá D-vel a d egyenesnek az ABC háromszögre vonatkozó pólusát ; hasonlóan értelmezzük a másik síkban az A', B', C', D' pontokat. Mivel mindkét pontnégyes általános helyzetű, a **26**.7 tétel szerint van az α síknak az α' síkra egy és csak egy olyan projektív leképezése, melynél A, B, C, D az A', B', C', D' pontba megy át ; ennél az $a=BC$ egyenes képe az $a'=B'C'$ egyenes, hasonlóan b és c képe b' és c'. Mivel a D pont képe D', tehát D-nek az ABC háromszögre vonatkozó d polárisa a D' pontnak az $A'B'C'$ háromszögre vonatkozó d' polárisába megy át (**26**.8).

Értelmezés. Egy síknak önmagára, vagy egy másik síkra való kölcsönösen egyértelmű leképezését *kollineáris leképezés*nek vagy *kollineáció*nak nevezzük, ha az adott sík minden egyenesének egyenest feleltet meg.

Mint láttuk, egy síknak önmagára, vagy egy másik síkra való bármely projektív leképezése kollineáris. Ha feltesszük a **P I, II** és **D** axiómákat, akkor megfordítva is: a síknak minden kollineációja projektív leképezés (**26**.5). Ebből következik, hogy bármely kollineáció inverze is kollineáció.

További tárgyalásunkban *a sík projektív leképezéseit kollineációknak is fogjuk nevezni.*

26.10. Tétel. *Legyen a és b az α sík két egyenese, közös pontjuk O; legyen a' és b' az α' sík két egyenese, közös pontjuk O'. Ha a-nak a'-re, s b-nek b'-re egy-egy projektív leképezését tetszőlegesen megadjuk olyan módon, hogy az O pontnak mindkét leképezésnél az O' pont feleljen meg, akkor van az α síknak az α' síkra egy és csak egy olyan* **T** *projektív leképezése, mely a-n és b-n a megadott projektív leképezésekkel megegyezik.*

Bizonyítás. Ez a tétel a **26**.7 tételből is könnyen levezethető. A következő, közvetlen bebizonyításából viszont a **26**.7 tétel másik levezetése is adódik. Jelöljük ugyancsak **T**-vel az a egyenesnek a'-re és b-nek b'-re való, megadott projektív leképezését; ezt a leképezést ki akarjuk terjeszteni az egész α síkra, hogy annak az α' síkra való projektív leképezéséhez jussunk.

Legyen P az α sík tetszőleges olyan pontja, mely nem tartozik sem a-hoz, sem b-hez. Az a egyenesnek a P pontból a b egyenesre való vetítése egy Σ perspektív vonatkozás az a és b egyenesek pontjai között. Vigyük át ezt a vonatkozást a **T** leképezéssel az a' és b' egyenesre; tehát ha A az a-nak, és B a b-nek egy-egy olyan változó pontja, melyek egy a P ponton átmenő egyenesen feküsznek, jelöljük A'-vel és B'-vel az ezeknek **T**-nél megfelelő, rendre az a', illetve a b' egyenesen fekvő pontokat; legyen Σ' az a vonatkozás a' és b' között, melynél az a' egyenes változó A' pontjának a b' egyenes B' pontja felel meg. A Σ' leképezés a következő három projektív leképezés szorzata: $\mathbf{T}^{-1}$, mely a'-t a-ba viszi át, Σ, mely a-t b-be és **T**, mely b-t b'-be viszi át. Ebből következik, hogy Σ' is projektív leképezés. Mivel pedig az O' pont Σ'-nél önmagának felel meg (ugyanis $\mathbf{T}^{-1}$-nél O-ba, ez Σ-nál önmagába, és **T**-nél O'-be megy át), tehát Σ' perspektív vonatkozás az a' és b' egyenesek között (**6**.4). Ennek a perspektív vonatkozásnak P' középpontját feleltetjük meg a P pontnak, mint az α síkon értelmezendő **T** leképezésnél származó képét.

Ebből a meghatározásból közvetlenül következik, hogy két különböző P és Q pontnak a **T** leképezésnél két különböző P' és Q' képpont felel meg. Bármely három, egy egyenesen fekvő pontnak három, egy egyenesen fekvő pont felel meg. Legyen először p egy tetszőleges olyan egyenes az α síkban, mely nem megy át az O ponton ; p-nek a-val és b-vel közös pontja legyen A és B, ezeknek **T**-nél származó képe A' és B'. A p egyenes tetszőleges P pontjának képe a $p'=A'B'$ egyenes valamely P' pontja, mivel A' és B' egymásnak felel meg az a' és b' közti, P' középpontú perspektív vonatkozásnál. Ha pedig az α sík Q pontja nem tartozik a p egyeneshez, Q képe, Q' nem tartozik a p' egyeneshez. Legyen másodszor p egy olyan (a-tól és b-től különböző) egyenes az α síkban, mely átmegy az O ponton, P, Q a p egyenes két tetszőleges pontja, s P', Q' ezeknek **T**-nél származó képe. Ha a $P'Q'$ egyenes nem menne át az O' ponton, metszené a'-t és b'-t két, O'-től különböző A' és B' pontban ; ezeknek az a, illetve a b egyenesen két, O-tól különböző A és B pont felel meg. Mint előbb megállapítottuk, az AB egyenes pontjainak és csakis ezeknek a képe tartozik az $A'B'$ egyeneshez. De P és Q nem tartozhatnak mindketten az AB egyeneshez, mert feltevés szerint a PQ egyenes átmegy az O ponton, s ezért nem megy át sem az A, sem a B ponton. Ebből következik tehát, hogy minden, az O ponton átmenő p egyenesnek **T**-nél egy, az O' ponton átmenő p' egyenes felel meg. A **26**.4 tétel feltételei teljesülnek, s ebből következik, hogy **T** az α síknak az α' síkra való projektív leképezése, mely az a és b egyeneseken a megadott leképezésekkel megegyezik. A **26**.6 tétel folytán a **T** leképezést az a és b egyeneseken előírt leképezések egyértelműen meghatározzák.

A **26**.10 tételnek a síkbeli dualitás szerint a következő felel meg :

26.11. T é t e l. *Legyen A és B az α sík két pontja, A' és B' az α' sík két pontja. Ha az A, illetve a B középpontú sugársort egy-egy projektív leképezéssel átvisszük az A', illetve B' középpontú sugársorba, olyan módon, hogy mindkét leképezésnél az AB egyenesnek az $A'B'$ egyenes feleljen meg, akkor megadható az α síknak az α' síkra egy és csak egy olyan projektív leképezése, mely az A és B középpontú sugársorok elemeit ugyanazokba az egyenesekbe viszi át, mint az eredetileg megadott projektív leképezések.*

B i z o n y í t á s. Az α sík tetszőleges p egyenese, mint perspektivitási tengely meghatároz egy perspektív vonatkozást az A és B középpontú sugársorok között ; ennél az AB egyenes önmagának felel meg. Az A' és B' középpontú sugársorokra átvisszük ezt a perspektív vonatkozást a megadott projektív leképezésekkel, s ezáltal az A' és B' középpontú sugársorok között is egy perspektív vonatkozást létesítünk (a **6**.6 tétel szerint, mivel az $A'B'$ egyenes önmagának felel meg). A perspektív vonatkozás p' tengelyét a p egyenesnek feleltetjük meg. Az α sík valamely P pontjának P' képét úgy határozzuk meg, hogy az α síkban két, a P ponton átmenő p és q egyenest veszünk fel, s az ezeknek megfelelő p' és q' egyenesek metszéspontját, P'-t feleltetjük meg a P pontnak. A **26**.10 tétel bebizonyításában alkalmazott meggondolással láthatjuk be, hogy ilyen módon a két sík között egy kölcsönösen egyértelmű, projektív vonatkozást kapunk, mely az A és a B középpontú sugársorok elemeire nézve az előre megadott projektív leképezésekkel megegyezik.

27. §. A sík önmagára való projektív leképezései. (P I, II és D).

É r t e l m e z é s. Egy *síknak önmagára való perspektív* (vagy *homolog*) *leképezésén* egy olyan projektív leképezést értünk, mely eleget tesz a következő feltételeknek:

1. *A leképezés perspektív egy O középpontra vonatkozóan*, azaz bármely P pontot, mely különbözik képétől, P'-től, a P'-vel összekötő PP' egyenes átmegy az O ponton; az O pontot a *perspektivitás középpontjának* nevezzük.

2. *A leképezés perspektív egy l tengelyre vonatkozóan*, azaz bármely p egyenesnek, mely különbözik képétől, p'-től, p'-vel közös pontja az l egyeneshez tartozik; az l egyenest a *perspektivitás tengelyének* nevezzük.

A fenti két feltétel közül mindegyik következik a másikból; ezt a következő tételben mondjuk ki:

27.1. T é t e l. *A sík önmagára való projektív leképezése perspektív, ha egy egyenes minden pontja fixpont, vagy ha egy O ponton átmenő minden egyenes invariáns.*

A tételben foglalt első állítás bizonyítása megegyezik a **26**.2 tételével, s mint amaz, a **P I** axiómákon s az ezekből levezetett DESARGUES-féle tételen alapul. A második állítás az elsőből a síkbeli dualitás elve alapján következik.

M e g j e g y z é s. A **P I II** és **D** axiómákat véve alapul, a fenti tételben elegendő feltennünk, hogy *egy egyenes három pontja fixpont, vagy hogy egy ponton átmenő három egyenes invariáns* (lásd **26**.1 és **5**.6 tételt).

Értelmezés. A sík önmagára való perspektív leképezését *speciális*, illetve *általános perspektivitás*nak nevezzük a szerint, hogy a perspektivitás O középpontja a perspektivitás l tengelyén fekszik, vagy nem.

27.2. Tétel. *A sík önmagára való perspektív leképezését egyértelműen meghatározza a perspektivitás O középpontja és l tengelye, továbbá egy P pont és ennek P' képe, vagy egy p egyenes s ennek p' képe.* P és P' tetszőleges olyan pontok, melyek különböznek O-tól és l pontjaitól, s egy, az O ponton átmenő egyenesen feküsznek; p és p' tetszőleges, l-től különböző s az O ponton át nem menő egyenesek, melyeknek metszéspontja az l egyenesen fekszik.

Bizonyítás. Legyen P_0 a PP' egyenesnek az l tengellyel közös pontja. Ha O különbözik P_0-tól (általános perspektivitás esete), akkor van a PP' egyenesnek egy és csak egy olyan hiperbolikus leképezése önmagára, melynek fixpontjai O és P_0, s melynél a P pont P'-be megy át (**15**.2); a PP' egyenesnek ez a leképezése, és az l egyenes azonos leképezése a **26**.10 tétel szerint egyértelműen meghatározza a síknak önmagára való projektív leképezését. Mivel az l egyenes pontjai fixpontok, a leképezés perspektív a **27**.1 tétel szerint.

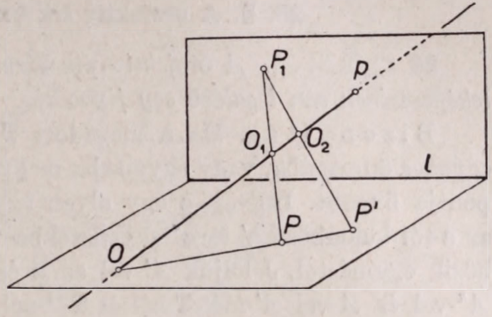
Ha P_0 egybeesik O-val (speciális perspektivitás esete), akkor van a PP' egyenesnek egy és csak egy olyan parabolikus leképezése önmagára, melynek fixpontja O, s melynél a P pont P'-be megy át (**15**.7); a PP' egyenesnek ez a leképezése, s az l egyenes azonos leképezése egyértelműen meghatározza a síknak önmagára való perspektív leképezését, mint az előbbi esetben.

A tételben foglalt második állítás ugyanilyen meggondolással vezethető le a **26**.11 és **27**.1 tételből.

A sík tetszőleges Q pontjának a fenti adatokkal meghatározott perspektív leképezésnél származó Q' képét a következő módon szerkeszthetjük meg. Tegyük fel, hogy a Q pont nem fekszik a PP' egyenesen; a PQ egyenesnek az l tengellyel való metszéspontját összekötjük a P' ponttal, s vesszük ennek az egyenesnek az OQ egyenessel való Q' metszéspontját; ez a Q pont képe. A PP' egyenesen fekvő pontok képét a Q, Q' pontpár felhasználásával hasonlóan szerkesztjük meg.

27.3. Tétel. *A síknak önmagára való perspektív leképezése, melynek tengelye l, előállítható egy, a síkot az l egyenes mentén metsző sík és az adott sík között való két vetítés szorzataként.*

Bizonyítás. Legyen α az adott sík, α' egy másik sík, mely α-t az l egyenesben metszi. A perspektív vonatkozás O középpontján átfektetünk egy p egyenest, mely nem tartozik sem az α, sem az α' síkhoz. Legyen P az α síknak az l tengelyhez nem tartozó pontja, és P' ennek képe a megadott perspektív leképezésnél; P' az OP egyenesen fekszik. Felveszünk a p egyenesen egy tetszőleges olyan O_1 pontot, mely nem tartozik sem az α, sem az α' síkhoz; az O_1P egyenesnek az α' síkkal való P_1 metszéspontját összekötjük P'-vel, a $P'P_1$ egyenesnek a p egyenessel való metszéspontja legyen O_2 (47. ábra). Az α síknak az O_1 pontból az α' síkra való vetítése, s α'-nek O_2-ből az α síkra való vetítése szorzatként az α sík önmagára való perspektív leképezését adja, melynek tengelye l, középpontja O, s melynél a P pontnak P' felel meg; a **27**.2 tétel szerint ez a megadott perspektív leképezéssel azonos.



47. ábra.

27.4. Tétel. *A sík bármely önmagára való projektív leképezése előállítható a sík önmagára való perspektív leképezéseinek szorzataként.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy **T**-nek van egy A fixpontja. Ha ugyanis az A pont különbözik képétől, A'-től, akkor van a síknak olyan $\mathbf{T}'$ perspektív leképezése, melynél A' A-ba megy át (**27**.2), s a $\mathbf{TT}'$ leképezésnél A fixpont. Ha megmutatjuk, hogy $\mathbf{TT}'$ a sík önmagára való perspektivitásaiból alkotott szorzat, akkor ezt $\mathbf{T}'$ inverzével szorozva **T**-nek perspektív leképezések szorzataként való előállításához jutunk.

Legyen a egy, az A fixponton átmenő egyenes, mely különbözik képétől, a'-től. Az a és a' egyenesek között **T** egy perspektivitást létesít, mivel A fixpont (**6**.4); a perspektivitás középpontja legyen O. Felveszünk egy tetszőleges u egyenest az A ponton át, mely különbözik a-tól és a'-től, s nem megy át az O ponton. Jelöljük $\mathbf{T}_1$-gyel a síknak azt a perspektív leképezését önmagára, melynek középpontja O, tengelye u, s mely a-t a'-be viszi át. **T** és $\mathbf{T}_1$ megegyeznek az a egyenesen, $\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T}$ az a' egyenesen az azonosság, a síkban egy $\mathbf{T}_2$ perspektivitás : $\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{T}_2$, ebből $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$. (A fenti meggondolásból s a most bebizonyítandó **28**.1 tételből következik, hogy *a sík bármely önmagára való projektív leképezése előállítható a sík két, önmagára való perspektív leképezésének szorzataként*).

28. §. A projektív sík fixpont-tétele.[1]

28.1. Tétel. *A projektív sík bármely, önmagára való projektív leképezésének van legalább egy fixpontja.*

Bizonyítás. Ha a megadott $\mathbf{T}$ projektív leképezésnél két egyenes önmagába, vagy egymásba megy át, akkor ezeknek metszéspontja fixpont. Legyen a egy olyan egyenes, mely $\mathbf{T}$-nél és $\mathbf{T}^2$-nél az a-tól különböző a' és a'' egyenesekbe megy át; a' és a'' is különbözik egymástól. Jelöljük A'-vel az a és a' egyenes közös pontját, A''-vel és A-val A'-nek $\mathbf{T}$-nél és $\mathbf{T}^{-1}$-nél származó képét; A'' az a' és a'' egyenesek közös pontja. Ha A nem fixpont, akkor az A, A', A'' pontok különböznek egymástól.

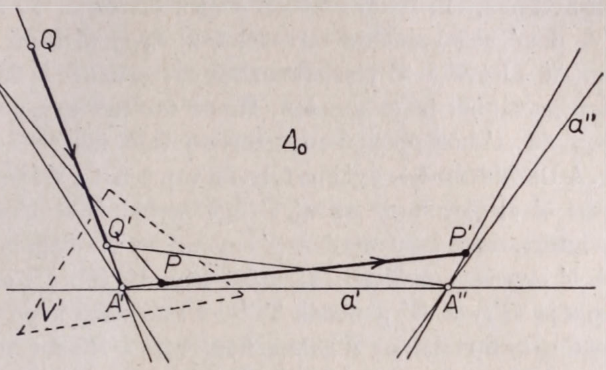
Jelöljük σ_1-gyel és σ_2-vel az a, a' egyenespár által meghatározott szögtartományokat ; σ_1'-vel és σ_2'-vel az ezeknek $\mathbf{T}$-nél megfelelő, az a', a'' egyenesek által meghatározott szögtartományokat. Legyen p' egy, az A' ponton átmenő egyenes, és p'' ennek $\mathbf{T}$-nél származó képe ; ha p' a σ_1 szögtartományhoz, akkor p'' σ_1'-höz, s ha p' σ_2-höz, akkor p'' σ_2'-höz tartozik. Tehát *bármely, az A' ponton átmenő s az a, a' egyenesektől különböző p' egyenesnek képével, p''-vel közös P' pontja ugyanabban, az a, a'' egyenespár által meghatározott σ szögtartományban fekszik* (**25**.4).

Az A' és A'' középpontú sugársorok között a $\mathbf{T}$ leképezés projektív vonatkozást létesít, mely folytonos a **10**.3 tétel és **10**.7 szerint.

Felvesszük az A pontnak egy olyan V környezetét, melynek nincs a $\mathbf{T}$-nél és $\mathbf{T}^2$-nél származó V' és V'' képével közös pontja ; V' az A' pontnak, és V'' az A'' pontnak egy-egy környezete, melyeknek nincs egymással sem közös pontjuk. A **25**.6 tétel szerint megadható az A' középpontú sugársorban az a' egyenesnek, s az A'' középpontú sugársorban az a'' egyenesnek egy-egy v' és v'' környezete, úgy hogy bármely ezekhez tartozó p' és p_1'' egyenesek P' metszéspontja az A'' pont V'' környezetéhez tartozik ; v'-t és v''-t felvehetjük,

[1] További tárgyalásunk alapjai a **P I, II** és **D** axiómák.

úgyhogy v' képe a $\mathbf{T}$ leképezésnél v'' legyen. E szerint bármely, v'-höz tartozó p' egyenesnek képével, p''-vel közös P' pontja az A'' pont V'' környezetéhez, s ezért P'-nek $\mathbf{T}^{-1}$-nél származó P képe az A' pont V' környezetéhez tartozik (48. ábra).



48. ábra.

Az A' középpontú sugársorban az a' egyenes v' környezetének a $\mathbf{T}^{-1}$ leképezés az A középpontú sugársorban az a egyenes egy v környezetét felelteti meg. A v környezetet az a egyenes két részre osztja fel; a két rész közül az egyikre fennáll a következő tulajdonság: bármely ehhez a részhez tartozó p egyenesnek a V' környezethez tartozó szakasza a σ szögtartományban fekszik. A p egyenesnek képével, p'-vel közös P pontja tehát az A' pont V' környezetéhez s a σ szögtartományhoz tartozik, továbbá p'-nek képével, p''-vel közös P' pontja, mely a P pont képe, az A'' pont V'' környezetéhez, s ugyancsak a σ szögtartományhoz tartozik. Jelöljük Δ_0-val a σ szögtartománynak s a p' egyenest tatalmazó σ_1, vagy σ_2 szögtartománynak közös részét; Δ_0 az a, a', a'' egyenesek által meghatározott egyik háromszögtartomány. E szerint *a p' egyenesnek a Δ_0 háromszögtartományhoz tartozó $A'P'$ szakasza tartalmazza a $P = \mathbf{T}^{-1}(P')$ pontot.*

A fentihez hasonló eljárással meghatározzuk az A' és A'' középpontú sugársorokban az a és a' egyeneseknek egy-egy w' és w'' környezetét, úgyhogy w' a $\mathbf{T}$ leképezésnél w''-be menjen át, s hogy bármely, w'-höz tartozó q' egyenesnek $\mathbf{T}$-nél származó q'' képével közös Q' pontja az A' pont V' környezetéhez tartozzék. *A Δ_0 háromszögtartományhoz tartozó $A'Q'$ szakasz nem tartalmazza a $Q = \mathbf{T}^{-1}(Q')$ pontot.*

Az A' középpontú sugársornak a Δ_0 háromszögtartományon átmenő p' egyeneseit két $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ részhalmazra osztjuk fel, a következő előírás szerint. Ha a p' és $p'' = \mathbf{T}(p')$ egyenesek P' metszéspontja és az A' pont által meghatározott, s a Δ_0 háromszögtartományhoz tartozó $A'P'$ szakasz tartalmazza a $P = \mathbf{T}^{-1}(P')$ pontot, akkor a p' egyenes $\mathfrak{A}$-hoz, ellenkező esetben $\mathfrak{B}$-hez tartozik. Mint láttuk, a v', illetve a w' környezethez tartozó, s a Δ_0-on átmenő egyenesek rendre az $\mathfrak{A}$, illetve a $\mathfrak{B}$ részhalmazhoz tartoznak. A **25**.6 tételből következik továbbá, hogy minden, $\mathfrak{A}$-hoz tartozó egyenessel együtt ennek egy, az A' középpontú sugársorban való környezete is $\mathfrak{A}$-hoz tartozik. A Dedekind-féle axióma folytán van tehát a $\mathfrak{B}$ részhalmaznak egy olyan b' eleme, hogy az a', b' egyenesek által meghatározott egyik szögtartományban minden p' egyenes az $\mathfrak{A}$ részhalmazhoz tartozik. A b' egyenesnek $\mathbf{T}$-nél származó képe legyen b'', ennek b'-vel közös pontja B', s a B' pontnak $\mathbf{T}^{-1}$-nél származó képe B. Mivel a b' egyenes nem tartozik az $\mathfrak{A}$ halmazhoz, ezért a B pont nem tartozik a Δ_0-ban fekvő $A'B'$ szakaszhoz. Ha a Δ_0-hoz tartozó $A'B'$ szakasz valódi része volna az $A'B'B$ szakasznak, akkor a **25**.6 tétel szerint megadhatnók a b' egyenesnek az A' középpontú sugársorban egy környezetét, úgyhogy bármely ehhez tartozó p' egyenesen a Δ_0-hoz tartozó $A'P'$ szakasz az $A'P'P$ szakasznak része volna; ennek a környezetnek minden egyenese a $\mathfrak{B}$ halmazhoz tartoznék, holott b' meghatározása szerint b' bármely környezete tartalmazza az $\mathfrak{A}$ halmaznak legalább egy elemét. Ebből az ellenmondásból következik, hogy a B pont egybeesik B'-vel, vagyis, hogy B *fixpont a* $\mathbf{T}$ *leképezésnél.*

A fenti eredményből a síkbeli dualitás elvének megfelelően adódik a következő tétel:

28.2. Tétel. *A projektív sík bármely, önmagára való projektív leképezésénél van legalább egy invariáns egyenes.*

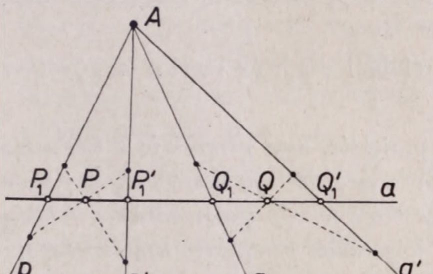
29. §. Asszociált invariáns elemek.

Legyen $\mathbf{T}$ a sík önmagára való projektív, nem perspektív leképezése, s A a leképezés valamely fixpontja. Minden, az A ponton átmenő p egyenesnek a $\mathbf{T}$ leképezésnél egy, az A ponton átmenő p' egyenes felel meg; tegyük fel, hogy p' különbözik p-től. A p és p' egyenesek közti projektív vonatkozásnál, melyet a $\mathbf{T}$ leképezés létesít, a két egyenes A metszéspontja önmagának felel meg, s ezért a két egyenes vonatkozása perspektív (**6**.4); jelöljük P-vel ennek a perspektív vonatkozásnak a középpontját.

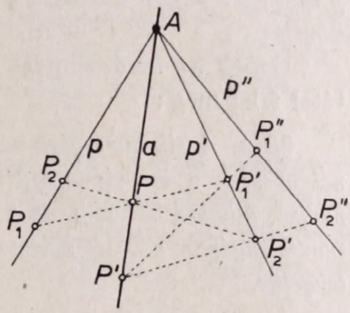
29.1. *Az A ponton átmenő p egyeneseknek megfelelő P perspektivitási középpontok egy a egyenesen feküsznek, mely invariáns a* **T** *leképezésnél.*

Ennek az állításnak igazolására vegyünk fel két, az A ponton átmenő, nem invariáns p és q egyenest; ezeknek **T**-nél származó képe legyen p' és q'; jelöljük P-vel és Q-val a p és p', illetve a q és q' közti perspektív vonatkozás középpontját. P különbözik Q-tól, mivel **T** nem perspektív.

Tegyük fel először, hogy a PQ egyenes nem megy át az A ponton, s jelöljük a PQ egyenesnek a p, p', q, q' egyenessel való metszéspontját P_1, P_1', Q_1, Q_1'-vel (49. ábra). Mivel a $P_1 P_1'$ egyenes átmegy a P ponton, a P_1 és P_1' pontok egymásnak felelnek meg a **T** által a p és p' egyenesek közt létesített perspektív vonatkozásnál; ez azt jelenti, hogy a P_1



49. ábra.



50. ábra.

pont a **T** leképezésnél P_1'-be megy át. Hasonlóan a Q_1 pont **T**-nél Q_1'-be megy át, s ezért a $P_1 Q_1$ egyenesnek **T**-nél, a $P_1' Q_1'$ egyenes felel meg. Mivel ezek az egyenesek azonosak PQ-val, ezzel igazoltuk, hogy a $PQ = a$ egyenes invariáns **T**-nél. Legyen r tetszőleges más, az A ponton átmenő egyenes, és r' ennek **T**-nél származó képe; jelöljük az a egyenesnek r-rel és r'-vel közös pontját R_1, R_1'-vel. Mivel a invariáns **T**-nél, az R_1 pont képe R_1'. Az r és r' egyenesek közt **T** által létesített perspektív vonatkozásnál R_1 és R_1' egymásnak felel meg, tehát a perspektivitás R középpontja hozzátartozik az $R_1 R_1' = a$ egyeneshez.

Tegyük fel másodszor, hogy bármint választjuk is az A ponton átmenő p, q nem invariáns egyeneseket, a p és p', valamint a q és q' közti perspektív vonatkozások P és Q középpontját összekötő PQ egyenes átmegy az A ponton. Ha p-t rögzítjük, és q-t változtatjuk, akkor tehát a Q perspektivitási középpont a q választásától független $AP = a$ egyenesen fekszik. Legyen P_1 és P_2 a p egyenes két tetszőleges, A-tól különböző pontja, P_1', P_2' ezeknek $\mathbf{T}$-nél, és P_1'', P_2'' a $\mathbf{T}^2$ leképezésnél származó képe (50. ábra). A $P_1 P_1'$ és $P_2 P_2'$ egyenesek P metszéspontjának $\mathbf{T}$-nél a $P_1' P_1''$ és $P_2' P_2''$ egyenesek P' metszéspontja, vagyis a p és p' közti perspektivitás középpontjának a p' és $p'' = \mathbf{T}(p')$ egyenesek közti perspektivitás középpontja felel meg. Mivel a p' és p'' közti perspektivitás középpontja, P' az AP egyenesen fekszik, tehát az $a = AP$ egyenes invariáns a $\mathbf{T}$ leképezésnél.

Az a egyenest *az A fixponthoz asszociált invariáns egyenesnek* nevezzük. Fenti eredményünket a következő tételben mondjuk ki:

29.2. *Ha* $\mathbf{T}$ *a sík önmagára való projektív, nem perspektív leképezése, akkor* $\mathbf{T}$ *minden A fixpontjának megfelel egy asszociált invariáns a egyenes, mely tartalmazza bármely, az A ponton átmenő nem invariáns p egyenes s* $\mathbf{T}$*-nél származó p' képe közti perspektív vonatkozás középpontját.*

Ennek az eredménynek a síkbeli dualitás szerint a következő tétel felel meg:

29.3. *A sík önmagára való projektív, nem perspektív* $\mathbf{T}$ *leképezésénél minden a invariáns egyenesnek megfelel egy asszociált A fixpont, melyen áthalad bármely, az a egyenesen fekvő, nem invariáns P középpontú sugársor s* $\mathbf{T}$*-nél származó képe közti perspektív vonatkozásnak a tengelye.*

29.4. Meg fogjuk mutatni, hogy *az A fixponthoz asszociált a invariáns egyenesnek maga az A fixpont felel meg, mint a-hoz asszociált fixpont.*

Ha az a egyenes nem megy át az A ponton, legyen p és $p' = \mathbf{T}(p)$ két különböző, az A ponton átmenő egyenes, P_1 és P_1' ezeknek az a invariáns egyenessel való metszéspontja; nyilván $P_1' = \mathbf{T}(P_1)$. A P_1 és P_1' középpontú sugársorok között a $\mathbf{T}$ által létesített projektív vonatkozás perspektív, mivel a $P_1 P_1' = a$ egyenes önmagának felel meg (**6**.6). A két sugársornak $p = P_1 A$ és $p' = P_1' A$ egyenese egymásnak felel meg, tehát a perspektív vonatkozás tengelye átmegy a p és p' egyenesek A metszéspontján. Ebből következik, hogy A az a invariáns egyeneshez asszociált fixpont.

Ha az a egyenes átmegy az A ponton, legyen p egy tetszőleges, a-tól különböző, s az A ponton átmenő egyenes, p' és p'' ennek $\mathbf{T}$-nél és $\mathbf{T}^2$-nél származó képe; tegyük fel, hogy p és p' különböző.

A p és p' közti perspektivitás P középpontja **T**-nél a p' és p'' közti perspektivitás P' középpontjába megy át, mint fent láttuk ; a P és P' pontok az a egyenesen feküsznek. Ha P_1 a p egyenes változó pontja, s P_1', P_1'' a P_1 pontnak a **T** és a $\mathbf{T}^2$ leképezésnél származó képe, akkor a $P_1 P_1'$ egyenes, mint a P középpontú sugársornak, s a $P_1' P_1''$ egyenes, mint a P' középpontú sugársornak az eleme, egymásnak felel meg a két sugársor közti perspektív vonatkozásnál ; ennek a perspektív vonatkozásnak a tengelye a $P_1 P_1'$ és $P_1' P_1''$ egyenesek P_1' metszéspontja által leírt p' egyenes, mely átmegy az A ponton. Ebből következik, hogy A az a invariáns egyeneshez asszociált fixpont.

29.5. *Ha a* **T** *leképezés valamely A fixpontja nem tartozik az a invariáns egyeneshez, akkor A és a egymáshoz asszociált invariáns elemek.*

Legyen ugyanis p egy, az A ponton átmenő egyenes, mely különbözik képétől, p'-től ; p és a közös P_1 pontjának képe a p' és a egyenes közös pontja : P_1'. Tehát az adott leképezés által a p és p' egyenesek közt létesített perspektív vonatkozás középpontja az $a = P_1 P_1'$ egyeneshez tartozik. Ebből következik, hogy a az A fixponthoz asszociált invariáns egyenes. (Ugyanezt az eredményt szolgáltatja **29**.4 bizonyításának első része is).

29.6. Fenti eredményeink folytán *a sík bármely önmagára való projektív, nem perspektív leképezésénél a fixpontok száma egyenlő az invariáns egyenesek számával,* mivel az asszociált invariáns pontok és egyenesek kölcsönösen egyértelműen felelnek meg egymásnak (**29**.2, 3 és 4).

30. §. A sík projektív leképezéseinek osztályozása.

30.1. A sík bármely önmagára való projektív, nem perspektív leképezésének legfeljebb három fixpontja, s egy egyenesen legfeljebb két fixpontja van. Mivel a fixpontok és az invariáns egyenesek száma egyenlő, *a sík nem perspektív, projektív leképezéseinek különböző típusai* a következők. (Lásd az 51. ábrát).

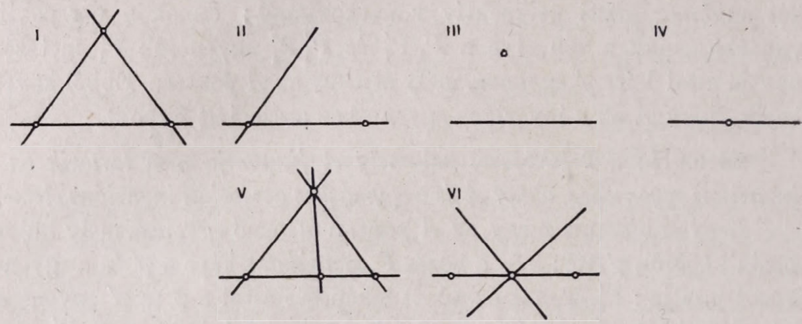
I. A leképezésnek három, nem egy egyenesen fekvő A, B, C fixpontja van, s három invariáns egyenese : $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

II. A leképezésnek két A és B fixpontja van, s két a és b invariáns egyenese. Mivel AB invariáns egyenes, s a és b metszéspontja fixpont, tehát a két invariáns egyenes közül az egyik átmegy mindkét fixponton, a másik csak az egyik fixponton. Válasszuk a jelöléseket úgy, hogy B legyen a és b metszéspontja, és $b = AB$.

III. A leképezésnek egy A fixpontja s egy A-n át nem menő a invariáns egyenese van, melyen elliptikus a leképezés.

IV. A leképezésnek egy A fixpontja s egy A-n átmenő a invariáns egyenese van, melyen parabolikus a leképezés.

(A felsoroltakon kívül nincs a leképezéseknek más invariáns eleme.)



51. ábra.

A típusok felsorolását a *perspektív leképezések*kel egészítjük ki:

V. Általános perspektivitás.

VI. Speciális perspektivitás.

30.2. Tétel. *Az I—VI típusok transzformációnál invariánsak.* Ez részletesen azt jelenti, hogy ha **T** az α síknak önmagára és **S** az α' síkra való tetszőleges projektív leképezése, akkor **T**-nek **S**-sel való transzformáltja: $\mathbf{T}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{S}$ az α' síknak önmagára való projektív leképezése, s ez ugyanolyan típusú, mint **T**. Ugyanis **T** bármely fixpontjának és invariáns egyenesének **S**-nél származó képe a **T**$'$ leképezésnek fixpontja, illetve invariáns egyenese, és megfordítva: **T**$'$ invariáns pontjai és egyenesei $\mathbf{S}^{-1}$-nél **T** invariáns pontjaiba és egyeneseibe mennek át.

Az *I* típus esetében az A, B, C fixpontokhoz asszociált invariáns egyenesek rendre $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Az ABC háromszög által meghatározott négy háromszögtartomány a leképezésnél egymásba megy át. Ha közülök valamelyik önmagába megy át, akkor a többi is; ebben az esetben az a, b, c egyeneseknek az A, B, C pontok által meghatározott két-két szakasza közül mindegyik önmagának felel meg; az a, b, c egyeneseken a sík kollineációja hiperbolikus leképezéseket létesít, melyek közül mindegyik megtartja az egyenes irányítását. Ha pedig a négy háromszögtartomány közül valamelyik egy másikba megy át, akkor ez a két tartomány egymásnak s a másik két tartomány is egymásnak felel meg a leképezésnél. Két egymásnak megfelelő háromszögtartomány határának közös szakasza önmagába megy át ; tehát az a, b, c egyenesek közül az egyiken az irányítást megtartó, a másik kettőn az irányítást megfordító, hiperbolikus leképezést származtat a sík megadott projektív leképezése. E szerint :

30.3. Tétel. *A sík I típusú projektív leképezése az invariáns háromszög mindegyik oldalán hiperbolikus leképezést létesít; közülök vagy egyiken, vagy mindhármon megmarad az irányítás.*

Ha $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ a síknak két olyan önmagára való projektív leképezése, melyeknél a nem egy egyenesen fekvő A, B, C pontok invariánsak, akkor a két leképezés felcserélhető egymással. Ugyanis a $\mathbf{T}_1$ és a $\mathbf{T}_2$ által az AB egyenesen létesített leképezések felcserélhetők, mivel ezek közül mindegyik vagy az azonosság (ha $\mathbf{T}_1$, vagy $\mathbf{T}_2$ perspektív s tengelye AB), vagy az A, B fixpontokkal bíró hiperbolikus leképezés (l. **15**.4). Hasonlóan $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ felcserélhető az AC egyenesen is. A $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T}_2^{-1}$ leképezés az AB és AC egyeneseken az azonosság, a **26**.6 tétel szerint tehát a sík azonos leképezése, s így $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$. A $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ leképezésnél is fixpontok A, B, C. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt :

30.4. Tétel. *A síknak mindazok a projektív leképezései önmagára, melyeknél három, nem egy egyenesen fekvő A, B, C pont invariáns, kommutatív csoportot alkotnak.* (A csoport elemei az *I* és *V* típushoz tartoznak.)

A *II* típus esetében a két invariáns egyenes B metszéspontja s a két fixpontot összekötő b invariáns egyenes egymáshoz asszociáltak. A b egyenesen hiperbolikus, a-n parabolikus a leképezés. A fentihez hasonló meggondolással adódik a következő tétel :

30.5. Tétel. *A síknak mindazok a projektív leképezései önmagára, melyeknek fixpontja A és B, s invariáns egyenese a és b ($b = AB$, $B = ab$), s melyeknél az a egyenesen vagy nincs más fixpont, mint B, vagy az a egyenes minden pontja fixpont, kommutatív csoportot alkotnak.* (A csoport elemei a *II* és *VI* típushoz tartoznak.)

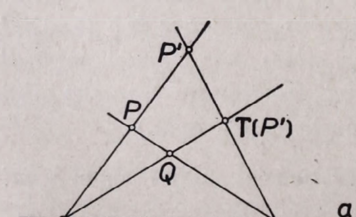
30.6. Tétel. *A sík IV típusú kollineációi valamennyien aequivalensek egymással.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{T}$ az α síknak egy *IV* típusú kollineációja, fixpontját jelöljük A-val, invariáns egyenesét a-val. Ha P a sík tetszőleges, a-hoz nem tartozó pontja, és $P' = \mathbf{T}(P)$ a P pont képe, továbbá Q a PP' és a egyenesek metszéspontja, és $Q' = \mathbf{T}(Q)$ ennek képe, akkor a P, Q és P', Q' megfelelő pontpárok és az A fixpont egyértelműen meghatározzák a $\mathbf{T}$ leképezést. A **15**.7 tétel szerint van ugyanis az $a = AQ$ egyenesnek egy és csak egy olyan parabolikus leképezése, melynek fixpontja A, s mely a Q pontot Q'-be viszi át; ez az a leképezés, melyet az a egyenesen $\mathbf{T}$ származtat. Hasonlóan, az A középpontú sugársorban az $a = AQ$ invariáns egyenes s a $q = AP$ egyenes képe, $q' = AP'$ meghatározza a $\mathbf{T}$ által származtatott parabolikus leképezést. Legyen $Q'' = \mathbf{T}(Q')$ és $q'' = \mathbf{T}(q')$; a q'' és $Q'P'$ egyenesek metszéspontja $P'' = \mathbf{T}(P')$. Az A, P, P', Q' általános helyzetű pontnégyes s ennek képe: A, P', P'', Q'' egyértelműen meghatározza a sík $\mathbf{T}$ kollineációját (**26**.7).

Legyen α_1 egy másik sík, $\mathbf{T}_1$ az α_1 síknak önmagára való, *IV* típusú kollineációja, fixpontja A_1, invariáns egyenese a_1. Felveszünk az α_1 síkban egy tetszőleges, a_1-hez nem tartozó P_1 pontot, jelöljük P_1'-vel ennek $\mathbf{T}_1$-nél származó képét, Q_1-gyel az a_1 és $P_1 P_1'$ egyenesek metszéspontját, és Q_1'-vel Q_1-nek $\mathbf{T}_1$-nél származó képét. A **26**.7 tétel szerint van az α síknak az α_1 síkra egy és csak egy olyan $\mathbf{S}$ projektív leképezése, melynél az A, P, P', Q' pontnak az A_1, P_1 P_1' Q_1' pont felel meg. A fentiekből következik, hogy az $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{TS}$, leképezés $\mathbf{T}_1$-gyel azonos. (Felhívjuk az olvasó figyelmét ennek a tételnek s az egyenes parabolikus leképezéseire vonatkozó **19**.1 tételnek az összefüggésére.)

30.7. Tétel. *A síknak minden III, vagy IV típusú kollineációja, melynek fixpontja A és invariáns egyenese a, felcserélhető minden olyan perspektivitással, melynek középpontja A és tengelye a.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{T}$ egy *III*, vagy *IV* típusú kollineáció, melynek fixpontja A és invariáns egyenese a, s legyen $\mathbf{T}_0$ egy általános vagy speciális perspektivitás, melynek középpontja A és tengelye a. Az a egyenesen $\mathbf{T}$ és $\mathbf{T}_0$ nyilván felcserélhető egymással, mivel ezen az egyenesen $\mathbf{T}_0$ az azonosság. Legyen P egy tetszőleges, a-hoz nem tartozó pont, és $Q = \mathbf{T}(P), P' = \mathbf{T}_0(P)$ ennek $\mathbf{T}$-nél és $\mathbf{T}_0$-nál származó képe. A PQ egyenesnek a-val való U metszés-



52. ábra.

pontja az AP és AQ egyenesek között $\mathbf{T}$ által létesített perspektív vonatkozásnak a középpontja ; mivel $P' = \mathbf{T}_0(P)$ az AP egyenesen fekszik, tehát P'-nek $\mathbf{T}$-nél származó képe az UP' és AQ egyenesek metszéspontja. (Az 52. ábra a IV típus esetére vonatkozik.) Az AP és AQ egyenes invariáns $\mathbf{T}_0$-nál, az UP egyenes képe UP', tehát Q-nak $\mathbf{T}_0$-nál származó képe ugyancsak az UP' és AQ egyenes metszéspontja. Ebből következik, hogy $\mathbf{T}\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_0\mathbf{T}$.

A fentihez hasonló meggondolással adódik a következő tétel :

30.8. Tétel. *A síknak azok a speciális perspektivitásai, melyeknek tengelye ugyanaz az u egyenes, kommutatív csoportot alkotnak, mely az u egyenesen kívül a síkon egyszeresen tranzitív.*

Bizonyítás. Ha P és Q a sík két tetszőleges olyan pontja, melyek közül egyik sem tartozik az u egyeneshez, legyen U a PQ és u egyenesek metszéspontja. A **27.**2 tétel szerint van a síknak egy és csak egy olyan perspektivitása, melynek tengelye u, középpontja U, s mely a P pontot Q-ba viszi át. Nyilvánvaló, hogy ez az egyetlen olyan, az u tengelyhez tartozó speciális perspektivitás, melynél P Q-ba megy át. Tekintettel a **27.**1 tételre, ebből következik, hogy a síknak az u tengelyhez tartozó speciális perspektivitásai csoportot alkotnak, mely a síkon az u egyenes kivételével egyszeresen tranzitív. Ha ezek közül kettőnek ugyanaz a középpontja, akkor felcserélhetők egymással (l. **15.**10).

Legyen U_1 és U_2 az u egyenes két különböző pontja ; jelöljünk $\mathbf{T}_1$-gyel és $\mathbf{T}_2$-vel egy-egy, az u tengelyre s az U_1, illetve az U_2 középpontra vonatkozó tetszőleges perspektivitást, s legyen a sík valamely, az u egyeneshez nem tartozó P pontjának $\mathbf{T}_1$-nél és $\mathbf{T}_2$-nél származó képe P_1 és P_2. A PP_1 egyenes átmegy az U_1, s a PP_2 egyenes az U_2 ponton. Tehát PP_2-nek $\mathbf{T}_1$-nél származó képe az U_2P_1 egyenes, s PP_1-nek $\mathbf{T}_2$-nél származó képe az U_1P_2 egyenes. Az U_2P_1 és U_1P_2 egyenesek metszéspontja P_1-nek $\mathbf{T}_2$-nél és P_2-nek $\mathbf{T}_1$-nél származó képe, azaz $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2(P) = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1(P)$; mivel P tetszőleges, u-hoz nem tartozó pont, ez azt jelenti, hogy az u tengelyű speciális perspektivitások csoportja kommutatív.

30.9. Tétel. *A sík periodikus projektív leképezéseinek típusai a következők:*

Involutorius leképezés: a sík harmonikus perspektivitása egy A középpontra és egy, az A ponton át nem menő a tengelyre vonatkozóan; ez a leképezés minden, az A ponton átmenő p egyenesen megegyezik azzal a hiperbolikus (azaz harmonikus) involucióval, melynek fixpontjai A és a p egyenesnek az a tengellyel való metszéspontja (V típus);

n-periodusú leképezések ($n > 2$): a leképezésnek egy A fixpontja s egy, az A ponton át nem menő a invariáns egyenese van, melyen a leképezés elliptikus, s periódusa n, vagy $n/2$, a szerint, hogy n páratlan vagy páros (III típus).

A tétel bebizonyítása céljából elég emlékeztetni arra, hogy az egyenes bármely önmagára való periodikus leképezése vagy hiperbolikus involució, vagy elliptikus leképezés (**14**.5), s ezért az I, II, IV, VI típusú leképezések nem lehetnek periodikusak, és az V típusú leképezések közül csak a harmonikus perspektivitás periodikus.

Későbbi alkalmazások céljából bebizonyítjuk a következő tételeket:

30.10. Tétel. *A* $\mathbf{T}_1$ *és* $\mathbf{T}_2$ *harmonikus perspektivitások akkor és csak akkor cserélhetők fel egymással, ha mindegyiknek a középpontja a másiknak a tengelyén fekszik. Ebben az esetben szorzatuk is harmonikus perspektivitás, melynek középpontja* $\mathbf{T}_1$ *és* $\mathbf{T}_2$ *tengelyének metszéspontja, s tengelye a* $\mathbf{T}_1$ *és* $\mathbf{T}_2$ *középpontját összekötő egyenes.*

Bizonyítás. Jelöljük $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ középpontját A-val és B-vel, tengelyüket a-val és b-vel. Ha $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ felcserélhető: $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$, akkor

$$(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2)^2 = \mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2^2 = \mathbf{I},$$

azaz $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ involutorius leképezés s ezért a **30**.9 tétel szerint harmonikus perspektivitás. Ebből és a **16**.2 tételből következik, hogy A különbözik B-től, és a különbözik b-től. $\mathbf{T}$-nek fixpontja az a, b egyenesek C metszéspontja s invariáns egyenese $c = AB$. A c egyenesen $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ egy-egy harmonikus involuciót származtat; ezeknek szorzata megtartja a c egyenes irányítását. Mivel $\mathbf{T}$ minden invariáns egyenesen vagy harmonikus involuciót származtat, vagy az azonos leképezést, tehát $\mathbf{T}$ a c egyenesen az azonos leképezés, s ezért a $\mathbf{T}$ harmonikus perspektivitás tengelye c s középpontja C. Mivel $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ megegyezik a c egyenesen, tehát A a b tengelyen és B az a tengelyen fekszik. Megfordítva, ha A a b, és B az a egyenesen fekszik, akkor $\mathbf{T}_1\mathbf{T}$ a $c = AB$ egyenesen az azonos leképezés, s a $b = AC$ egyenesen az A, C fixpontokra vonatkozó harmonikus involuciót származtatja (úgy, mint $\mathbf{T}_1$, mivel $\mathbf{T}_2$ ezen az egyenesen az azonosság). A $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ leképezés tehát a b és a c egyenesen megegyezik a C középpontú és

c tengelyű harmonikus perspektivitással, s ezért az egész síkon is (l. a **26**.6, vagy a **26**.10 tételt).

30.11. Tétel. *Ha A és B két különböző pont és a, b két különböző egyenes, akkor az A középpontú, a tengelyű $\mathbf{T}_1$, s a B középpontú, b tengelyű $\mathbf{T}_2$ perspektivitások szorzata vagy az azonosságtól különböző, nem perspektív leképezés, vagy olyan perspektivitás, melynek középpontja nem tartozik az AB egyeneshez.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ perspektív leképezés. Mivel a pontjai invariánsak $\mathbf{T}_1$-nél, de $\mathbf{T}_2$-nél nem, ezért $\mathbf{T}$ tengelye nem lehet az a (sem a b) egyenes. Ha P fixpontja $\mathbf{T}$-nek, akkor a $P' = \mathbf{T}_1(P)$ pont az AP egyenesen és $P = \mathbf{T}_2(P')$ a BP' egyenesen fekszik; ha P' különbözik P-től, akkor tehát P és P' az AB egyenes pontjai. E szerint a $\mathbf{T}$ perspektivitás tengelye az AB egyenes; ezen $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2^{-1}$ ugyanazt, az A, B fixpontokhoz tartozó hiperbolikus leképezést származtatja. Ebből következik, hogy $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ általános perspektivitások, mindegyiknek tengelye átmegy a másiknak középpontján, s tengelyeik $C = ab$ metszéspontja a $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ perspektivitás középpontja; ez a pont nem tartozik az AB egyeneshez.

31. §. Elliptikus involucióval felcserélhető kollineációk.

További tárgyalásunk során alkalmunk lesz foglalkozni a síknak olyan önmagára való $\mathbf{T}$ projektív leképezéseivel, melyeknél invariáns egy a egyenes s melyek a-nak egy megadott $\mathbf{J}$ elliptikus involuciójával felcserélhetők abban az értelemben, hogy az a egyenes bármely pontjának a $\mathbf{T}.\mathbf{J}$ és a $\mathbf{J}.\mathbf{T}$ leképezés ugyanazt a képpontot felelteti meg.

A $\mathbf{J}$ elliptikus involució felcserélhető az a egyenes *azonos leképezésén* kívül az a egyenes ama *hiperbolikus involucióival*, melyeknek fixpontjai $\mathbf{J}$-nél egymásba mennek át, továbbá bármely két ilyen hiperbolikus involució szorzatával; ezek a szorzatok az a egyenes *elliptikus leképezései*, s együtt egy egytagú csoportot alkotnak (**17**.10). A nevezetteken kívül nincs az a egyenesnek más, $\mathbf{J}$-vel felcserélhető projektív leképezése (**17**.8).

Ha a $\mathbf{T}$ leképezés az a egyenesen az *azonos leképezést* származtatja, akkor $\mathbf{T}$ *általános vagy speciális perspektivitás*, melynek tengelye a (**27**.1).

Ha $\mathbf{T}$ az a egyenesen *hiperbolikus involuciót* származtat, melynek P és Q fixpontjait $\mathbf{J}$ felcseréli egymással, akkor $\mathbf{T}$ vagy *harmonikus perspektivitás* s a P, Q pontok közül az egyik a perspektivitás tengelyén fekszik, a másik a perspektivitás középpontja; vagy pedig $\mathbf{T}$ I, vagy II típusú, nem perspektív, projektív leképezés. Az I típus esetében $\mathbf{T}$-nek az a egyenesen fekvő P, Q fixpontjain kívül még egy R fixpontja van, mely nem tartozik az a egyeneshez; a II típus esetében $\mathbf{T}$-nek P-n és Q-n kívül nincs más fixpontja. Vizsgáljuk meg sorban ezt a két esetet.

Ha $\mathbf{T}$-nek három fixpontja van, P, Q és R, melyek közül P és Q az a egyenesen fekszik, de R nem, jelöljük $\mathbf{T}_1$-gyel azt a harmonikus perspektivitást, melynek középpontja P, s tengelye a QR egyenes. A $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}.\mathbf{T}_1$ projektív leképezésnél R fixpont, továbbá az a egyenes minden pontja fixpont, mivel $\mathbf{T}$ és $\mathbf{T}_1$ az a egyenesen mindketten a P, Q fixpontokra vonatkozó harmonikus involuciót származtatják; ezért $\mathbf{T}_2$ egy perspektivitás, melynek középpontja R és tengelye a. $\mathbf{T}_2$ nem lehet harmonikus perspektivitás, különben a PR egyenesen megegyeznék $\mathbf{T}_1$-gyel s ezért a $\mathbf{T} = \mathbf{T}_2.\mathbf{T}_1$ leképezésnél a PR egyenes minden pontja fixpont volna, holott feltettük, hogy $\mathbf{T}$ nem perspektív leképezés. A $\mathbf{T}$ leképezés tehát a $\mathbf{T}_2$ és $\mathbf{T}_1$ perspektivitások szorzata, melyek közül $\mathbf{T}_2$ egy, az a tengelyre vonatkozó általános perspektivitás, $\mathbf{T}_1$ pedig harmonikus perspektivitás, melynek középpontja a-n fekszik s tengelye a középpontnak $\mathbf{J}$-nél megfelelő pontban metszi az a egyenest.

Ha $\mathbf{T}$-nek nincs P-n és Q-n kívül más fixpontja, akkor a P, Q fixpontok közül az egyik, például P az a invariáns egyeneshez asszociált fixpont. A Q fixponthoz asszociált q invariáns egyenes átmegy a P ponton. Jelöljük $\mathbf{T}_1$-gyel azt a harmonikus perspektivitást, melynek középpontja Q s tengelye q. $\mathbf{T}.\mathbf{T}_1$ az a egyenesen az azonos leképezést származtatja, tehát $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}.\mathbf{T}_1$ egy perspektivitás. Mivel a q egyenes invariáns $\mathbf{T}_2$-nél, a $\mathbf{T}_2$ perspektivitás középpontja a q egyeneshez tartozik; nem lehet különböző a P ponttól, különben $\mathbf{T}$-nek P-n és Q-n kívül ez egy további fixpontja volna, feltevésünkkel ellentétben. Tehát $\mathbf{T}_2$ speciális perspektivitás, amelynek tengelye a s középpontja P; $\mathbf{T}$ pedig ennek a speciális perspektivitásnak a $\mathbf{T}_1$ harmonikus perspektivitással való szorzata: $\mathbf{T} = \mathbf{T}_2.\mathbf{T}_1$.

Végül, ha a $\mathbf{T}$ leképezés az a egyenesen *elliptikus leképezést* származtat, akkor $\mathbf{T}$-nek egy A fixpontja van a síkban, mely nem tartozik az a egyeneshez (III típus). Legyen P és Q az a egyenes két tetszőleges olyan pontja, melyek $\mathbf{J}$-nél egymásnak felelnek meg, s jelöljük $\mathbf{T}_1$-gyel a síknak azt a harmonikus perspektivitását, melynek középpontja P és tengelye QA. A $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}.\mathbf{T}_1$ projektív leképezés az a egyenesen szintén felcserélhető **J**-vel, úgy mint **T** és $\mathbf{T}_1$; ugyanis :

$$\mathbf{T}_2.\mathbf{J} = \mathbf{T}.\mathbf{T}_1.\mathbf{J} = \mathbf{T}.\mathbf{J}.\mathbf{T}_1 = \mathbf{J}.\mathbf{T}.\mathbf{T}_1 = \mathbf{J}.\mathbf{T}_2.$$

Mivel az a egyenesen a **T** által származtatott elliptikus leképezésnek s a $\mathbf{T}_1$ által származtatott hiperbolikus involuciónak a szorzata megfordítja az irányítást, ezért hiperbolikus leképezés (**15**.1 tétel), s mivel felcserélhető a **J** elliptikus involucióval, a $\mathbf{T}.\mathbf{T}_1$ szorzat az a egyenesen egy hiperbolikus involució, melynek fixpontjai **J**-nél egymásba mennek át (**17**.8). A $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}.\mathbf{T}_1$ leképezés a fenti eredmények szerint előállítható egy, az a tengelyre vonatkozó perspektivitásnak s egy olyan harmonikus perspektivitásnak a szorzataként, melynek középpontja az a egyenesen fekszik s tengelye a középpontnak **J**-nél származó képén megy át. Ennek a leképezésnek a $\mathbf{T}_1$ harmonikus perspektivitással való szorzata a megadott **T** leképezés.

A fenti meggondolást Godeaux nyomán adtuk ; ezzel bebizonyítottuk a következő tételt :

31.1. Tétel. *Ha a sík önmagára való* **T** *projektív leképezése az a egyenest önmagába viszi át, s ezen az egyenesen egy megadott* **J** *elliptikus involucióval felcserélhető, akkor* **T** *következő típusú:*

a) *általános vagy speciális perspektivitás, melynek tengelye a;*

b) *harmonikus perspektivitás, melynek középpontja az a egyenesen fekszik s tengelye a középpontnak a* **J** *involuciónál származó képén megy át;*

c) *az* a) *és* b) *típusú perspektivitások közül kettőnek vagy többnek a szorzata.*

A **J** *involucióval felcserélhető* **T** *projektív leképezések nyilván csoportot alkotnak.* Ennek *invariáns alcsoportját*[1] alkotják az a tengelyű speciális perspektivitások (l. **30**.8).

32. §. A sík affin leképezései.

A projektív sík valamely u egyenesét *végtelen távoli egyenesnek* vesszük fel. A sík minden olyan önmagára való projektív leképezését, melynél az u egyenes önmagába megy át, *affin leképezésnek,* vagy *affinitás*nak nevezzük (lásd a 20. §-t is). Hasonlóan értelmezzük két különböző sík egymásra való affin leképezését, mint a két sík olyan

[1] Értelmezést l. első kötet, 255. o.

projektív leképezését, melynél a két sík végtelen távoli egyenese egymásnak felel meg.

Az értelmezésből következik, hogy *a sík önmagára való affin leképezései csoportot alkotnak;* ezt a *sík affin csoportjá*nak nevezzük.

Két egyenest *párhuzamos*nak nevezünk, ha metszéspontjuk az u végtelen távoli egyeneshez tartozik. Az értelmezés folytán *a sík affin leképezéseinél párhuzamos egyenesek párhuzamos egyenesekbe mennek át.*

Az affin sík pontjain a végesben fekvő pontjait értjük, ha az ellenkezőt nem mondjuk ki. Az AB egyenes *AB szakaszán* a végesben fekvő szakaszt értjük, vagyis azt, mely nem tartalmazza az egyenes végtelen távoli pontját. Az *AB szakasz középpontja* az AB egyenes és u metszéspontjának az A, B pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltja. Mivel a sík projektív leképezéseinál az egymásnak megfelelő egyeneseken a harmonikus elválasztások megmaradnak s az affin leképezéseknél u invariáns, ezért *bármely AB szakasz C középpontjának egy tetszőleges affin leképezésnél a megfelelő $A'B'$ szakasz C' középpontja felel meg.*

Legyen ABC egy tetszőleges háromszög az affin síkban; jelöljük C_1, A_1, B_1-gyel az AB, BC, CA szakaszok középpontját. Az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek egy D ponton mennek át (l. **8**.2), melyet a *háromszög súlypontjának* nevezünk (v. ö. első kötet, 188. tétel); a súlypont az u végtelen távoli egyenesnek az ABC háromszögre vonatkozó pólusa. Ha a sík valamely affin leképezésénél a háromszög A, B, C csúcsai az A', B', C' pontokba mennek át, akkor az u egyenesnek az ABC háromszögre vonatkozó pólusa, vagyis a háromszög D súlypontja az $A'B'C'$ háromszög D' súlypontjába megy át (**26**.8). Mivel A, B, C, D és A', B', C', D' általános helyzetű pontnégyesek, ebből a **26**.7 tétel szerint következik, hogy az A, B, C és A', B', C' pontok a sík affin leképezését egyértelműen meghatározzák.

E szerint:

32.1. Tétel. *Ha A, B, C és A', B', C' az affin sík tetszőleges olyan pontjai, melyek közül sem A, B, C, sem A', B', C' nem tartozik egy egyeneshez, akkor van a síknak önmagára egy és csak egy olyan affin leképezése, melynél az A, B, C pontok rendre az A', B', C' pontokba mennek át.*

A sík affin leképezéseinek különböző típusait a projektív leképezéseknek a 30. §-ban felsorolt típusaiból állapíthatjuk meg, figyelembe véve, hogy az u egyenes invariáns. Így kapjuk a következő osztályozást.

32.2. *Affin perspektivitások.*

Ha **T** általános vagy speciális perspektivitás, melynél az u egyenes invariáns, akkor u vagy a perspektivitás tengelye, vagy átmegy a perspektivitás középpontján ; ennek megfelelően az affin perspektivitások következő négy típusát kapjuk :

a) Általános perspektivitás, melynek tengelye u, s középpontja egy végesben fekvő O pont ; az *O középpontra vonatkozó homothétikus leképezésnek* nevezzük. — Ennek speciális esete az O középpontra és az u tengelyre vonatkozó harmonikus perspektivitás ; ez *az affin síknak az O pontra vonatkozó tükrözése,* melynél minden P pontnak az O pontra vonatkozó tükörképe, vagyis az a P' pont felel meg, melyre nézve a PP' szakasz középpontja O.

b) Általános perspektivitás, melynek tengelye egy u-tól különböző a egyenes, s középpontja egy, az a végtelen távoli pontjától különböző, U végtelen távoli pont. Bármely P pontot képével, P'-vel összekötő PP' egyenes átmegy az U ponton, vagyis az összes ilyen egyenesek párhuzamosak egymással. — Ennek speciális esete az a tengelyre és az U középpontra vonatkozó harmonikus perspektivitás, mely *az affin síknak az a egyenesre az U által meghatározott irányban való tükrözése:* minden P pontnak az a P' képpont felel meg, melyre nézve a PP' egyenes az U ponton megy át, s a PP' szakasz középpontja az a egyeneshez tartozik.

c) Speciális perspektivitás, melynek tengelye az u végtelen távoli egyenes, s középpontja egy U végtelen távoli pont. Ez *a síknak önmagában való eltolása* egy olyan PP' vektorral, melyen átfektetett PP' egyenes az U ponton megy át. Ha Q tetszőleges, nem a PP' egyeneshez tartozó pont, s Q' ennek képe, akkor P, P', Q', Q egy parallelogramma csúcsai. A **30**.8 tétel szerint *a sík eltolásai kommutatív, s az affin síkon egyszeresen tranzitív csoportot alkotnak.*

d) Speciális perspektivitás, melynek tengelye egy, u-tól különböző a egyenes, s középpontja a végtelen távoli U pontja. Minden, az a tengellyel párhuzamos egyenes invariáns.

32.3. *Nem perspektív, affin leképezések.*

a) A leképezésnek egy végesben fekvő O fixpontja, s két végtelen távoli U és V fixpontja van. Invariáns egyenesei az u végtelen távoli egyenesen kívül az OU és OV egyenesek ; a sík megadott affin leképezése ezek közül mindegyiken, s az O középpontú sugársorban is hiperbolikus leképezést származtat. Az OU-val párhuzamos egyenesek egymásba, s az OV-vel párhuzamos egyenesek is egymásba mennek át.

b) A leképezésnek két végtelen távoli fixpontja van, végesben nincs fixpontja. Egy, u-tól különböző egyenes is invariáns, s az ezzel párhuzamos egyenesek serege önmagába megy át; egy másik párhuzamos egyenes-sereg is önmagába megy át, de ennek egyik egyenese sem invariáns.

c) A leképezésnek egy végesben fekvő, s egy végtelen távoli fixpontja van. Egy, u-tól különböző egyenes is invariáns, s az ezzel párhuzamos egyenesek serege önmagába megy át.

d) Egy végesben fekvő O fixpont van, s az O középpontú sugársorban elliptikus a leképezés; egy egyenes sem megy át vele párhuzamos egyenesbe.

e) Egy végtelen távoli fixpont van, de végesben nincs fixpontja a leképezésnek, sem más invariáns egyenese, mint u. Egy egyenessel párhuzamos egyenesek serege önmagába megy át.

Az affin síkon bevezethetünk egy *irányítást* olyan értelemben, hogy a síknak minden végesben fekvő pontja körül meghatározunk egy irányítást. (Lásd erre vonatkozóan az első kötet 20. §-át). Mivel az affin leképezéseknél az u végtelen távoli egyenes önmagába megy át, osztályozhatjuk az affin leképezéseket a szerint, hogy megtartják, vagy megfordítják a sík irányítását. Könnyen belátható, hogy egy affin leképezés akkor és csak akkor fordítja meg a sík irányítását, ha a végtelen távoli egyenesen egy, az irányítást megfordító, hiperbolikus leképezést származtat.

33. §. A sík hasonlósági leképezései.

Az euklidesi geometria axiómái alapján értelmezett *merőlegesség* az affin geometria fogalmaival következőképpen jellemezhető.

Egy végesben fekvő O ponton átmenő egyenesek összességében minden a egyenesnek egy és csak egy, a-ra merőleges b egyenes felel meg, s ez különbözik a-tól; a b egyenesnek a felel meg, mint b-re merőleges egyenes. Az euklidesi síknak egy mozgása, nevezetesen az O pont körül való negyedforgása egymásba viszi át az O ponton átmenő, egymásra merőleges egyeneseket. A mozgásnál nem változnak a távolságok, s ezért bármely négy, egy egyenesen fekvő pont kettősviszonya, s ugyancsak négy tetszőleges, az O ponton átmenő egyenes kettősviszonya is változatlan. E szerint az O pont körül való negyedforgás az O középpontú sugársorban projektív vonatkozást létesít, mely involutorius, s nincs invariáns eleme ; ez tehát *a sugársornak egy elliptikus involuciója.*

Két különböző O és O' középpontú sugársorban a merőleges egyenesek involuciója olyan módon felel meg egymásnak, hogyha a és b az O ponton átmenő, egymásra merőleges egyenesek, s a', b' az ezekkel párhuzamos egyenesek az O' ponton át, akkor a' és b' merőlegesek egymásra. E szerint az O és az O' középpontú sugársorokban a merőleges egyenesek involuciójának az u végtelen távoli egyenesen ugyanaz az elliptikus involució felel meg.

A projektív, illetve az affin geometriából kiindulva, a merőlegesség fogalmát olyan módon vezetjük be, hogy felvesszük az u végtelen távoli egyenesnek egy tetszőleges **J** *elliptikus involucióját, s merőlegesnek nevezünk két egyenest, ha ezeknek végtelen távoli pontjai* **J***-nél egymásnak felelnek meg.* A **J** involuciót szokás *abszolut involució*nak nevezni.

A sík önmagára való *hasonlósági leképezésén* értünk minden olyan affin leképezést, mely merőleges egyeneseket merőleges egyenesekbe visz át, vagyis amely felcserélhető az u egyenes **J** elliptikus involuciójával.

A **31**.1 tétel folytán a sík hasonlósági leképezései a következők :

a Általános perspektivitás, melynek tengelye u, s középpontja egy végesben fekvő O pont ; ez egy *homothétikus leképezés* az O középponttal.

b) Speciális perspektivitás, melynek tengelye u, s középpontja egy végtelen távoli U pont ; ez a síknak egy *eltolása.*

c) Harmonikus perspektivitás, melynek középpontja egy végtelen távoli U pont, s tengelye, a az U pontnak a **J** involuciónál megfelelő V pontban metszi az u egyenest ; ez a leképezés a síknak *az a tengelyre vonatkozó merőleges tükrözése ;* ennél minden P pontnak az a P' pont felel meg, melyre nézve PP' merőleges a-ra, s a PP' szakasz középpontja az a egyeneshez tartozik.

d) Az a), b), c) típusú leképezések közül kettőnek, vagy többnek a szorzata.

Két egymást metsző egyenesre vonatkozó tükrözés szorzatát *forgás*nak nevezzük.

A sík hasonlósági leképezései csoportot alkotnak. Az eltolások, a forgások és a homothétikus leképezések megtartják, a tükrözések megfordítják a sík irányítását ; egy ezekből alkotott szorzat megtartja,

10*

vagy megfordítja az irányítást a szerint, hogy a szorzatban páros, vagy páratlan számú tükrözés fordul elő. Az irányítást megtartó hasonlósági leképezések maguk is csoportot alkotnak.

34. §. A sík korrelatív leképezései.

Értelmezés. *Két sík korrelatív, vagy reciprok vonatkozásán* (vagy *korrelációján*) egy olyan előírást értünk, mely az egyik sík bármely pontjának a másik sík egy egyenesét felelteti meg, és megfordítva, olyan módon, hogy az egyik síkban egyesített helyzetű pontnak és egyenesnek a másik síkban egyesített helyzetű egyenes és pont felel meg.

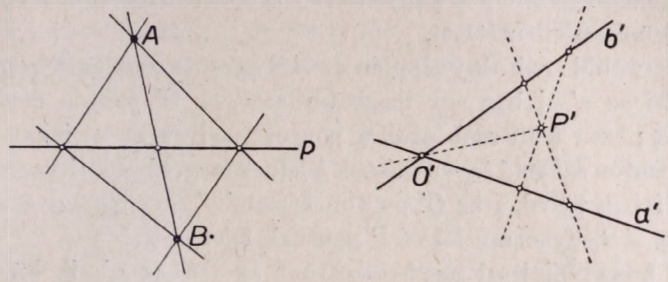
Jelöljük α-val és α'-vel a két síkot ; a fenti értelmezés szerint az α sík minden P pontjának az α' síkban egy p' egyenes, s az α sík minden p egyenesének az α' síkban egy P' pont felel meg, és megfordítva ; ha az α síkban a p egyenes átmegy a P ponton, akkor a p-nek megfelelő P' pont a P-nek megfelelő p' egyenesen fekszik.

Annak igazolása, hogy két sík között létezik korrelatív vonatkozás, a következő tételekben foglaltatik.

34.1. Tétel. *Ha az α síkban fekvő, A középpontú sugársor, s az α' síkban fekvő a' pontsor, továbbá az α síkban fekvő, B középpontú sugársor és az α' síkban fekvő b' pontsor között meg van adva egy-egy olyan projektív vonatkozás, melyek közül mindegyik az AB egyenesnek az a' és b' egyenesek O' metszéspontját felelteti meg, akkor létezik az α és α' síkok között egy és csak egy olyan korrelatív vonatkozás, mely az A és B középpontú sugársorok elemeinek az a' és b' egyenesek pontjait felelteti meg, mégpedig ugyanolyan módon, mint az eredetileg megadott projektív vonatkozások.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítása hasonló a **26.**10 tételéhez, s mint amaz, a projektív összetartozási és rendezési alaptételeken kívül a Dedekind-féle folytonossági axiómán alapul.

Minden olyan, az α síkban fekvő p egyenes, mely nem megy át sem az A, sem a B ponton, mint perspektivitási tengely meghatároz egy perspektív vonatkozást a két sugársor között. A két sugársornak az a' és b' egyenesre való, megadott projektív leképezésével átvisszük ezt a perspektív vonatkozást a két pontsorra, ezáltal egy olyan projektív vonatkozást kapunk az a' és b' egyenesek pontjai között, melynél a két egyenes O' metszéspontja önmagának felel meg ; ugyanis a két sugársor közti perspektív vonatkozásnál az AB egyenes önmagának felel meg, s ennek az egyenesnek, mint az A és mint a B középpontú sugársor elemének az a' és b' egyenesekre való leképezéseknél az O' pont felel meg, feltevés szerint. Tehát az a' és b' egyenesek között létesített vonatkozás perspektív (**6**.4) ; ennek a vonatkozásnak P' középpontját feleltetjük meg az α sík p egyenesének (53. ábra).



53. ábra.

Az α' sík bármely olyan P' pontja, mely nem tartozik sem az a', sem a b' egyeneshez, mint perspektivitási középpont meghatároz egy perspektív vonatkozást az a' és b' egyenesek között ; ennek megfelel egy perspektív vonatkozás az A és B középpontú sugársorok között, s a perspektivitás p tengelyének az előbbi előírás szerint az α' síkban felvett P' pont felel meg.

Az α sík olyan P pontját, mely nem tartozik az AB egyeneshez, egyértelműen meghatározzák az A és B középpontú sugársorok AP és BP elemei ; ezeknek az egyeneseknek megfelel az a', illetve a b' egyenes egy-egy, O'-től különböző pontja. A két pontot összekötő p' egyenest feleltetjük meg a P pontnak. — Hasonlóan, az α' sík bármely olyan p' egyenese, mely nem megy át az O' ponton, metszi az a' és b' egyenest egy-egy pontban ; az ezeknek az A és B középpontú sugársorokban megfelelő egyenesek különböznek az AB egyenestől, s ezért egymástól is ; metszéspontjuk, P az α síknak az a pontja, melynek az előbbi előírás szerint az α' síkban felvett p' egyenes felel meg.

Ha az α síkban fekvő p egyenesen P tetszőleges olyan pont, mely nem tartozik az AB egyeneshez, akkor az α' síkban megfelelő P' pont és p' egyenes szintén egyesített helyzetű, s a p' egyenes nem megy át az O' ponton. Megfordítva, ha az α' síkban fekvő p' egyenes nem megy át az O' ponton, és P' a p' egyenes tetszőleges pontja, akkor az α síkban megfelelő P pont és p egyenes egyesített helyzetű, és P nem fekszik az AB egyenesen.

Ha az α síkban fekvő p és q egyenesek egy, az AB egyenesen fekvő P pontban metszik egymást, akkor az α' síkban megfelelő P' és Q' pontok egy az O' ponton átmenő egyenesen feküsznek. Ellenkező esetben ugyanis a $P'Q' \doteq q'$ egyenesnek a fentiek szerint az α síkban egy, az AB egyeneshez nem tartozó Q pont felelne meg, s a P' és Q' pontoknak megfelelő p és q egyenesek a Q pontban metszenék egymást, feltevésünkkel ellentétben.

Az utóbbi eredmény alapján az AB egyenes minden P pontjának megfelel az α' síkban egy meghatározott, az O' ponton átmenő p' egyenes ; ezen feküsznek azok a pontok, melyek az α síkban fekvő, s a P ponton átmenő egyeneseknek felelnek meg. Megfordítva, minden, az α' síkban fekvő, s az O' ponton átmenő p' egyenes egy és és csak egy, az AB egyenesen fekvő P pontnak felel meg.

A fenti előírással meghatároztunk az α és az α' sík különböző fajta elemei (pontjai és egyenesei) között egy kölcsönösen egyértelmű vonatkozást, mely az egyik sík egyesített helyzetű elemeinek a másik síkban egyesített helyzetű elemeket feleltet meg ; ez egy korrelatív vonatkozás a két sík közt, vagy *az egyik síknak a másik síkra való korrelatív leképezése.*

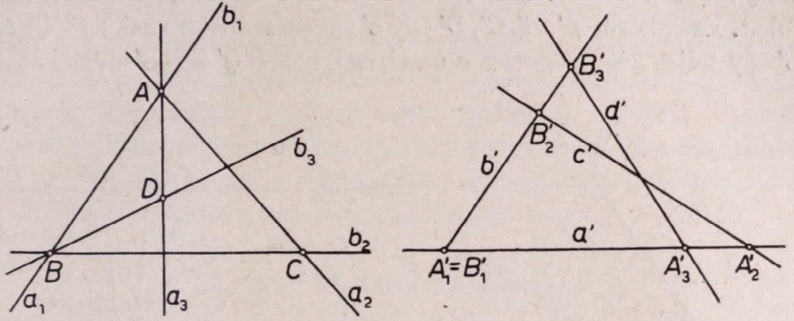
Bebizonyítjuk, hogy a korreláció az A és B középpontú sugársoroknak az a' és b' pontsorokra való projektív leképezéseivel (melyeknél a AB egyenesnek az a' és b' egyenesek O' metszéspontja felel meg) egyértelműen meg van határozva. Ennek igazolása a következő tételből adódik :

34.2. *Ha Σ és Σ' az α síknak az α' síkra való korrelatív leképezései, akkor a Σ^{-1} és Σ' leképezések $\Sigma^{-1}.\Sigma'$ szorzata az α' síknak önmagára való kollineáris leképezése.* Ugyanis az α' sík bármely pontjának Σ^{-1}-nél az α sík egy egyenese, s ennek Σ'-nél az α' sík egy pontja felel meg. Továbbá az α' sík minden egyenesének ugyanennek a síknak egy egyenese felel meg, s mert Σ^{-1}-nél is, Σ'-nél is, tehát a $\Sigma^{-1}.\Sigma'$ szorzatnál is egyesített helyzetű elemeknek egyesített helyzetű elemek felelnek meg. Ebből a **26.**5 tétel szerint következik, hogy $\Sigma^{-1}.\Sigma'$ az α' sík önmagára való kollineáris leképezése.

Ha az A és B középpontú sugársorok elemeire vonatkozóan Σ és Σ' megegyezők, akkor a $\Sigma^{-1}.\Sigma'$ leképezés, mely az α' sík önmagára való kollineációja, a **26.**6 tétel szerint az azonosság, mivel ennél invariáns az a' és a b' egyenes minden pontja. Ebből következik, hogy Σ azonos Σ'-vel.

34.3. Tétel. *Ha A, B, C, D az α síkban négy általános helyzetű pont, és a', b', c', d' az α' síkban négy általános helyzetű egyenes, akkor van az α síknak az α' síkra egy és csak egy olyan korrelatív leképezése, mely az A, B, C, D pontoknak rendre az a', b', c', d' egyeneseket felelteti meg.*

Bizonyítás (54. ábra). Jelöljük a_1, a_2, a_3-mal és b_1, b_2, b_3-mal rendre az AB, AC, AD és BA, BC, BD egyeneseket, továbbá A_1', A_2', A_3'-vel és B_1', B_2', B_3'-vel rendre az $a'b', a'c', a'd'$ és a $b'a', b'c', b'd'$ pontokat. Az A középpontú sugársornak az a' pontsorra való



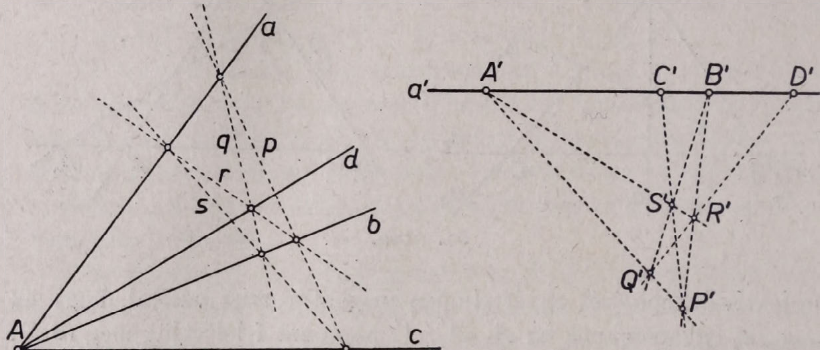
54. ábra.

projektív leképezését egyértelműen meghatározzuk azáltal, hogy az a_1, a_2, a_3 egyeneseknek az A_1', A_2', A_3' pontokat feleltetjük meg (**5**.7). Hasonlóan a B középpontú sugársornak a b' pontsorra való projektív leképezését egyértelműen meghatározzuk azáltal, hogy a b_1, b_2, b_3 egyeneseknek rendre a B_1', B_2', B_3' pontokat feleltetjük meg. Mivel a két sugársor közös $a_1=b_1$ elemének mindkét leképezésnél az a' és b' pontsorok közös $A_1'=B_1'$ pontja felel meg, a **34**.1 tétel szerint létezik az α síknak az α' síkra egy (és csak egy) olyan Σ korrelatív leképezése, mely az A és a B középpontú sugársorok elemeire nézve a megadott projektív leképezésekkel megegyezik. Σ-nál az A pontnak az a' egyenes, B-nek a b' egyenes felel meg, továbbá a C pontnak, mint az a_2 és b_2 egyenes metszéspontjának az $A_2'B_2'=c'$ egyenes, végül a D pontnak, mint az a_3 és b_3 egyenes metszéspontjának az $A_3'B_3'=d'$ egyenes.

Ha Σ és Σ' az α síknak az α' síkra két olyan korrelatív leképezése volna, mely megyegyezik az A, B, C, D pontokban, akkor $\Sigma'\Sigma^{-1}$ az α sík önmagára való kollineáris leképezése volna, melynek fixpontja négy általános helyzetű A, B, C, D pont. A **26**.6 tétel szerint ez a leképezés az azonosság, s így Σ megegyezik Σ'-vel.

34.4. Tétel. *Két sík korrelatív vonatkozásánál az egymásnak megfelelő elsőfajú elemi alakzatok (pontsorok és sugársorok) projektív vonatkozásban vannak.*

Bizonyítás (55. ábra). Az A középpontú sugársorban legyen a, b, c, d négy olyan egyenes, melyek közül a és b harmonikusan választják el c-t és d-t ; értelmezés szerint van az α síkban olyan $pqrs$ teljes négyoldal, melynek pq és rs csúcsai az a, pr és qs csúcsai a b egyenesen, ps csúcsa a c, és qr csúcsa a d egyenesen fekszik. Jelöljük A', B', C', D', P', Q', R', S'-vel a nevezett egyeneseknek az α' síkban megfelelő pontokat. Ezek közül A', B', C', D' egy a' egyenesen feküsznek ; P', Q', R', S' egy teljes négyszögnek a csúcsai, melynek $P'Q'$ és $R'S'$ oldalai az A'



55. ábra.

ponton, $P'R'$ és $Q'S'$ oldalai a B' ponton, $P'S'$ oldala a C', és $Q'R'$ oldala a D' ponton megy át ; tehát $A'B'C'D'$ harmonikus pontnégyes. E szerint az A középpontú sugársor és az a' pontsor közti vonatkozás, melyet a korreláció származtat, megtartja a harmonikus elválasztásokat, tehát projektív, a **12**.3 tétel szerint.

34.5. Tétel. *Ha az α sík minden pontjának az α' síkban egy egyenes, bármely két különböző pontnak két különböző egyenes, s bármely három, egy egyenesen fekvő pontnak három, egy ponton átmenő egyenes felel meg, s ha van az α síkban három olyan pont, amelynek megfelelő egyenesek nem mennek egy ponton át, akkor a két sík vonatkozása egy korreláció.*

Bizonyítás. Jelöljük Σ-val az α síknak az α' síkra való megadott leképezését, és Σ'-vel α'-nek α-ra való tetszőleges korrelációját. A $\mathbf{T}=\Sigma\Sigma'$ szorzat az α síknak önmagára való leképezése, mely eleget tesz a **26**.4 tétel feltételeinek; e szerint **T** egy kollineáció, és $\Sigma = \mathbf{T}\Sigma'$ az α síknak α'-re való korrelatív leképezése.

A tétel duálisa ugyanilyen módon adódik.

34.6. Az α síknak az α' síkra való Σ korrelációjánál az α sík három, nem egy egyenesen fekvő A, B, C pontjának megfelelő egyeneseket jelöljük a', b', c'-vel, s ezeknek metszéspontjait A', B', C'-vel. Az AB, BC, CA egyenesek által meghatározott bármely $\Delta_0 = ABC$ háromszögtartománynak a Σ korreláció az α' vonalmezőnek az A', B', C' pontok által meghatározott egyik δ_0 tartományát felelteti meg; a δ_0-nak az α' pontmezőben megfelelő háromszögtartományt jelöljük Δ_0'-vel. (Megfelelő tartományok értelmezését l. 114. o.). A Δ_0 tartomány pontjainak Σ-nál megfelelő egyenesek az egész α' síkot kitöltik a Δ_0' tartomány kivételével. Ebben az értelemben azt mondjuk, hogy *az α pontmező Δ_0 háromszögtartományának a Σ korreláció az α' pontmező Δ_0' háromszögtartományát felelteti meg.*

35. §. A sík poláris leképezései.

Értelmezés. Az α sík önmagára való korrelatív leképezésének a négyzete az α sík önmagára való kollineáris leképezése. A korrelatív leképezést *polaritás*nak, vagy *poláris leképezés*nek nevezzük, ha négyzete az α síknak önmagára való azonos leképezése. A sík poláris leképezésénél az egymásnak megfelelő pontok és egyenesek kétszeresen (ugyanis a leképezésnél és a leképezés inverzénél) felelnek meg egymásnak: tehát ha a P pontnak a p egyenes, akkor a p egyenesnek a P pont felel meg. A P pontot a *p egyenes pólusának,* s a p egyenest a *P pont polárisá*nak nevezzük a sík megadott Ω polaritása szerint.

Értelmezés. Az α sík Ω polaritása szerint *konjugált*nak nevezzük az α sík két tetszőleges olyan P és Q pontját, melyek közül az egyiknek a polárisa átmegy a másik ponton. Ha a P pont p polárisa átmegy a Q ponton, akkor a Q pont q polárisa is átmegy a P ponton, mivel az egyesített helyzetű p és Q elemeknek Ω-nál ugyancsak egyesített helyzetű P és q elemek felelnek meg. Két egyenest konjugáltnak nevezünk, ha az egyiknek a pólusa a másik egyenesen fekszik; ekkor a másik egyenes pólusa az első egyenesen fekszik. Konjugált egyenesek pólusai konjugált pontok és konjugált pontok polárisai konjugált egyenesek.

A sík önmagára való poláris leképezéseit jellemzi a következő

35.1. Tétel. *Ha az a sík önmagára való korrelatív leképezésénél egy háromszög mindegyik oldala az átellenes csúcsnak felel meg, akkor a leképezés polaritás.*

Bizonyítás. Legyen ABC egy olyan háromszög, melynek A, B, C csúcsai a megadott Ω korrelációnál rendre az $a = BC, b = CA$, $c = AB$ oldalakba mennek át. Mivel Ω-nál egyesített helyzetű elemeknek egyesített helyzetű elemek felelnek meg, tehát az $a = BC$ egyenesnek Ω-nál a B és C pont képének, vagyis a b és c egyenesnek közös pontja : A felel meg ; hasonlóan a b és c egyenesnek Ω-nál a B és C pont felel meg. Az a egyenes tetszőleges P pontjának egy, az A ponton átmenő p egyenes a képe ; ennek a-val közös pontját jelöljük P'-vel. Mivel az a pontsornak az A középpontú sugársorra Ω által létesített leképezése projektív (**34**.4) s az utóbbi sugársornak az a pontsorral való metszése is projektív vonatkozás, tehát az a egyenesnek önmagára való projektív leképezését kapjuk, ha minden P pontjának azt a P' pontot feleltetjük meg, melyben a P-nek Ω-nál megfelelő p egyenes metszi a-t. Ennél a leképezésnél a B és C pont egymásnak felel meg, s ezért az a egyenes leképezése involutorius (**14**.1). E szerint az Ω^2 leképezésnél az a egyenes minden pontja fixpont ; hasonló meggondolás szerint a b egyenes minden pontja is fixpont. A **26**.6 tételből következik tehát, hogy Ω^2 az azonosság s így az értelmezés szerint Ω egy polaritás.

Értelmezés. Ha a sík Ω polaritásánál a P pont polárisához, a p egyeneshez tartozik, akkor a P pontot s a p egyenest *önmagához konjugáltnak* nevezzük.

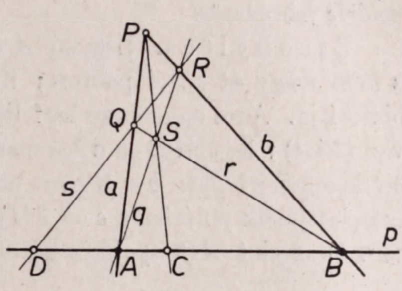
35.2. Tétel. *Ha a sík Ω polaritásánál a P pont önmagához konjugált, akkor polárisán, a p egyenesen nincs P-n kívül más, önmagához konjugált pont s a P ponton nem halad át más, önmagához konjugált egyenes, mint p.*

Bizonyítás. A p egyenes bármely, P-től különböző Q pontja konjugált P-hez, s ezért a Q pont q polárisa a P ponton megy át. Mivel P és Q különbözők, a p és q egyenesek is különbözők s ezért q nem megy át a Q ponton ; más szóval a Q pont nem konjugált önmagához. Hasonlóan adódik a tételben foglalt második állítás.

35.3. Tétel. *Ha a sík egy polaritásánál a p egyenes nem konjugált önmagához, akkor a p egyenesen a konjugált pontok vonatkozása egy involució.*

Bizonyítás. Mivel a p egyenes nem konjugált önmagához, pólusa P nem tartozik p-hez. A p egyenes bármely A pontjának polárisa egy p-től különböző a egyenes, melynek p-vel egy és csak egy A' közös pontja van. E szerint A' a p egyenesnek az egyetlen, az A ponthoz konjugált pontja s viszont A az egyetlen, A'-höz konjugált pontja. A p egyenesen tehát egy kölcsönösen egyértelmű leképezést létesítünk, ha minden A ponthoz ennek konjugáltját, A'-t rendeljük hozzá, s ez a leképezés vagy involutorius, vagy az azonosság (ha ugyanis p minden pontja önmagához konjugált); a leképezés a **34**.4 tétel folytán projektív.

Megmutatjuk, hogy a p egyenesen értelmezett leképezés nem lehet az azonosság. Tegyük fel ugyanis, hogy a p egyenes két A és B pontja önmagához konjugált; jelöljük polárisukat a-val és b-vel; a átmegy az A ponton és b a B ponton. Az a és b egyenesek egymástól és p-től különböznek; a-nak és b-nek van egy közös P pontja, ez a p egyenes pólusa (56. ábra). Az a egyenes valamely, A-tól és P-től különböző Q pontjának q polárisa átmegy az A ponton, mivel A és Q konjugált pontok. A q és b egyenesek R metszéspontja különbözik B-től és P-től; az R pont polárisa az $r = BQ$ egyenes, mivel R konjugált a B és Q ponthoz. Ugyanúgy a q és r egyenesek S metszéspontjának polárisa az $s = QR$ egyenes. Az s és p egyenesek metszéspontját jelöljük D-vel s a PS egyenesnek p-vel közös pontját C-vel. A PS egyenes a p és $s = QR$ egyenesek D metszéspontjának a polárisa. A P, Q, R, S pontnégyes meghatározása folytán általános helyzetű; a $PQRS$ teljes négyszögnek átlóspontjai A és B, ezek a **7**.1 tétel szerint elválasztják egymástól a teljes négyszög további két oldalának az $AB = p$ egyenessel való C és D metszéspontjait. E szerint C és D a p egyenes két *egymástól különböző* s egymáshoz konjugált pontja.



56. ábra.

A **35**.3 tételből közvetlenül következik:

35.4. Tétel. *Ha a sík egy polaritásánál a p egyenes nem konjugált önmagához, akkor a p egyenesen vagy két önmagához konjugált pont van, vagy egy sincs; az első esetben hiperbolikus, a második eset-*

ben elliptikus involuciót létesít a p egyenesen a konjugált pontok vonatkozása.

A fenti tételeknek a síkbeli dualitás értelmében a következő tétel felel meg:

35.5. Tétel. *Ha a sík Ω polaritásánál a P pont nem konjugált önmagához, akkor a P ponton átmenő, egymáshoz konjugált egyenesek vonatkozása egy involució. A P ponton átmenő egyenesek között vagy két önmagához konjugált egyenes van, vagy egy sincs; az első esetben a sugársor involuciója hiperbolikus, a második esetben elliptikus.*

Értelmezés. A sík Ω polaritásához tartozó *poláris háromszögön* egy olyan ABC háromszöget értünk, melynek A, B, C csúcsának polárisa rendre a BC, CA, AB oldal.

35.6. Tétel. *A sík minden polaritásához tartozik legalább egy poláris háromszög.*

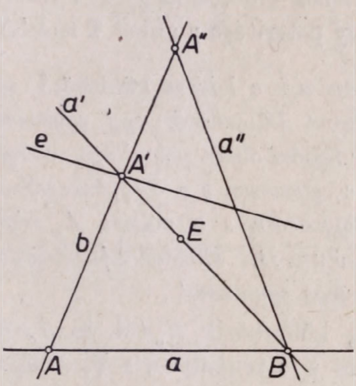
Bizonyítás. Legyen A egy olyan pont, melynek polárisa, a nem megy át az A ponton; ilyen A pont létezését a **35**.2 tétel biztosítja. Az a egyenesen legfeljebb két önmagához konjugált pont van (**35**.4); legyen B az a egyenes olyan pontja, mely nem konjugált önmagához s legyen b a B pont polárisa. Az a és b egyenesek C metszéspontjának polárisa a $c = AB$ egyenes; ez nem megy át a C ponton. E szerint ABC poláris háromszög.

35.7. Tétel. *A sík minden önmagára való kollineációja előállítható két polaritás szorzataként.*

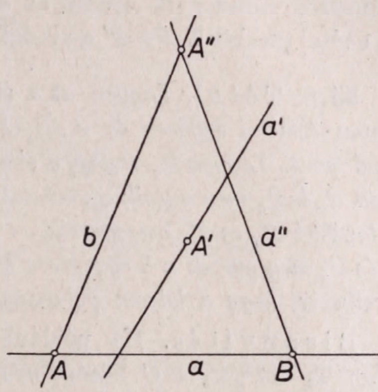
Bizonyítás. Ez a tétel analóg ahhoz, mely szerint az egyenes minden, az irányítást megtartó projektív leképezése két hiperbolikus involució szorzataként állítható elő (**17**.4).

Ha **T** egy általános perspektivitás, középpontját jelöljük A-val s legyen B és C a tengely két tetszőleges pontja, továbbá P a síknak olyan pontja, mely nem tartozik az ABC háromszög egyik oldalához sem, és $P' = \mathbf{T}(P)$ a P pont képe. Ha p tetszőleges olyan egyenes, mely nem megy át az A, B, C pontok közül egyiken sem, akkor a **34**.3 tétel szerint van a síknak olyan Ω és Ω' korrelációja, mely az A, B, C, P, illetve az A, B, C, P' pontnak az $a = BC$, $b = CA$, $c = AB, p$ egyenest felelteti meg; Ω és Ω' a sík polaritásai a **35**.1 tétel szerint, mivel poláris háromszögük ABC. Az $\Omega . \Omega'$ kollineációnál az A, B, C pontok fixpontok, és P a P' pontba megy át; minthogy az A, P, P' pontok egy egyenesen vannak, ebből következik, hogy a PP' egyenes invariáns, s a $BC = a$ egyenessel közös pontja fixpont. Tehát $\Omega . \Omega'$ a sík perspektív leképezése, amelynek tengelye a, középpontja A, s mert ez is a P pontot P'-be viszi át, ugyanúgy, mint $\mathbf{T}$, ezért a **27**.2 tétel szerint: $\mathbf{T} = \Omega . \Omega'$.

Ha $\mathbf{T}$ egy speciális[1] perspektivitás, akkor legyen A a sík tetszőleges olyan pontja, mely különbözik $\mathbf{T}$-nél származó A' képétől; A' képe, A'' az AA' egyenesen fekszik s különbözik A-tól és A'-től. Legyen a egy az A ponton átmenő egyenes, mely nem invariáns $\mathbf{T}$-nél s a' és a'' az a egyenesnek $\mathbf{T}$-nél és $\mathbf{T}^2$-nél származó képe. Jelöljük az AA' egyenest b-vel s az a és a' egyenesek metszéspontját B-vel; B a perspektivitás tengelyén fekszik, s ezért a''-nek is pontja



57. ábra.



58. ábra.

(57. ábra). Legyen E az $A'B$ egyenesnek egy, A'-től és B-től különböző pontja, és e egy, az A' ponton átmenő egyenes, mely nem megy át az A, A'', B pontok közül egyiken sem. A **34**.3 tétel szerint az A, A'', B, E pontok s az ezeknek megfelelő a'', a, b, e egyenesek meghatározzák a síknak egy korrelációját, mely egy Ω polaritás, mivel az $AA''B$ háromszög csúcsainak az átellenes oldalak felelnek meg (l. **35**.1). Az $A' = be$ pontnak Ω-nál az $a' = BE$ egyenes felel meg.

Ha pedig $\mathbf{T}$ nem perspektív leképezés, akkor legyen A a sík olyan pontja, mely nem tartozik $\mathbf{T}$ valamely invariáns egyeneséhez; A-nak $\mathbf{T}$-nél és $\mathbf{T}^2$-nél származó A' és A'' képe nem fekszik ugyanazon, az A ponton átmenő egyenesen. Legyen továbbá a egy olyan egyenes, mely átmegy az A ponton, de nem megy át az A pontnak a $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}^2$, $\mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{T}^{-2}$

[1] A következő meggondolás érvényes a nem involutorius, általános perspektivitásokra is.

leképezéseknél származó képei közül egyiken sem. Az a egyenesnek $\mathbf{T}$-nél és $\mathbf{T}^2$-nél származó képe legyen a' és a''; a' nem megy át sem A-n, sem A''-n, s a'' nem megy át sem A-n, sem A'-n (58. ábra). Az a és a'' egyenesek metszéspontját jelöljük B-vel, s az AA'' egyenest b-vel. A **34.**3 tétel szerint van a síknak egy és csak egy olyan korrelációja, mely az A, A', A'', B pontoknak az a'', a', a, b egyeneseket felelteti meg s a **35.**1 tétel szerint ez a síknak egy Ω polaritása.

A $\mathbf{T}.\Omega$ korrelációnál az A pontnak az a' egyenes, A'-nek az a egyenes, továbbá az a és a' egyenesnek az A' és A pont, tehát a $C = aa'$ pontnak a $c = A'A$ egyenes felel meg. (Speciális perspektivitás esetében $C = B$ és $c = b$.) E szerint a $\mathbf{T}.\Omega$ korrelációnál az $AA'C$ háromszög mindegyik csúcsa az átellenes oldalba megy át s ezért a **35.**1 tétel szerint $\mathbf{T}.\Omega = \Omega'$ a síknak egy polaritása; ebből $\mathbf{T} = \Omega'.\Omega$.

35.8. Tétel. *Legyen az α síkban a, b, c három különböző, egy ponton átmenő egyenes és A, B, C három különböző, egy egyenesen fekvő pont. Legyen Ω_a, Ω_b, Ω_c a síknak három olyan polaritása, melyek közül Ω_a és Ω_b megegyezik egymással a c egyenesen s a c egyenes pólusa C, továbbá Ω_b és Ω_c megegyezik az a egyenesen s a pólusa A, végül Ω_c és Ω_a megegyezik a b egyenesen s b pólusa B. Ezekből a feltételekből következik, hogy a három polaritás azonos egymással.*

Bizonyítás. Ha például Ω_b különbözik Ω_a-tól és Ω_c-től, akkor $\mathbf{T}_1 = \Omega_a \Omega_b$ a C középpontra és a c tengelyre, s $\mathbf{T}_2 = \Omega_b \Omega_c$ az A középpontra és a tengelyre vonatkozó perspektivitás lenne, s ezeknek szorzata, $\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 = \Omega_a \Omega_b . \Omega_b \Omega_c = \Omega_a \Omega_c$ a B középpontra és b tengelyre vonatkozó perspektivitás, vagy az azonosság lenne, ellentétben a **30.**11 tétellel, mivel feltevésünk szerint a B pont az AC egyeneshez tartozik.

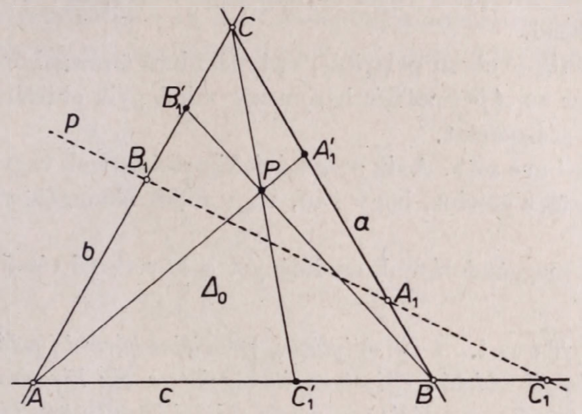
36. §. A sík polaritásainak osztályozása.

A sík poláris leképezéseit a szerint osztályozzuk, hogy van, vagy nincs önmagához konjugált eleme (pontja vagy egyenese).

Legyen Ω a sík poláris leképezése, ABC egy poláris háromszög, P egy olyan pont, mely nem tartozik az $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ oldalak közül egyikhez sem; a P pontnak p polárisa nem megy át az A, B, C csúcsok közül egyiken sem. Jelöljük A_1, B_1, C_1-gyel a p egyenesnek, A_1', B_1', C_1'-vel az AP, BP, CP egyeneseknek az a, b, c oldalakkal való metszéspontját (59. ábra). Legyen Δ_0 az az a, b, c

egyenesek által meghatározott háromszögtartomány, amelyhez a P pont tartozik.

Ha a P pont önmagához konjugált, akkor a p egyenes átmegy a P ponton, tehát a Δ_0 tartományon s metszi Δ_0 határát két pontban (**25**.3); e szerint az A_1, B_1, C_1 pontok közül kettő, például A_1 és B_1, a Δ_0 tartomány határához tartozik, de a harmadik: C_1 nem. Az A_1', B_1', C_1' pontok Δ_0 határához tartoznak. Tehát rendre az a, b,



59. ábra.

c egyeneseken az A_1, A_1' és B, C pontpárok nem választják el egymást, a B_1, B_1' és C, A pontpárok nem választják el egymást, de a C_1, C_1' és A, B pontpárok elválasztják egymást. A B és C pontok konjugáltak, mivel B polárisa a $b=CA$ egyenes; az A_1 és A_1' pontok is konjugáltak, mivel az a, p egyenesek A_1 metszéspontjának polárisa, az AP egyenes átmegy az A_1' ponton. Az Ω polaritás által az a egyenesen származtatott involució, mely a konjugált pontjait felelteti meg egymásnak, hiperbolikus a **14**.3 tétel szerint; ugyancsak hiperbolikus involuciót származtat Ω a b egyenesen, de elliptikus involuciót a c egyenesen.

Tegyük fel viszont, hogy Ω az ABC poláris háromszög egyik oldalán, például a-n, hiperbolikus involuciót származtat. Legyen P egy tetszőleges olyan pont, mely nem tartozik az ABC háromszög egyik oldalához sem, s legyen P polárisa a p egyenes. Az előbbi jelöléseket megtartva, az A_1, A_1' és B, C pontpárok nem választják el egymást az a egyenesen, tehát a p egyenes A_1 pontja a Δ_0 tartomány határához tartozik. Mivel p nem megy át az ABC háromszög egyik csúcsán sem, metszi Δ_0 határát még egy pontban; tegyük fel például, hogy p-nek b-vel közös B_1 pontja Δ_0 határához tartozik. Ekkor a B_1, B_1' és a C, A pontpárok sem választják el egymást a b egyenesen s ezért az Ω által a b egyenesen származtatott involució is hiperbolikus. Viszont p-nek c-vel közös C_1 pontja nem tartozik Δ_0 határához, tehát a C_1, C_1' és A, B pontpárok elválasztják egymást a c egyenesen, s ezen Ω elliptikus involuciót származtat. Az a és a b oldalon származtatott hiperbolikus involució bármely fixpontja önmagához konjugált az Ω polaritásnál.

Ha pedig Ω olyan polaritás, melynél nincs önmagához konjugált elem, akkor az ABC poláris háromszög mindegyik oldalán elliptikus involuciót származtat.

É r t e l m e z é s. A sík *polaritását hiperbolikus*nak vagy *elliptikus*nak nevezzük a szerint, hogy van, vagy nincs önmagához konjugált eleme.

Fenti meggondolásunk eredményét a következő tételben mondjuk ki:

36.1. T é t e l. *A sík elliptikus polaritása bármely poláris háromszög mindegyik oldalán elliptikus involuciót, a sík hiperbolikus polaritása egy tetszőleges poláris háromszög oldalai közül kettőn hiperbolikus, a harmadikon elliptikus involuciót származtat.*

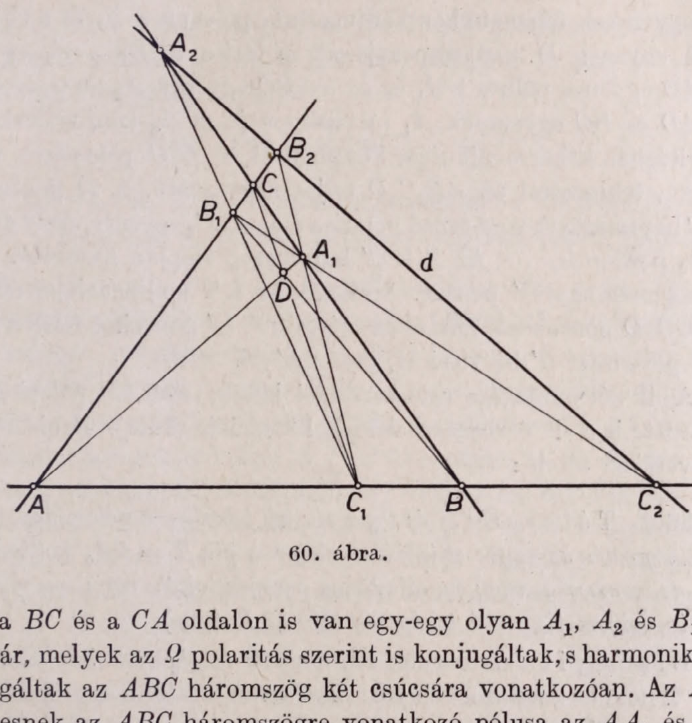
A pontmezőben és a sugármezőben az ABC poláris háromszög által meghatározott tartományok közül egymásnak megfelelő tartományokhoz tartozik elliptikus polaritás esetében egy tetszőleges P pont, melyen nem megy át a háromszög egyik oldala sem, s ennek p polárisa; hiperbolikus polaritás esetében a P pontot tartalmazó háromszögtartományon átmegy a P pont p polárisa. (Megfelelő tartományok értelmezését l. 114. o.)

A **34**.3 tétel értelmében a sík önmagára való korrelációját egyértelműen meghatározza egy tetszőleges, általános helyzetű A, B, C, D pontnégyes és a, b, c, d sugárnégyes. Legyen a, b, c rendre az ABC háromszög BC, CA, AB oldala; a megfelelő korreláció ebben az esetben egy polaritás (**35**.1). Ha a d egyenest úgy vesszük fel, hogy d nem megy át a D-t tartalmazó ABC háromszögtartományon, akkor a polaritás *elliptikus*, ellenkező esetben *hiperbolikus* (**36**.1).

A sík valamely Ω polaritásának a sík önmagára való $\mathbf{T}$ kollineációjával való transzformáltja: $\mathbf{T}^{-1}\Omega\mathbf{T}$ a síknak olyan polaritása, mely Ω-val megegyező típusú, azaz elliptikus, vagy hiperbolikus, úgy mint Ω; ez az értelmezésekből közvetlenül következik.

36.2. Tétel. *Bármely két elliptikus, s ugyancsak bármely két hiperbolikus polaritás aequivalens egymással, azaz egyik a másiknak a sík valamely kollineációjával való transzformáltja.*

Bizonyítás (60. ábra). Legyen először Ω az α, és Ω' az α' síknak egy *elliptikus* polaritása. Felveszünk egy Ω-ra vonatkozó ABC poláris háromszöget; ennek mindhárom oldalán elliptikus involuciót létesít a konjugált pontok megfelelése (**36**.1). Az AB oldalon létesített elliptikus involuciónak s az A, B fixpontokra vonatkozó harmonikus involuciónak van egy közös konjugált C_1, C_2 pontpárja (**16**.5). Hason-



60. ábra.

lóan, a BC és a CA oldalon is van egy-egy olyan A_1, A_2 és B_1, B_2 pontpár, melyek az Ω polaritás szerint is konjugáltak, s harmonikusan konjugáltak az ABC háromszög két csúcsára vonatkozóan. Az A_2B_2 egyenesnek az ABC háromszögre vonatkozó pólusa az AA_1 és BB_1 egyenesek D metszéspontja. A C_1, C_2 pontok közül az egyik, például C_1 az DC egyenesen, a másik, C_2 a $d{=}A_2B_2$ egyenesen fekszik. Tehát *a d egyenes a D pontnak a polárisa mind a megadott Ω elliptikus polaritásra, mind az ABC háromszögre vonatkozóan.* — Hasonlóan, felveszünk az α' síkban egy Ω'-re vonatkozó $A'B'C'$ poláris háromszöget, s meghatározzuk azt a D' pontot és d' egyenest, melyek egymásnak felelnek meg mind Ω'-nél, mind az $A'B'C'$ háromszögre vonatkozó polaritásnál. A **26**.7 tétel szerint van az α síknak az α' síkra egy olyan **T** kollineációja, mely az A, B, C, D pontokat az A', B', C', D' pontokba, s a **26**.8 tétel szerint a d egyenest a d' egyenesbe viszi át. Ebből következik, hogy $\Omega'=\mathbf{T}^{-1}\Omega\mathbf{T}$.

Másodszor, ha Ω és Ω' *hiperbolikus* polaritások, akkor egy ABC, illetve $A'B'C'$ poláris háromszög egyik oldalán elliptikus, másik két oldalán hiperbolikus involuciót alkotnak a konjugált pontok (**36**.1); a jelöléseket válasszuk úgy, hogy a BC és a $B'C'$ oldalon legyen elliptikus a konjugált pontok involuciója. Legyen B_1, B_2 és C_1, C_2 az AC és az AB oldal két-két önmagához konjugált pontja. A BB_1 és CC_1 egyenesek önmagukhoz konjugáltak, pólusuk a B_1 és a C_1 pont; e két egyenes D metszéspontjának polárisa a $B_1C_1=d_1$ egyenes. Az AD egyenes pólusa a d_1 és az $a=BC$ egyenes A_2 metszéspontja. Az AD és BC egyenesek A_1 metszéspontja és A_2 konjugáltak az Ω polaritásnál s harmonikusan konjugáltak a B, C pontpárra vonatkozóan, tekintettel az AB_1C_1D teljes négyszögre. A D pontnak az ABC háromszögre vonatkozó polárisa a $d=B_2C_2$ egyenes, mely átmegy az A_2 ponton is. — Az $A'B'C'$ háromszög alapján hasonlóan határozunk meg egy D' pontot. A síknak az a **T** kollineációja, mely az A, B, C, D pontoknak rendre az A', B', C', D' pontokat felelteti meg, az Ω polaritást Ω'-be viszi át, azaz : $\Omega'=\mathbf{T}^{-1}\Omega\mathbf{T}$.

A sík két önmagára való korrelációjának, tehát két polaritásának a szorzata is a sík önmagára való kollineációja (**34**.2). Bebizonyítjuk a következő tételt :

36.3. Tétel. *Ha Ω és Ω_0 a sík két tetszőleges polaritása, melyek közül legalább az egyik elliptikus, akkor a sík $\mathbf{T} = \Omega\Omega_0$ kollineációja vagy az azonosság, vagy egy általános perspektivitás, vagy egy nem perspektív, három fixpontú leképezés* (30. §. *I* típus).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy Ω és Ω_0 különbözők, vagyis, hogy **T** nem az azonos leképezés. **T**-nek van legalább egy U fixpontja (**28**.1) ; az U pontnak Ω-nál és Ω_0-nál ugyanaz az u egyenes felel meg s u invariáns a **T** leképezésnél. Mivel a két polaritás közül legalább az egyik elliptikus, ezért *az u egyenes nem megy át az U ponton.* Az u egyenesen az Ω-nál és az Ω_0-nál konjugált pontok involuciókat alkotnak, melyek közül legalább az egyik elliptikus, feltevésünk folytán. Ebből következik, hogy a két involució szorzata vagy az azonosság, vagy hiperbolikus leképezés (**16**.5) ; ennek fixpontjait jelöljük X-szel és Y-nal. Az első esetben **T** a sík általános perspektivitása

(**27**.1), melynek középpontja U és tengelye u. Ha pedig **T** nem perspektív leképezés, akkor három, nem egy egyenesen fekvő fixpontja van: X, Y, U.

37. §. A sík elliptikus polaritásával felcserélhető kollineációk.

Értelmezés. Ha **T** a síknak önmagára való kollineációja és Ω a sík polaritása, akkor $\mathbf{T}.\Omega$ és $\Omega.\mathbf{T}$ a síknak önmagára való korrelatív leképezései; ha ezek megegyeznek egymással: $\mathbf{T}.\Omega = \Omega.\mathbf{T}$, akkor *a kollineációt és a polaritást egymással felcserélhetőnek* nevezzük.

37.1. *Ha a* **T** *kollineáció felcserélhető az* Ω *polaritással, akkor bármely* A *pont polárisa* $a = \Omega(A)$ *a* **T** *leképezésnél az* A *pont* A' *képének* a' *polárisába megy át;* ugyanis:

$$\mathbf{T}(a) = \Omega\mathbf{T}(A) = \mathbf{T}\Omega(A) = \Omega(A') = a'.$$

Ebből következik, hogy **T** *minden fixpontjának polárisa invariáns egyenes,* s megfordítva, minden invariáns egyenes pólusa fixpont.

37.2. Tétel. *Ha* Ω *a sík tetszőleges polaritása, s ha az* A *pont nem tartozik polárisához, az* a *egyeneshez, akkor az* A *középpontra és az* a *tengelyre vonatkozó harmonikus perspektivitás felcserélhető* Ω*-val.*

Bizonyítás. Legyen P és Q az a egyenes két különböző, egymáshoz konjugált pontja (**35**.3). Az A középpontú és a tengelyű **T** harmonikus perspektivitásnál A, P, Q fixpontok, AP és AQ invariáns egyenesek; Ω-nál pedig A-nak az a, és P-nek az AQ egyenes felel meg. E szerint a $\mathbf{T}^{-1}\Omega\mathbf{T}\Omega$ kollineációnál A és P fixpont és AP invariáns egyenes. Mivel P az a egyenes tetszőleges pontja (legfeljebb a két pontját kivéve), tehát $\mathbf{T}^{-1}\Omega\mathbf{T}\Omega$ az a egyenesen az azonos leképezést származtatja. Az AP egyenesen **T** az A, P fixpontokra vonatkozó harmonikus involuciót származtatja, ez felcserélhető azzal az involucióval, melyet az AP egyenesen az Ω-nál konjugált pontok alkotnak, mivel az utóbbinál A és P egymásnak felel meg (**17**.1); tehát $\mathbf{T}^{-1}\Omega\mathbf{T}\Omega$ az AP egyenesen is az azonos leképezést származtatja s ezért a síkon is az azonosság (**26**.6), azaz: $\mathbf{T}\Omega = \Omega\mathbf{T}$.

Értelmezés. A sík olyan harmonikus perspektivitását, melynek tengelye a középpontnak az Ω polaritásnál származó polárisa, az Ω *polaritáshoz tartozó harmonikus perspektivitásnak* fogjuk nevezni.

A **37**.2 tétel folytán *bármely két,* Ω*-hoz tartozó harmonikus perspektivitás szorzata az* Ω *polaritással felcserélhető kollineáció.*

Fenti eredményeink egyaránt vonatkoznak elliptikus és hiperbolikus polaritásokra. A következőben feltesszük, hogy Ω *elliptikus polaritás*. Legyen A és B két tetszőleges pont, polárisuk a és b, s jelöljük $\mathbf{T}_1$-gyel az A középpontú, a tengelyű, $\mathbf{T}_2$-vel a B középpontú, b tengelyű harmonikus perspektivitást; a **37**.2 tétel szerint $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ felcserélhető az Ω polaritással. Ha A és B konjugált pontok, akkor $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ is Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitás a **30**.10 tétel szerint.— Ha A és B nem konjugált egymáshoz, jelöljük A_1-gyel és B_1-gyel a $c=AB$ egyenesnek az a és a b egyenessel való metszéspontját. Mivel az Ω által a c egyenesen származtatott elliptikus involuciónál A és A_1 egymásnak, B és B_1 egymásnak felel meg, az A, A_1 és B, B_1 pontpárok elválasztják egymást (**14**.3). A c egyenesen $\mathbf{T}_1$ megegyezik az A, A_1 fixpontokra, és $\mathbf{T}_2$ a B, B_1 fixpontokra vonatkozó harmonikus involucióval, tehát a $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ által a c egyenesen származtatott leképezés elliptikus (**16**.4). A $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ leképezésnek a síkon egyetlen fixpontja az a és b egyenes C metszéspontja, egyetlen invariáns egyenese $c=AB$; a leképezés a *III* típushoz tartozik (**30**.1).

Ha $\mathbf{T}$ tetszőleges olyan kollineáció, mely felcserélhető az Ω elliptikus polaritással, akkor $\mathbf{T}$ vagy egy Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitás, vagy két ilyennek a szorzata.

Tegyük fel először, hogy $\mathbf{T}$ *perspektív leképezés;* középpontja legyen A, ennek polárisa, a invariáns $\mathbf{T}$-nél, s mert nem megy át az A ponton, tehát a a perspektivitás tengelye. Bármely, az A ponton átmenő egyenesen $\mathbf{T}$ olyan hiperbolikus leképezést származtat, mely felcserélhető az Ω-nál konjugált pontok alkotta elliptikus involucióval; a **17**.6 tétel szerint ennek az egyenesnek $\mathbf{T}$ által származtatott leképezése az a hiperbolikus involució, melynek fixpontjai A és az egyenesnek az a tengellyel közös pontja. E szerint $\mathbf{T}$ a sík harmonikus perspektivitása, mely a fenti értelmezésnek megfelelően az Ω polaritáshoz tartozik.

Tegyük fel másodszor, hogy $\mathbf{T}$ *nem perspektív kollineáció;* van legalább egy A fixpontja (**28**.1), s ennek polárisa, a invariáns $\mathbf{T}$-nél. A $\mathbf{T}$ által az a egyenesen származtatott leképezés felcserélhető azzal az elliptikus involucióval, melyet az a egyenesen az Ω-nál konjugált pontok alkotnak, s ezért vagy az a egyenes azonos leképezése, vagy egy hiperbolikus involució, melynek fixpontjai Ω-nál konjugáltak, vagy egy elliptikus leképezés (**17**.8). Ha azonban $\mathbf{T}$ az a egyenesen az azonos leképezést származtatná, akkor a síkon egy perspektivitás volna, feltevésünkkel ellentétben. Ugyancsak, ha $\mathbf{T}$ az a egyenesen hiperbolikus involuciót származtatna, melynek fixpontjai P és Q, akkor az APQ háromszögnek még egy másik oldalán, például AP-n is hiperbolikus involuciót származtatna, s a harmadik oldalon, AQ-n egy *az irányítást megtartó*, s ezért nem involutorius, hiperbolikus leképezést (**30**.3), mely felcserélhető az Ω által származtatott elliptikus involucióval; a **17**.6 tétel folytán tehát az AQ egyenesen **T** az azonos leképezés, s a síkban egy perspektivitás. — Ebből következik, hogy ha **T** nem perspektív, akkor az a egyenesen elliptikus leképezést származtat. Jelöljük $\mathbf{T}_1$-gyel azt a harmonikus perspektivitást, melynek középpontja az a egyenes valamely P pontja, s tengelye a P pont p polárisa. A $\mathbf{T}_2=\mathbf{T}\mathbf{T}_1$ leképezés felcserélhető Ω-val (mivel **T** és $\mathbf{T}_1$ felcserélhető Ω-val), megfordítja az a egyenes irányítását, tehát az a egyenesen hiperbolikus involuciót származtat, s ezért a fentiek szerint a síknak egy, Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitása. Az Ω-val felcserélhető, nem perspektív **T** leképezés az Ω-hoz tartozó $\mathbf{T}_2$ és $\mathbf{T}_1$ harmonikus perspektivitások szorzata: $\mathbf{T}=\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$.

Ezzel b. bizonyítottuk a következő tételt:

37.3. Tétel. *A sík Ω elliptikus polaritása felcserélhető minden, Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitással. Bármely, Ω-val felcserélhető kollineáció vagy egy, Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitás, vagy két ilyen harmonikus perspektivitás szorzata, melyeknek középpontjai nem konjugáltak egymáshoz; az utóbbi esetben a leképezésnek egy fixpontja van, s egy invariáns egyenese, mely a fixpont polárisa, s melyen elliptikus a leképezés* (30. §, *III típus*).

38. §. A sík hiperbolikus polaritásával felcserélhető kollineációk.

Legyen Ω egy *hiperbolikus polaritás*, és **T** a síknak olyan kollineációja, mely felcserélhető Ω-val.

Tegyük fel először, hogy **T** *perspektív leképezés;* középpontja legyen A. Az A pont polárisa, a invariáns egyenes; mivel minden, az A ponton átmenő egyenes invariáns, ezeknek pólusai, vagyis az a egyenes pontjai fixpontok, tehát a a perspektivitás tengelye. Ha P egy tetszőleges, önmagához konjugált pont, mely különbözik A-tól és a pontjaitól, akkor az AP egyenesen két önmagához konjugált pont van (**35**.4); mivel az AP egyenes invariáns **T**-nél ez a két pont egymásba megy át (nem mehetnek át önmagukba, mert P nem fixpont). A **T** leképezés az AP egyenesen egy involuciót létesít (**14**.1), mely hiperbolikus; fixpontjai A és az a tengellyel való metszéspont. Tehát **T** a sík harmonikus perspektivitása, mely az Ω polaritáshoz tartozik. Két különböző típusa van a szerint, hogy az a egyenesen nincs Ω-nak önmagához konjugált pontja, vagy van kettő.

Tegyük fel másodszor, hogy **T** *nem perspektív leképezés*. Ha **T**-nek van három, nem egy egyenesen fekvő A, B, C fixpontja, ezeknek polárisai is, s az AB, AC, BC egyenesek is invariánsak **T**-nél, s mert **T**-nek csak három invariáns egyenese van, ezért A, B, C polárisai az ABC háromszög oldalai. ABC nem lehet azonban poláris háromszög; különben ennek két oldalán, például AB-n és AC-n az Ω-nál konjugált pontok hiperbolikus involuciót alkotnak (**36**.1), mindegyiken két-két önmagához konjugált pont van, melyek **T**-nél egymásba mennek át ; **T** az AB és az AC egyeneseken megegyeznék az A, B, illetve az A, C fixpontokra vonatkozó harmonikus involucióval, s ezért a sík harmonikus perspektivitása volna, feltevésünkkel ellentétben. Tehát az ABC háromszögnek legalább egyik csúcsa, például A, polárisán fekszik; A polárisa legyen például AB, ezen nincs A-n kívül más, önmagához konjugált pont (**35**.2). Ebből következik, hogy B polárisa az AC oldal, C polárisa pedig BC, tehát C is önmagához konjugált pont. A leképezés három fixpontja közül e szerint kettő önmagához konjugált, s a kettőt összekötő egyenes pólusa a harmadik fixpont. A leképezés a 30. § *I* típusához tartozik.

Ha **T**-nek két fixpontja van, A és B, akkor ezek polárisa, a és b invariáns egyenesek, s mert AB is invariáns, a és b közül az egyikkel azonos ; legyen például $a = AB$. Az A fixpont önmagához konjugált ; B polárisa, b átmegy az A ponton, de B-n nem. A b invariáns egyenesen van A-n kívül meg egy önmagához konjugált C pont (**35**.4), s mivel A fixpont, C is fixpont a **T** leképezésnél. **T**-nek tehát van három, nem egy egyenesen fekvő fixpontja, s ezzel visszajutottunk az előbbi bekezdésben tárgyalt leképezések típusához.

Ha **T**-nek csak egy A fixpontja van, ennek a polárisa az egyetlen invariáns egyenes. Ha a átmegy az A ponton, akkor A az a egyenes egyetlen önmagához konjugált pontja ; a **T** leképezés a 30. § *IV* típusához tartozik.

Ha **T**-nek csak egy A fixpontja van, s ez nem fekszik polárisán, az a egyenesen, akkor **T** a-n elliptikus leképezést származtat (30. §, *III* típus). Az a egyenesen nincs önmagához konjugált pont ; ellenkező esetben a-n két önmagához konjugált P és Q pont volna (**35**.4), s ezeket **T** felcserélné egymással, azaz **T** az a egyenesen egy elliptikus involuciót létesítene. Ennek s a P, Q fixpontokra vonatkozó harmonikus involuciónak a szorzata megfordítja az a egyenes irányítását, tehát hiperbolikus leképezés, melynek fixpontjai: B és C konjugáltak egymáshoz Ω-nál, s egymásba mennek át **T**-nél. Az ABC poláris háromszög BC oldalán Ω hiperbolikus involuciót létesít, mivel a BC egyenes P és Q pontja önmagához konjugált. A **36**.1 tétel szerint a háromszögnek még egy oldalán, például AB-n is hiperbolikus involuciót, de a harmadik oldalon, AC-n elliptikus involuciót alkotnak az Ω-nál konjugált pontok. E szerint az AB egyenesen van két önmagához konjugált pont, de AC-n egy sincs. Viszont a **T** leképezésnél az AB egyenes AC-be, s az AB-n fekvő, önmagukhoz konjugált pontok az AC-n fekvő, önmagukhoz konjugált pontokba mennek át; ez ellenmondás. Ezzel igazoltuk, hogy az a invariáns egyenesen, melyen **T** elliptikus leképezést származtat, nincs önmagához konjugált pontja az Ω polaritásnak.

Eredményünket a következő tételben foglaljuk össze:

38.1. T é t e l. *Ha a sík önmagára való* **T** *kollineációja felcserélhető az Ω hiperbolikus polaritással, akkor* **T** *típusa a következő:*

a) *harmonikus perspektivitás, melynek középpontja A, s tengelye a az A pont polárisa; az a egyenesen vagy két önmagához konjugált pont van, vagy egy sincs (V típus);*

b) *a* **T** *leképezésnek egy A fixpontja van, ez önmagához konjugált, s egy a invariáns egyenese, mely az A pont polárisa (IV típus);*

c) *a* **T** *leképezésnek két önmagához konjugált A és C fixpontja van, s az AC egyenes B pólusa a harmadik fixpont; az AB, AC, BC egyenesek invariánsak* **T***-nél (I típus);*

d) *a* **T** *leképezésnek egy A fixpontja van, ez nem konjugált önmagához; A polárisa, a az egyetlen invariáns egyenes, ezen* **T** *elliptikus leképezést és Ω elliptikus involuciót származtat (III típus).*

A felsorolt leképezéseknek Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitásokkal való előállítása céljából bebizonyítjuk a következő tételt:

38.2. T é t e l. *Ha az Ω hiperbolikus polaritással felcserélhető* **T** *kollineáció két, Ω-nál önmagához konjugált pontot felcserél egymással, akkor* **T** *az Ω polaritáshoz tartozó harmonikus perspektivitás.*

B i z o n y í t á s. Legyen P és Q két, az Ω polaritásnál önmagához konjugált pont, mely a **T** kollineációnál egymásba megy át. Az $a=PQ$ egyenes **T**-nél invariáns, s ezen **T** egy involuciót származtat (**14**.1). Az a egyenes A pólusa fixpont a **T** leképezésnél; a nem konjugált önmagához (**35**.2). Mint a **38**.1 tétel levezetése során igazoltuk, az az involució, melyet **T** az a egyenesen származtat, nem lehet elliptikus, tehát hiperbolikus, s van két fixpontja : B és C. A $\mathbf{T}^2$ leképezésnél az a egyenes minden pontja fixpont, tehát $\mathbf{T}^2$ a síkon vagy az azonosság, vagy egy perspektivitás (**27**.1), s mivel felcserélhető Ω-val, ezért harmonikus perspektivitás, melynek középpontja A s tengelye a. Az AB egyenes **T**-nél invariáns, s **T** által származtatott leképezésének a négyzete megtartja az AB egyenes irányítását, tehát $\mathbf{T}^2$ ezen az egyenesen nem lehet hiperbolikus involució. E szerint $\mathbf{T}^2$ a sík azonos leképezése, **T** involutorius, vagyis egy harmonikus perspektivitás (**30**.9), s mert felcserélhető Ω-val, tehát az Ω polaritáshoz tartozik (középpontja a B, C pontok közül az egyik, s tengelye a másikat A-val összekötő egyenes).

38.3. T é t e l. *Ha a* **T** *kollineáció felcserélhető az Ω hiperbolikus polaritással, akkor* **T** *vagy egy, Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitás, vagy két ilyen harmonikus perspektivitás szorzata.*

B i z o n y í t á s. Legyen P egy, Ω-nál önmagához konjugált pont, mely nem fixpontja **T**-nek. A P pontnak **T**-nél és $\mathbf{T}^2$-nél származó képe legyen P' és P''. Ha P'' egybeesik P-vel, akkor **T** egy, Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitás (**38**.2). Tegyük fel, hogy P'' különbözik P-től; a P, P', P'' pontok különböznek egymástól, s mivel mindhárom önmagához konjugált, a **35**.2 tétel szerint egyik sem fekszik valamelyik másiknak a polárisán. Polárisaikat jelöljük p, p', p''-vel ; legyen A a PP'' és p' egyenesek metszéspontja, és a az A pont polárisa. Az A középpontú és a tengelyű $\mathbf{T}_1$ harmonikus perspektivitás felcserélhető Ω-val (**37**.2) ; ennél P' fixpont, mivel az a tengelyen fekszik, és PP'' invariáns egyenes, mivel az A ponton megy át. A PP'' egyenes két önmagához konjugált P és P'' pontja egymásba megy át $\mathbf{T}_1$-nél. A $\mathbf{TT}_1$ kollineációnál, mely szintén felcserélhető Ω-val, a P pont P'-be, P' pedig P-be megy át (ugyanis **T**-nél $P \to P'$, $P' \to P''$, és $\mathbf{T}_1$-nél $P' \to P'$, $P'' \to P$). A **38**.2 tétel szerint $\mathbf{TT}_1$ egy, Ω-hoz tartozó $\mathbf{T}_2$ harmonikus perspektivitás : $\mathbf{TT}_1 = \mathbf{T}_2$; ebből $\mathbf{T} = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$, azaz **T** két, Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitás szorzata.

Ha a $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ harmonikus perspektivitások középpontját összekötő c egyenes önmagához konjugált, akkor a $\mathbf{T} = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ leképezés a **38**.1 tétel b) típusához, ha pedig c nem konjugált önmagához, s konjugált pontjainak involuciója hiperbolikus, illetve elliptikus, akkor a c), illetve a d) típushoz tartozik.

A **38**.2 és 3 tétel s bizonyítása, szerkezetét tekintve, megegyezik az egyenesre vonatkozó **14**.1 és **16**.1 tétellel s bizonyításával.

39. §. A nyaláb projektív leképezéseiről.

Mint az elsőfajú elemi alakzatok közül csak a pontsorral, vagyis az egyenessel foglalkoztunk részletesen, s az erre vonatkozó eredményeket a projektív alapműveletek által átvittük a többi elsőfajú elemi alakzatra, hasonlóan a másodfajú elemi alakzatok közül is csak a síkkal, mint pontmezővel, vagy mint vonalmezővel foglalkozunk részletesen ; az erre vonatkozó fogalmakat és tételeket átvihetjük a sugár- és síknyalábra a projektív alapműveletek segítségével.

Általánosítva a projektív vonatkozás eredetileg bevezetett fogalmát, a következő keretben foglalhatjuk össze a másodfajú elemi alakzatok projektív vonatkozásának értelmezését.

É r t e l m e z é s. *Két másodfajú elemi alakzat közti projektív vonatkozáson* egy olyan előírást értünk, melynél a két alakzat elemei kölcsönösen egyértelmű módon felelnek meg egymásnak, úgyhogy az egyik alakzathoz tartozó bármely elsőfajú elemi alakzatnak a másik másodfajú alakzatban egy elsőfajú elemi alakzat felel meg.

Ez alá az általános fogalom alá tartozik két sík kollineáris és korrelatív vonatkozása. Két sík kollineáris vonatkozásánál az egyik sík pontjainak a másik sík pontjai, az egyik síkhoz tartozó pontsoroknak (azaz egyeneseknek) a másik síkban fekvő pontsorok (azaz egyenesek) felelnek meg, s az egyik sík minden sugársorának a másik síkban egy sugársor felel meg. Két sík közti kollineáris vonatkozás tehát ugyanazt jelenti, mint két pontmező (vagy két sugármező) közti projektív vonatkozás, a fenti értelmezésnek megfelelően. — Két sík korrelatív vonatkozásánál az egyik sík minden pontjának a másik síkban egy egyenes, az egyik sík bármely pontsorának a másik síkban egy sugársor, s az egyik sík bármely sugársorának a másik síkban egy pontsor felel meg. Két sík közti korrelatív vonatkozás tehát ugyanazt jelenti, mint egy pontmező és egy sugármező közti projektív vonatkozás, a fenti értelmezésnek megfelelően.

*Nyaláb*nak nevezzük az egy ponton átmenő síkok és egyenesek összességét, vagyis egy közös középponttal bíró sík- és sugárnyaláb egyesítését. *Két nyaláb közti kollineáris, illetve korrelatív vonatkozás*on olyan projektív vonatkozást értünk, melynél a két nyalábnak megegyező, illetve különböző nevű elemei felelnek meg egymásnak. A kollineáris vonatkozás megfelel két síknyaláb (vagy két sugárnyaláb) közti projektív vonatkozásnak, s a korrelatív vonatkozás egy síknyaláb és egy sugárnyaláb közti projektív vonatkozásnak.

A pontmező és a sugárnyaláb, valamint a sugármező és a síknyaláb között metszéssel, illetve vetítéssel létesíthetünk projektív vonatkozást, s ilyen módon a síkra vonatkozó projektív jellegű fogalmakat és tételeket átvihetjük a nyalábra. Mindazok a tételek, melyek a síkra vonatkozó tételeknek ilyen átvitellel megfelelnek, érvényesek a nyalábra vonatkozóan ; nem szükséges ezeket külön bebizonyítani, sőt még megfogalmazni sem. Egyeseket, amelyekre későbbi tárgyalásunk során szükség lesz, annakidején meg fogunk fogalmazni, de bebizonyításukat illetően csak hivatkozunk a síkban megfelelő, bebizonyított tételre.

A **26**.4 tétel bizonyításában megállapítottuk, hogy egy síknak egy másik síkra, vagy önmagára való kollineáris leképezése az egymásnak megfelelő egyenesek, azaz pontsorok között projektív vonatkozást létesít ; a síkbeli dualitás elve szerint tehát ugyancsak projektív vonatkozást létesít az egymásnak megfelelő sugársorok között is. Ennek az eredménynek a fenti elv szerint való kiterjesztése a következő eredményre vezet :

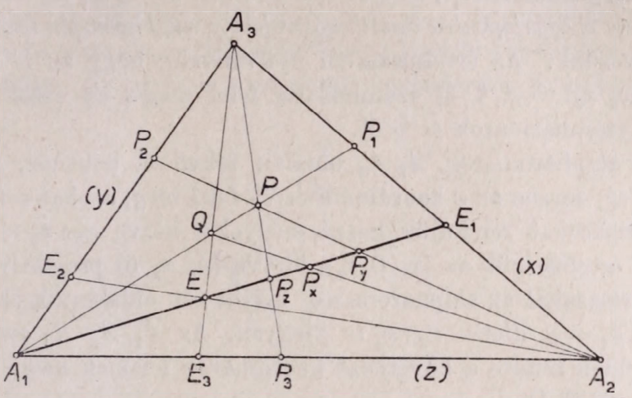
39.1. *Bármely két másodfajú elemi alakzat projektív vonatkozásánál az egymásnak megfelelő elsőfajú elemi alakzatok ugyancsak projektív vonatkozásban vannak,* azaz, hogy a köztük létesített vonatkozást vetítések és metszések összetételével állíthatjuk elő.

40. §. Homogén koordináták a síkban.

40.1. Felveszünk a síkban egy általános helyzetű A_1, A_2, A_3, E pontnégyest. Jelöljük E_1, E_2, E_3-mal az E pontnak az A_1, A_2, A_3 csúcsból az $A_1 A_2 A_3$ háromszög átellenes oldalára való vetületét. Az $A_1 E$ egyenesen bevezetjük a t projektív koordinátát az A_1, E, E_1 alappontokra vonatkozóan, melyeknek sorban a $t = 0, 1, \infty$ értéket feleltetjük meg (**11**.7).

Az A_1E_1 egyenest az A_2 pontból az A_1A_3 egyenesre és az A_3 pontból az A_1A_2 egyenesre vetítjük s a vetítéssel átvisszük ezekre az egyenesekre az A_1E_1 egyenesen meghatározott t projektív koordinátát. Ilyen módon kapjuk az A_1A_3 egyenesen az A_1, E_2, A_3 alappontokra vonatkozó projektív koordinátát, melyet y-nal jelölünk, s az A_1A_2 egyenesen az A_1, E_3, A_2 alappontokra vonatkozó projektív koordinátát, melyet z-vel jelölünk. Vetítsük továbbá az A_1E_1 egyenest az A_2 pontból az $A_3 E_3$ egyenesre s ezt az A_1 pontból az A_2A_3 egyenesre s jelöljük x-szel az A_2A_3 egyenesre eme vetítések által átvitt projektív koordinátát, melynek alappontjai A_2, E_1 és A_3 (61. ábra).

Legyen P a sík tetszőleges olyan pontja, mely nem tartozik az $A_1\,A_2\,A_3$ *alapháromszög* egyik oldalához sem; jelöljük P_1, P_2, P_3-mal a P pontnak az A_1, A_2, A_3 háromszög-csúcsokból az átellenes oldalakra való vetületét,



61. ábra.

lakra való vetületét, s x, y, z-vel rendre az ezekhez a pontokhoz tartozó koordináta-értékeket. A P ponthoz hozzárendeljük az ily módon egyértelműen meghatározott (x, y, z) számhármast.

Bármely P ponthoz rendelt x, y, z számok között az

$$y = zx$$

összefüggés áll fenn. Jelöljük ugyanis P_x, P_y, P_z-vel az A_1E_1 egyenesnek azokat a pontjait, melyekhez tartozó t koordináta-érték rendre a P_1, P_2, P_3 pont x, y, z koordinátájával egyenlő (61. ábra). Ezek közül P_y és P_z a P pontnak az A_2, illetve az A_3 csúcsból az A_1E_1 egyenesre való vetülete. A P_x pontot pedig úgy kapjuk meg, hogy előbb a P pontot A_1-ből az $A_3\,E_3$ egyenesre vetítjük, majd P-nek így nyert Q vetületét az A_2 pontból A_1E_1-re vetítjük. A P_z és P_x pontok szorzatát a **21**.12-ben megadott szerkesztéssel határozzuk meg; jelentse o, e és u rendre az $A_1\,P$, $A_3\,E$ és $A_2\,A_3$ egyenest; o és e metszéspontja Q, a QP_x egyenesnek u-val közös pontja tehát A_2. Az e és u egyenesnek metszéspontja A_3, az $A_3\,P_z$ egyenesnek o-val közös pontja P. A P_z és P_x pontok szorzata tehát az $A_2\,P$ egyenesnek $A_1\,E_1$-gyel való metszéspontja, vagyis a P_y pont; e szerint: $y = zx$.

A P ponthoz rendelt (x, y, z) számhármasból a következő képlet szerint képezünk (x_1, x_2, x_3) számhármasokat :

$$x_1 : x_2 : x_3 = x : y : yx \quad (= 1 : z : y).$$

A P pont egy arányossági tényezőtől eltekintve, meghatározza az (x_1, x_2, x_3) számhármast, melyet *a P pontnak az $A_1\, A_2\, A_3$ alapháromszögre s az E egységpontra vonatkozó projektív vagy homogén koordinátáinak* nevezünk. Az értelmezésből nyilvánvaló, hogy az E pontnak az $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$ számhármas felel meg s az ezzel arányos $(\lambda, \lambda, \lambda)$ számhármasok $(\lambda \neq 0)$.

Az alapháromszög $A_2\, A_3$ oldalán fekvő P ponthoz, melynek ezen az egyenesen az x koordináta-érték felel meg, azokat a $(0, x_2, x_3)$ számhármasokat rendeljük hozzá, melyekre nézve $x_3 : x_2 = x$. Hasonlóan értelmezzük az $(x_1, 0, x_3)$, illetve $(x_1, x_2, 0)$ projektív koordináta-hármasokat az alapháromszög másik két oldalán, úgyhogy sorban $x_3 : x_1 = y$, illetve $x_2 : x_1 = z$ legyen. Az A_1, $A_2\, A_3$ csúcsoknak ilyen módon rendre a következő koordináták felelnek meg : $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Minden ponthoz hozzárendeltünk a fenti előírással egy, arányossági tényezőtől eltekintve, egyértelműen meghatározott (x_1, x_2, x_3) számhármast, melynek nem mindhárom eleme 0 ; minden a $(0, 0, 0)$-tól különböző (x_1, x_2, x_3) számhármasnak megfelel a síkban egy és csak egy P pont, melynek koordinátái $(x_1,\ x_2,\ x_3)$.

Az értelmezésből közvetlenül következik, hogy egy tetszőleges, az A_1 csúcson átmenő egyenes összes P pontjára

$$\frac{x_3}{x_2} = \text{konstans} = x,$$

ahol x jelenti az illető egyenes és az $A_2\, A_3$ oldal metszéspontjának megfelelő x koordináta-értéket. Hasonlóan az A_2 és az A_3 csúcsokon átmenő egyenesekre fennáll :

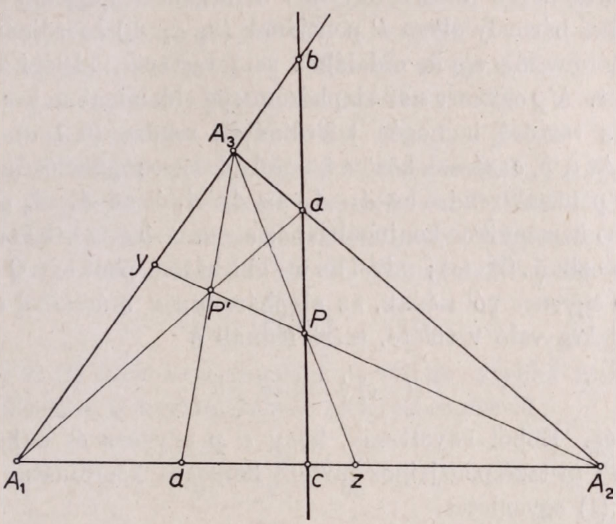
$$\frac{x_3}{x_1} = \text{konstans} = y,$$

illetve

$$\frac{x_2}{x_1} = \text{konstans} = z.$$

Ezek az alapháromszög csúcsain átmenő egyenesek egyenletei.

Legyen p tetszőleges olyan egyenes, mely nem megy át az alapháromszög egyik csúcsán sem ; a p egyenesnek az alapháromszög oldalaival való metszéspontjait s az ezekhez a pontokhoz tartozó x, y, illetve z koordinátát jelöljük rendre a, b, c-vel. Legyen P a p egyenes valamely pontja, mely nem tartozik az alapháromszög egyik oldalához sem; kössük össze p és az $A_2 A_3$ oldal a metszéspontját A_1-gyel s jelöljük P'-vel ennek az egyenesnek az $A_2 P$ egyenessel való metszéspontját (62. ábra). Az $A_3 P$ és az $A_3 P'$ egyenesnek az $A_1 A_2$ oldallal való metszéspontjához tartozó z koordináta-értéket jelöljük z-vel és d-vel. Az egyenes pontjainak összeadására vonatkozó értel-



62. ábra.

mezés szerint a z pont a c és d pontok összege (**21**.11); P_0 jelenti az A_1 pontot, U az A_2 pontot; u és u' az $A_2 A_3$ és $A_2 P$ egyenest, o pedig az $A_1 P'$ egyenest. Tehát

$$z = c + d.$$

Jelöljük az $A_2 P$ egyenes és $A_1 A_3$ metszéspontjához tartozó koordinátát y-nal, továbbá P és P' homogén koordinátáit (x_1, x_2, x_3)-mal és (x_1', x_2', x_3')-vel. Az alapháromszög csúcsain átmenő egyenesek egyenletének már megállapított alakját alkalmazzuk sorban az $A_2 P$, $A_1 P'$, $A_3 P$ és $A_3 P'$ egyenesekre; így kapjuk a következő kapcsolatokat:

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{x_3'}{x_1'} = y, \quad \frac{x_3'}{x_2'} = a, \quad \frac{x_2}{x_1} = z, \quad \frac{x_2'}{x_1'} = d.$$

Ezekből :

$$\frac{x_3}{x_1}=\frac{x_3'}{x_1'}=\frac{x_2'}{x_1'}\cdot\frac{x_3'}{x_2'}=d.a=(z-c)a=\left(\frac{x_2}{x_1}-c\right)a,$$

s ebből

$$x_3=x_2.a-x_1.ca,$$

vagyis

$$x_1.ca-x_2.a+x_3=0. \qquad (1)$$

Ez a homogén lineáris egyenlet a megadott p *egyenes egyenlete;* a p egyenes bármely olyan P pontjának (x_1, x_2, x_3) koordinátái, mely az alapháromszög egyik oldalához sem tartozik, kielégítik az (1) egyenletet. A p egyenes s az alapháromszög oldalainak a, b, c metszéspontjához tartozó homogén koordináták rendre $(0, 1, a)$, $(1, 0, b)$, $(1, c, 0)$. Az a, b, c számok között fennáll a $b=-ca$ egyenlőség. Ugyanis az a, b, c pontnak rendre az A_2, A_3, az A_3, A_1 és az A_1, A_2 pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltjához a $-a$, $-b$ és a $-c$ koordinátaérték tartozik (l. **21.**11); mivel az utóbbi három pont egy Q pontnak, t. i. a p egyenes pólusának, az alapháromszög csúcsaiból az átellenes oldalakra való vetülete, ezért fennáll a

$$(-c)(-a)=-b$$

egyenlőség. Ebből következik, hogy a p egyenes és a háromszög oldalainak metszéspontjaihoz tartozó homogén koordináták is kielégítik az (1) egyenletet.

Megfordítva, ha (x_1, x_2, x_3) olyan számhármas, mely különbözik a $(0, 0, 0)$ számhármastól s kielégíti az (1) egyenletet, akkor a P pont, melynek koordinátái (x_1, x_2, x_3), a p egyeneshez tartozik; ez a fenti levezetés megfordításából könnyen következik.

40.2. A fentiek szerint minden egyenesnek megfelel egy, konstans szorzótól eltekintve, egyértelműen meghatározott homogén lineáris egyenlet az x_1, x_2, x_3 koordinátákban. Megfordítva, minden homogén lineáris egyenlet az x_1, x_2, x_3 változókban egy egyenes egyenlete. Ha az

$$u_1 x_1+u_2 x_2+u_3 x_3=0$$

egyenletben egyik együttható sem 0, akkor ez annak az egyenesnek az egyenlete, mely az alapháromszög $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ oldalát rendre az

$$x=-\frac{u_2}{u_3}, \quad y=-\frac{u_1}{u_3}, \quad z=-\frac{u_1}{u_2}$$

koordinátájú pontban metszi. Ha az u_i számok közül az egyik, például $u_3 = 0$, de $u_1 u_2 \neq 0$, akkor az $u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$ egyenletből:

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{u_2}{u_1};$$

ez az A_3 csúcson átmenő egyenes egyenlete, mely az $A_1 A_2$ oldalt a

$$z = -\frac{u_1}{u_2}$$

koordinátájú pontban metszi. Ha pedig az u_i együtthatók közül kettő zérus, például $u_2 = u_3 = 0$, de $u_1 \neq 0$, akkor $u_1 x_1 = 0$, vagyis $x_1 = 0$ az alapháromszög $A_2 A_3$ oldalának az egyenlete.

A p egyenesnek az alapháromszögre vonatkozó pólusát jelöljük Q-val s ennek homogén koordinátáit (ξ_1, ξ_2, ξ_3)-mal. A p egyenes egyenletében szereplő együtthatók arányosak ξ_1, ξ_2, ξ_3 reciprok értékével. Ugyanis a Q pontnak homogén koordinátáit a Q pontnak az A_i csúcsokból az átellenes oldalakra való vetületeihez tartozó $-a, -b, -c$ koordinátákkal a következő képletek fejezik ki:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = 1 : -c : ac.$$

Ha tehát az (1) egyenletet elosztjuk ac-vel, az egyenlet együtthatóit helyettesíthetjük Q koordinátáinak reciprok értékével:

$$\frac{x_1}{\xi_1} + \frac{x_2}{\xi_2} + \frac{x_3}{\xi_3} = 0.$$

Az

$$u_1 = \frac{1}{\xi_1}, \quad u_2 = \frac{1}{\xi_2}, \quad u_3 = \frac{1}{\xi_3}$$

számhármast nevezzük a *p egyenes homogén vonalkoordinátái*nak. Ez a számhármas, úgyanúgy, mint egy pont homogén koordináta-hármasa, csak egy arányossági tényezőtől eltekintve van meghatározva. Az E egységpontnak az alapháromszögre vonatkozó e polárisa az *egységvonal*, ehhez az $(u_1, u_2, u_3) = (1, 1, 1)$ koordináta-hármas tartozik. Az alapháromszög csúcsain átmenő egyeneseknek rendre a $(0, u_2, u_3)$, $(u_1, 0, u_3)$, $(u_1, u_2, 0)$ számhármasokat feleltetjük meg, ahol

$$-\frac{u_2}{u_3} = x, \qquad -\frac{u_1}{u_3} = y, \qquad -\frac{u_1}{u_2} = z$$

jelenti sorban az illető egyenes s a háromszög átellenes oldalának metszéspontjához tartozó x, illetve y, illetve z koordinátát. Az alapháromszög oldalainak az $(u_1, u_2, u_3) = (1, 0, 0,)$ $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$

koordináta-hármasok felelnek meg. Minden (0, 0, 0)-tól különböző (u_1, u_2, u_3) számhármasnak megfelel egy és csak egy olyan l egyenes, melynek koordinátái (u_1, u_2, u_3).

Az

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \tag{2}$$

egyenlet *a pont és az egyenes egyesített helyzetének a feltétele;* ha ez az egyenlet fennáll, akkor és csak akkor megy át az (u_1, u_2, u_3) koordinátájú egyenes az (x_1, x_2, x_3) koordinátájú ponton.

Ha (y_1, y_2, y_3) és (z_1, z_2, z_3) az l egyenes két különböző y és z pontjának koordinátái, akkor az egyenes minden P pontjának (x_1, x_2, x_3) koordinátáit kifejezhetjük a következő paraméteres alakban:

$$x_i = \lambda y_i + \mu z_i \quad (i = 1, 2, 3); \tag{3}$$

a P pontnak megfelel egy λ, μ számpár, melyet az y és z pont megadott koordinátái s a P pont egy arányossági tényezőtől eltekintve egyértelműen meghatároznak; λ és μ nem lehet mindkettő 0. Ha ugyanis az (y_1, y_2, y_3) és a (z_1, z_2, z_3) számhármas kielégíti a (2) egyenletet, akkor nyilván a (3) számhármas is, bármely (0, 0)-tól különböző értékeket jelent λ és μ. Megfordítva, minden olyan (x_1, x_2, x_3) számhármast, mely kielégíti a (2) egyenletet, annak két, lényegesen (azaz nem csak egy azonossági tényezőben) különböző megoldásával a (3) alakban fejezhetünk ki.

40.3. *Az l egyenes négy tetszőleges $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, $P^{(4)}$ pontjának kettősviszonya egyenlő a* (3) *kifejezés szerint megfelelő $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(i)}$ értékekből képezett*

$$\left(\frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}}\ \frac{\lambda^{(2)}}{\mu^{(2)}}\ \frac{\lambda^{(3)}}{\mu^{(3)}}\ \frac{\lambda^{(4)}}{\mu^{(4)}}\right)$$

kettősviszonnyal. Az alapháromszögnek van legalább egy olyan csúcsa, legyen ez például A_3, mely nem tartozik az l egyeneshez. Ha az l egyenes pontjait A_3-ból az A_1A_2 oldalra vetítjük, minden pontjának x_1, x_2 koordinátája egyenlő vetületének x_1, x_2 koordinátájával s a vetület x_3 koordinátája 0. Az $x_3 = 0$ egyenesre érvényes, megfelelő tételből (**24.**1) következik tehát a fenti állítás.

Négy, egy ponton átmenő egyenes kettősviszonyán értjük egy tetszőleges olyan l egyenessel való metszéspontjaiknak kettősviszonyát, mely nem megy át a négy egyenes közös pontján. Mivel vetítésnél, mint éppen láttuk, a kettősviszony változatlan, tehát a négy egyenes kettősviszonyának értéke független az l egyenes megválasztásától.

Ha v és w két tetszőleges egyenes, ezeknek a metszéspontján átmenő bármely u egyenes koordinátáit v és w koordinátáival a következő képletekkel fejezhetjük ki:

$$u_i = \lambda v_i + \mu w_i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{4}$$

40.4. *Bármely négy, egy ponton átmenő $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(4)}$ egyenes kettősviszonya egyenlő a (4) kifejezés szerint megfelelő*

$$\left(\frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}}\ \frac{\lambda^{(2)}}{\mu^{(2)}}\ \frac{\lambda^{(3)}}{\mu^{(3)}}\ \frac{\lambda^{(4)}}{\mu^{(4)}}\right)$$

értékek kettősviszonyával. Ez a tétel a pontsorokra vonatkozó fenti tételnek a síkbeli dualitás elve szerint felel meg s ugyanúgy bizonyítható be.

41. §. A sík koordinátáinak lineáris transzformációi.

Az (x_1, x_2, x_3) homogén koordináták *lineáris transzformációján* egy olyan

$$\begin{aligned} \varrho' x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \varrho' x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \varrho' x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \tag{1}$$

lineáris egyenletrendszert értünk, melynek determinánsa:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |a_{ik}|$$

különbözik zérustól ($\varrho' \neq 0$, arányossági tényező).

Az *inverz transzformációt a*

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= A_{11}x_1' + A_{21}x_2' + A_{31}x_3' \\ \varrho x_2 &= A_{12}x_1' + A_{22}x_2' + A_{32}x_2' \\ \varrho x_3 &= A_{13}x_1' + A_{23}x_2' + A_{33}x_3' \end{aligned} \tag{2}$$

egyenletek fejezik ki, melyekben A_{ik} jelenti az A determinánsban az a_{ik} elemhez tartozó algebrai adjungáltat, vagyis az i-edik sor és a k-adik oszlop kihagyásával keletkező másodrendű aldetermináns értékét, pozitív vagy negatív előjellel ellátva, a szerint, hogy $i+k$ páros vagy páratlan.

Legyen

$$\varrho'' x_i'' = b_{i1}x_1' + b_{i2}x_2' + b_{i3}x_3' \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1'}$$

egy másik lineáris transzformáció ; jelöljük ezt $\mathbf{S}_b$-vel, s az (1) egyenletekkel kifejezett lineáris transzformációt $\mathbf{S}_a$-val. Az $\mathbf{S}_a$ és $\mathbf{S}_b$ *lineáris transzformációk* $\mathbf{S}_a\,\mathbf{S}_b$ *szorzatán* azt a transzformációt értjük, melyet az (1) egyenletekkel kifejezett (x_1', x_2', x_3') értékeknek az (1') egyenletekbe való helyettesítésével kapunk ; ezt a szorzatot a következő képletek fejezik ki :

$$\varrho'' x_i'' = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + c_{i3}x_3 \qquad (i=1, 2, 3), \qquad (1'')$$

ahol

$$c_{ik} = \sum_j b_{ij}a_{jk} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Az (1") rendszer determinánsa az $|a_{ik}|$ és a $|b_{ik}|$ determinánsok szorzata s mint amazok, ez is különbözik 0-tól. Az (1") képletek is lineáris transzformációt fejeznek ki, a fenti értelmezésnek megfelelően ; ezt a transzformációt $\mathbf{S}_c$-vel s mint $\mathbf{S}_a$ és $\mathbf{S}_b$ szorzatát $\mathbf{S}_a\,\mathbf{S}_b$-vel jelöljük : $\mathbf{S}_c = \mathbf{S}_a\,\mathbf{S}_b$.

Ha (x_1, x_2, x_3) az α síkban, (x_1', x_2', x_3') az α' síkban és (x_1'', x_2'', x_3'') az α'' síkban egy tetszőleges koordináta-rendszerre vonatkozó homogén pontkoordinátákat jelölnek, akkor az (1) képletek az α síknak az α' síkra való kölcsönösen egyértelmű leképezését fejezik ki, amennyiben az α sík minden P pontjának, melynek koordinátái (x_1, x_2, x_3), megfeleltetik az α' síknak (x_1', x_2', x_3') koordinátákkal bíró P' pontját ; az α' sík minden P' pontja megfelel ennél a leképezésnél az α sík egy és csak egy P pontjának, a (2) képletek szerint, melyek a leképezés inverzét állítják elő. Az (1') képletek az α' síknak az α'' síkra s az (1") képletek az α síknak az α'' síkra való leképezését fejezik ki ; az utóbbi az (1) és az (1') képletek által kifejezett leképezések szorzata. E szerint két leképezés szorzatát az ezeket kifejező lineáris transzformációknak megfelelő sorrendben vett szorzata állítja elő. Az $\mathbf{S}_a$ lineáris transzformációval kifejezett leképezést röviden $\mathbf{S}_a$ *leképezés*nek fogjuk nevezni.

Az $\mathbf{S}_a$ leképezésnél az α sík minden egyenesének az α' síkban egy egyenes felel meg ; ugyanis az (u_1, u_2, u_3) koordinátájú egyenes pontjai, vagyis azok a pontok, melyeknek (x_1, x_2, x_3) koordinátái kielégítik az

$$u_1\,x_1 + u_2\,x_2 + u_3\,x_3 = 0$$

egyenletet, a leképezésnél olyan (x_1', x_2', x_3') pontokba mennek át, melyekre a (2) egyenletek folytán fennáll az

$$x_1'(A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3) + x_2'(A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3) +$$
$$+ x_3'(A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3) = 0$$

egyenlet ; ez egy egyenes egyenlete, amelynek vonalkoordinátáit, (u_1', u_2', u_3')-t az eredeti egyenes (u_1, u_2, u_3) vonalkoordinátáival a következő képletek fejezik ki :

$$\sigma' u_i' = A_{i1}u_1 + A_{i2}u_2 + A_{i3}u_3 \quad {\scriptstyle (i=1,2,3)}; \tag{3}$$

ezekből az (u_1, u_2, u_3) koordináták következő kifejezését kapjuk :

$$\sigma u_i = a_{1i}u_1' + a_{2i}u_2' + a_{3i}u_3' \quad {\scriptstyle (i=1,2,3)}. \tag{4}$$

Mivel az (x_1, x_2, x_3) koordináták $\mathbf{S}_a$ lineáris transzformációjánál minden pontnak pont, minden egyenesnek egyenes felel meg s az egyesített helyzet feltétele változatlan marad, tehát az $\mathbf{S}_a$ leképezés az α síknak az α' síkra való *kollineáris leképezése* (**26**.5).

Az α síknak az α' síkra való tetszőleges kollineációját előállíthatjuk lineáris koordináta-transzformációval. Ugyanis a **26**.7 tétel szerint a kollineációt négy-négy általános helyzetű s a kollineációnál egymásnak megfelelő A_1, A_2, A_3, E és A_1', A_2', A_3', E' pont egyértelműen meghatározza. Legyenek (x_1, x_2, x_3) az α síkban az $A_1 A_2 A_3$ alapháromszögre és az E egységpontra, (x_1', x_2', x_3') pedig az α' síkban az $A_1' A_2' A_3'$ alapháromszögre és az E' egységpontra vonatkozó pontkoordináták. Az

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3 \tag{5}$$

képletek az α síknak az α' síkra való kollineációját állítják elő, mely az A_1, A_2, A_3, E pontot az A_1', A_2', A_3', E' pontba viszi át.

Meg akarjuk mutatni, hogy az α sík minden önmagára való kollineációja olyan lineáris koordináta-transzformációval is előállítható, melyben az (x_1, x_2, x_3) és (x_1', x_2', x_3') koordináták ugyanarra a koordinátarendszerre vonatkoznak. Legyen $\mathbf{T}$ az α síknak tetszőleges kollineáris leképezése önmagára ; jelöljük az alapháromszög A_1, A_2, A_3 csúcsainak s az E egységpontnak $\mathbf{T}$-nél származó képét A_1', A_2', A_3' és E'-vel s ezeknek a pontoknak az $A_1 A_2 A_3$ alapháromszögre s az E egységpontra vonatkozó koordinátáit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$-mal. Az (1) egyenletrendszerben helyettesítsük be jobboldalt (x_1, x_2, x_3) helyett rendre az $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ számhármasokat s baloldalt (x_1', x_2', x_3') helyett az A_1', A_2',

A_3', E' pontok koordinátáit ; ilyen módon a következő egyenleteket kapjuk az a_{ik} együtthatók meghatározására :

$$a_{11}:a_{21}:a_{31}=\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3,\quad a_{12}:a_{22}:a_{32}=\beta_1:\beta_2:\beta_3,\quad a_{13}:a_{23}:a_{33}=\gamma_1:\gamma_2:\gamma_3,$$
$$(a_{11}+a_{12}+a_{13}):(a_{21}+a_{22}+a_{23}):(a_{31}+a_{32}+a_{33})=\delta_1:\delta_2:\delta_3.$$

Legyen :

$$a_{k1}=\lambda_1\alpha_k,\quad a_{k2}=\lambda_2\beta_k,\quad a_{k3}=\lambda_3\gamma_k \quad {\scriptstyle (k=1,\,2,\,3)}; \tag{6}$$

a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ értékek meghatározására a következő egyenletrendszer szolgál :

$$\begin{aligned}\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\beta_1+\lambda_3\gamma_1&=\varrho\delta_1,\\ \lambda_1\alpha_2+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\gamma_2&=\varrho\delta_2,\\ \lambda_1\alpha_3+\lambda_2\beta_3+\lambda_3\gamma_3&=\varrho\delta_3.\end{aligned}$$

Mivel az A_1', A_2', A_3' pontok nem feküsznek egy egyenesen, az

$$\left|\alpha_i\,\beta_i\,\gamma_i\right|=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}$$

determináns 0-tól különbözik ; ellenkező esetben ugyanis volna egy olyan u_1, u_2, u_3 számhármas, melynek nem mindhárom eleme 0, s mely kielégítené az

$$\begin{aligned}u_1\alpha_1+u_2\alpha_2+u_3\alpha_3&=0\\ u_1\beta_1+u_2\beta_2+u_3\beta_3&=0\\ u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+u_3\gamma_3&=0\end{aligned}$$

egyenletrendszert, s ez azt jelentené, hogy az A_1', A_2', A_3' pontok az (u_1, u_2, u_3) vonalkoordinátájú egyenesen feküsznek. Hasonlóan, zérustól különböznek azok a determinánsok, melyeket az $\left|\alpha_i\,\beta_i\,\gamma_i\right|$ determinánsból egy-egy oszlop elemeinek a $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ értékekkel való helyettesítésével kapunk, mivel A_1', A_2', A_3', E' általános helyzetű pontnégyes. A $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ számok kifejezése a fenti egyenletrendszerből tehát a következő :

$$\lambda_1=\frac{|\delta_i\,\beta_i\,\gamma_i|}{|\alpha_i\,\beta_i\,\gamma_i|},\quad \lambda_2=\frac{|\alpha_i\,\delta_i\,\gamma_i|}{|\alpha_i\,\beta_i\,\gamma_i|},\quad \lambda_3=\frac{|\alpha_i\,\beta_i\,\delta_i|}{|\alpha_i\,\beta_i\,\gamma_i|}. \tag{7}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ meghatározott, 0-tól különböző számok. Ezeket behelyettesítve a (6) kifejezésekbe, megkapjuk annak a koordináta-transzformációnak a_{ik} együtthatóit, melynél a koordináta-háromszög A_1, A_2, A_3 csúcsa s az E egységpont rendre az A_1', A_2', A_3', E' pontba megy át. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt :

41.1. Tétel. *A sík homogén pontkoordinátáinak (vagy vonalkoordinátáinak) minden lineáris transzformációja, melynek determinánsa* 0*-tól különbözik, a síknak egy kollineációját állítja elő, s minden kollineáció kifejezhető a homogén pontkoordináták (vagy vonalkoordináták) lineáris transzformációjával.*

Az (1) képletekkel kifejezett *kollineáció fixpontjait* az

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = \varrho x_i \qquad (i=1,2,3)$$

egyenletrendszer (x_1, x_2, x_3) megoldásai adják. Ennek az egyenletrendszernek, melyet zérusra redukált alakban így írhatunk:

$$\begin{aligned}(a_{11}-\varrho)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0\\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\varrho)x_2 + a_{23}x_3 &= 0\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\varrho)x_3 &= 0,\end{aligned} \tag{8}$$

akkor és csak akkor van nem triviális (vagyis a (0, 0, 0) számhármastól különböző) megoldása, ha a

$$\Delta(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\varrho & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\varrho \end{vmatrix} \tag{9}$$

determináns 0-val egyenlő. A determináns kifejtése a következő egyenletre vezet:

$$-\Delta(\varrho) = \varrho^3 - (a_{11}+a_{22}+a_{33})\varrho^2 + (A_{11}+A_{22}+A_{33})\varrho - A = 0. \tag{10}$$

Ennek a harmadfokú, valós együtthatójú egyenletnek van legalább egy valós gyöke: ϱ_1. A (8) egyenletrendszerben ϱ-t a ϱ_1 értékkel helyettesítve, megkapjuk az egyenletrendszernek legalább egy, nem triviális (x_1, x_2, x_3) megoldását, vagyis az (1) képletekkel előállított kollineációnak egy fixpontját. Ez a **28**.1 tétel analitikus bebizonyítása.

Az (u_1, u_2, u_3) *egyenes* a kollineációnál akkor és csak akkor *invariáns,* ha koordinátái kielégítik az

$$\begin{aligned}(a_{11}-\sigma)u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 &= 0\\ a_{12}u_1 + (a_{22}-\sigma)u_2 + a_{32}u_3 &= 0\\ a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + (a_{33}-\sigma)u_3 &= 0\end{aligned}$$

egyenletrendszert; annak a feltétele, hogy az egyenletrendszernek legyen nem triviális megoldása: $\Delta(\sigma) = 0$.

42. §. A sík kollineációinak analitikus kifejezése.

A sík önmagára való **T** kollineációjának kifejezését egyszerűsíthetjük azáltal, hogy a kollineációnál kitüntetett pontokat és egyeneseket veszünk fel az alapháromszög csúcsainak és oldalainak. Ha például a **T** kollineációt a 41. § (1) képleteivel fejezzük ki, s ha az alapháromszög A_1 $(1, 0, 0)$ csúcsa fixpontja a **T** leképezésnek, akkor $a_{21}=a_{31}=0$. Hasonlóan, ha A_2 fixpont, akkor $a_{12}=a_{32}=0$, s ha A_3 fixpont, akkor $a_{13}=a_{23}=0$.

Az A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 oldalak invarianciájának feltétele a 41. § (4) egyenleteiből rendre:

$$a_{12}=a_{13}=0, \qquad a_{21}=a_{23}=0, \qquad a_{31}=a_{32}=0.$$

Ha a **T** leképezésnek van három, nem egy egyenesen fekvő fixpontja, ezeket vesszük fel az alapháromszög csúcsainak, s **T** következő kifejezését kapjuk (melyben baloldalt elhagyjuk a ϱ' arányossági tényezőt):

$$x_1'=a_{11}x_1, \qquad x_2'=a_{22}x_2, \qquad x_3'=a_{33}x_3. \qquad (I)$$

Az E egységpont **T**-nél származó képének koordinátái: (a_{11}, a_{22}, a_{33}). Ha **T** I típusú leképezés (l. **30**.1), akkor E képe nem tartozik az A_1E, A_2E, A_3E egyenesek közül egyikhez sem, azaz a_{11}, a_{22}, a_{33} *különböznek egymástól.* Ha pedig **T** V típusú, általános perspektivitás, melynek középpontja A_1, s tengelye A_2A_3, akkor E képe E' az A_1E egyenesen fekszik, tehát E'-nek x_2 és x_3 koordinátája egyenlő, azaz $a_{22}=a_{33}$; e szerint az *általános perspektivitás* kifejezése:

$$x_1'=a_{11}x_1, \qquad x_2'=x_2, \qquad x_3'=x_3. \qquad (V$$

Ha a perspektivitás involutorius (harmonikus perspektivitás), akkor $\mathbf{T}^2$ kifejezése az (V) képletekből: $x_1'=a_{11}^2x_1$, $x_2'=x_2$, $x_3'=x_3$, s mivel ez az azonos leképezés, tehát $a_{11}^2=1$, és $a_{11}=-1$. A *harmonikus perspektivitás* kifejezése e szerint:

$$x_1'=-x_1, \qquad x_2'=x_2, \qquad x_3'=x_3. \qquad (V')$$

Ha a **T** leképezésnek nincs három olyan fixpontja, mely nem fekszik egy egyenesen, de van legalább két fixpontja, vegyük fel ezeket az alapháromszög A_1 és A_2 csúcsának. **T** kifejezésében ennek megfelelően

$$a_{21}=a_{31}=a_{12}=a_{32}=0.$$

Ha T-nek nincs A_1-en és A_2-n kívül más fixpontja, akkor az A_1A_2 invariáns egyenes a két fixpont közül az egyikhez, például A_1-hez asszociált; ezen kívül van még egy invariáns egyenes, mely az A_2 fixponthoz asszociált, s ez átmegy A_1-en; ezen az invariáns egyenesen vesszük fel az A_3 pontot. Az A_1A_3 egyenes invarianciájának megfelelően:

$$a_{21} = a_{23} = 0,$$

s így **T** kifejezése:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{13}x_3, \quad x_2' = a_{22}x_2, \quad x_3' = a_{33}x_3.$$

Az A_1A_3 egyenesen A_1-n kívül nincs más fixpont; az A_1A_3 egyenesen **T** által származtatott leképezés kifejezése:

$$\frac{x_1'}{x_3'} = \frac{a_{11}}{a_{33}} \frac{x_1}{x_3} + \frac{a_{13}}{a_{33}}$$

s mert ez parabolikus, ezért a jobboldalon $\frac{x_1}{x_3}$ együtthatója 1, azaz $a_{11}=a_{33}$ (**21**.4). Tehát a *II* típusú **T** kollineáció kifejezése:

$$x_1' = x_1 + a_{13}x_3, \quad x_2' = a_{22}x_2, \quad x_3' = x_3. \qquad (II)$$

Ha pedig **T**-nek van az A_1A_2 egyenesen A_1-en és A_2-n kívül még egy fixpontja, akkor **T** ezen az egyenesen az azonosság, s a síkban egy speciális perspektivitás. Tegyük fel, hogy A_1 a perspektivitás középpontja, s A_3 tetszőleges olyan pont, mely nem tartozik az A_1A_2 egyeneshez. Az A_1A_3 egyenes invariáns, s ezen parabolikus a leképezés, tehát a **T** leképezés kifejezésére alkalmasak a (*II*) képletek, ha még figyelembe vesszük, hogy az $x_3=0$ egyenesen **T** az azonos leképezés:

$$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{a_{11}}{a_{22}} \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1}{x_2};$$

ebből $a_{11}=a_{22}$. A *speciális perspektivitás* kifejezése e szerint:

$$x_1' = x_1 + a_{13}x_3, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3. \qquad (VI)$$

Ha a **T** leképezésnek csak egy fixpontja van, s egy azon át nem menő invariáns egyenese, vegyük fel a fixpontot A_1 csúcsnak, s az invariáns egyenest az alapháromszög a_1 oldalának. A_1 és a_1 invarianciája folytán

$$a_{21} = a_{31} = a_{12} = a_{13} = 0;$$

tehát **T** kifejezése:

$$x_1' = a_{11}x_1, \quad x_2' = a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \quad x_3' = a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

Ezt a kifejezést tovább egyszerűsíthetjük az A_2, A_3, E pontok alkalmas megválasztásával. — Mivel **T** az a_1 egyenesen elliptikus leképezést származtat, a **17**.7 tétel szerint van az a_1 egyenesnek egy és csak egy olyan **J** elliptikus involuciója, mely a_1-en felcserélhető **T**-vel. Az A_2 pontot vegyük fel tetszőlegesen az a_1 egyenesen, s A_3 legyen A_2-nek **J**-nél származó képe. Jelöljük **J**'-vel az a_1 egyenesnek az A_2, A_3 fixpontokra vonatkozó harmonikus involucióját ; **J**.**J**' az a_1 egyenes önmagára való projektív leképezése, megfordított irányítással, tehát hiperbolikus (**15**.1) ; fixpontjait jelöljük P-vel és Q-val. A koordináta E egységpontját vegyük fel az A_1P (vagy az $A_1 Q$) egyenesen úgy, hogy az A_1, P (Q) pontoktól különböző legyen. Az a_1 egyenes **J** involucióját, mely az $A_2(0, 1, 0)$ és A_3 $(0, 0, 1)$ pontokat egymással, valamint a P $(0, 1, 1)$ és Q $(0, —1, 1)$ pontokat egymással felcseréli, az

$$x_2' = -x_3, \quad x_3' = x_2$$

képletek fejezik ki. Mivel a_1-en **J** és **T** felcserélhetők, azaz **TJ**=**JT**, tehát **T** és **J** fenti képleteiből adódik :

$$-a_{22}x_3 + a_{23}x_2 = -a_{32}x_2 - a_{33}x_3,$$

amely x_2, x_3 minden értékére érvényes, tehát :

$$a_{22} = a_{33}, \quad a_{23} = -a_{32}.$$

E szerint a *III* típusú **T** kollineáció kifejezése a következő :

$$x_1' = a_{11}x_1, \quad x_2' = a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \quad x_3' = -a_{23}x_2 + a_{22}x_3. \quad (III)$$

Végül, ha **T**-nek egy fixpontja, s egy azon átmenő invariáns egyenese van, legyen A_1 a fixpont és a_3 az invariáns egyenes ; ez esetben :

$$a_{21} = a_{31} = 0, \quad \text{és} \quad a_{31} = a_{32} = 0.$$

Mivel az A_1A_2 egyenesen **T** parabolikus leképezést létesít, a (*II*) képlet levezetésében alkalmazott meggondolás szerint :

$$a_{11} = a_{22}.$$

Mivel továbbá az A_1 középpontú sugársorban **T** ugyancsak parabolikus leképezést létesít, melyet az előző paragrafus (4) képletei szerint az

$$u_2 = a_{22}u_2', \quad u_3 = a_{23}u_2' + a_{33}u_3'$$

egyenletekkel állíthatunk elő, tehát

$$a_{22} = a_{33},$$

s így a *IV* típusú **T** kollineáció kifejezése :

$$x_1' = x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3, \quad x_2' = x_2 + a_{23} x_3, \quad x_3' = x_3. \qquad (IV)$$

A sík affin leképezéseinek kifejezését a fenti képletekből specializálással kapjuk meg. Vegyük fel például az alapháromszög a_3 oldalát végtelen távoli egyenesnek ; az a_3 oldal invarianciájából következik, hogy

$$a_{31} = a_{32} = 0,$$

s így a sík affin leképezéseit a következő képletek fejezik ki :

$$x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3, \quad x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3, \quad x_3' = a_{33} x_3.$$

Az affin leképezések kifejezésére célszerű az (x_1, x_2, x_3) koordinátákat helyettesíteni az

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

nem homogén koordinátákkal ; ezeket *párhuzamos koordinátáknak* nevezzük, mivel az x=konstans egyenesek párhuzamosak egymással, s ugyanúgy az y=konstans egyenesek is. Ezekkel a koordinátákkal az affin leképezéseket a következő képletek fejezik ki :

$$x' = a_{11} x + a_{12} y + a_{13}, \qquad y' = a_{21} x + a_{22} y + a_{23}.$$

Az *affin perspektivitások* kifejezése a következő :

1) ha a perspektivitás tengelye a végtelen távoli egyenes :

általános perspektivitás (homothétikus leképezés) :

$$x' = a_{11} x, \quad y' = a_{11} y ;$$

harmonikus perspektivitás (tükrözés az O $(x = y = 0)$ pontra vonatkozóan) :

$$x' = -x, \quad y' = -y ;$$

speciális perspektivitás (eltolás az x tengely irányában) :

$$x' = x + a_{13}, \quad y' = y ;$$

2) ha a perspektivitás tengelye az x tengely $(y = 0)$:

általános perspektivitás :

$$x' = x, \quad y' = a_{22} y ;$$

harmonikus perspektivitás (tükrözés az x-tengelyre az y-tengely irányában):

$$x' = x, \quad y' = -y;$$

speciális perspektivitás:

$$x' = x + a_{12} y, \quad y' = y.$$

A *nem perspektív, affin leképezéseknek* **32**.3-ban a), b), c), d), e)-vel jelölt típusát pedig sorban a következő képletek állítják elő:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} & x' = a_{11} x, & y' = a_{22} y; \\
\text{b)} & x' = x + a_{13}, & y' = a_{22} y; \\
\text{c)} & x' = a_{11} x + a_{12} y, & y' = a_{11} y; \\
\text{d)} & x' = a_{11} x + a_{12} y, & y' = -a_{12} x + a_{11} y; \\
\text{e)} & x' = x + a_{12} y + a_{13}, & y' = y + a_{23}.
\end{array}$$

Végül *a sík hasonlósági leképezéseinek kifejezése:*

$$x' = a_{11} x + a_{12} y + a_{13}, \quad y' = -a_{12} x + a_{11} y + a_{23},$$

ahol x, y *derékszögű, párhuzamos koordináták,* vagyis az x és az y tengely végtelen távoli pontja egymásnak felel meg az abszolut involuciónál.

43. §. A sík korrelatív és poláris leképezéseinek kifejezése.

A sík önmagára való korrelatív leképezését az (x_1, x_2, x_3) pontkoordináták és az (u_1', u_2', u_3') vonalkoordináták közti homogén lineáris kapcsolatok fejezik ki. Az (x_1, x_2, x_3) pontnak a megadott korrelatív leképezésnél megfelelő egyenes (u_1', u_2', u_3') koordinátáit a

$$\varrho' u_i' = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

egyenletekkel fejezhetjük ki; az egyenletrendszer determinánsa 0-tól különbözik. Ezt az állítást ugyanúgy bizonyíthatjuk be, mint a kollineációk előállítására vonatkozó **41**.1 tételt.

A korrelációk analitikus kifejezését a kollineációknak a 41. §-ban (1), (2), (3), (4)-gyel jelölt kifejezéséből úgy kapjuk meg, hogy az (u_1', u_2', u_3') és (x_1', x_2', x_3') számhármast felcseréljük egymással. Például a korreláció négyzetét a 41. § (1) és (3) képleteinek ebben a sorrendben való alkalmazásából, u_i' és x_i' felcserélésével kapjuk meg a következő alakban:

$$\varrho x_i' = \sum_k A_{ik} a_{k1} x_1 + \sum_k A_{ik} a_{k2} x_2 + \sum_k A_{ik} a_{k3} x_3 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Ugyanennek a kollineációnak másik kifejezése, a 41. § (1) és (4) képleteiből a következő:

$$\varrho\,(a_{1i}x_1'+a_{2i}x_2'+a_{3i}x_3')=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3 \quad (i=1,2,3); \qquad (3)$$

ezeknek az egyenleteknek az x_i' ismeretlenekre vonatkozó megoldása a (2) egyenletrendszer.

Ha a korreláció *a sík polaritása*, vagyis, ha négyzete az azonosság, akkor a (2) és (3) képletek a sík azonos leképezését fejezik ki, tehát a (3) egyenletekben baloldalt x_i' és jobboldalt x_i együtthatója egyenlő egymással:

$$\varrho\, a_{ki}=a_{ik} \quad \text{és} \quad \varrho\, a_{ik}=a_{ki}.$$

Ebből következik, hogy $\varrho^2=1$, tehát $\varrho=\pm 1$. Ha $\varrho=1$, akkor $a_{ik}=a_{ki}$, tehát az $\|a_{ik}\|$ *mátrix szimmetrikus.* Ha $\varrho=-1$ volna, akkor az $\|a_{ik}\|$ mátrix *ferdén szimmetrikus* ($a_{ii}=0$, $a_{ik}=-a_{ki}$), s az $A=|a_{ik}|$ determináns értéke 0 volna, ami ellenmondás. E szerint a sík polaritásának kifejezése:

$$\varrho' u_i'=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3 \quad (i=1,2,3) \quad (a_{ik}=a_{ki}) \qquad (4)$$

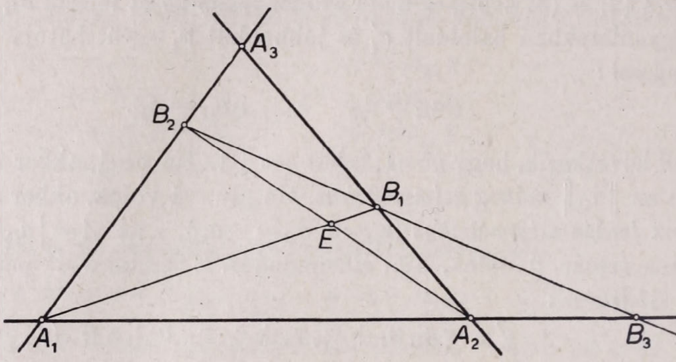
A polaritás kifejezését egyszerűsíthetjük a koordináták alappontjainak alkalmas megválasztásával. Vegyünk fel alapháromszögnek egy poláris háromszöget; a (4) egyenletek bal- és jobboldalán az $(u_1', u_2', u_3')=(x_1, x_2, x_3)=(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ számhármasokat helyettesítve adódik, hogy $a_{ik}=0$, ha $i\neq k$, és $a_{ii}\neq 0$; e szerint *a polaritást egy olyan koordinátarendszerben, amelynek alapháromszöge poláris háromszög, a következő képletek fejezik ki:*

$$u_1'=a_{11}x_1, \quad u_2'=a_{22}x_2, \quad u_3'=a_{33}x_3. \qquad (5)$$

Elliptikus polaritás esetében vegyük fel az E egységpontot úgy, hogy annak az $A_1A_2A_3$ alapháromszögre vonatkozó e polárisa megegyezzék E-nek a megadott elliptikus polaritásnál származó polárisával (l. a **36**.2 tétel bizonyítását). Ebben a koordinátarendszerben az elliptikus polaritás kifejezése:

$$u_1'=x_1, \quad u_2'=x_2, \quad u_3'=x_3. \qquad (6)$$

Hiperbolikus polaritás esetében az alapháromszög két oldalán, például az A_1A_3 és az A_2A_3 oldalon hiperbolikus, a harmadik, A_1A_2 oldalon elliptikus involuciót alkotnak a polaritásnál konjugált pontok (**36**.1). Ebből következik, hogy az (5) képletekben a_{11} és a_{22} előjele megegyező, a_{33} előjele ezzel ellenkező. Legyen B_1 az A_2A_3 oldalon, és B_2 az A_1A_3 oldalon egy-egy önmagához konjugált pont; az A_1B_1 és az A_2B_2 egyenes önmagához konjugált (pólusuk rendre B_1 és B_2); a két egyenes metszéspontja legyen E (63. ábra). Az A_3E egyenesnek az A_1A_2 oldallal való B_3' metszéspontja és a B_1B_2 egyenesnek az A_1A_2 oldallal való B_3 metszéspontja konjugáltak a polaritásnál, s egyben harmonikusan konjugáltak az A_1, A_2 pontokra vonatkozóan (tekintettel



63. ábra.

az $A_3B_1EB_2$ teljes négyszögre). Ha az E pontot vesszük fel a koordináták egységpontjának, s az $A_1A_2A_3$ háromszögre vonatkozó e polárisát egységvonalnak, akkor az (5) egyenletekben: $a_{11}=a_{22}=-a_{33}$; e szerint a *hiperbolikus polaritás kifejezése* a következő:

$$u_1' = x_1, \quad u_2' = x_2, \quad u_3' = -x_3. \tag{7}$$

A hiperbolikus polaritást még egy másik alakban is kifejezzük. Vegyünk fel két önmagához konjugált A_1 és A_3 pontot, s az A_1A_3 egyenes A_2 pólusát az alapháromszög csúcsainak; erre az alapháromszögre vonatkozóan a polaritást az

$$u_1' = a_{13}x_3, \quad u_2' = a_{22}x_2, \quad u_3' = a_{13}x_1$$

képletek fejezik ki. Helyettesítsük ugyanis a (4) egyenlet jobboldalán (x_1, x_2, x_3) helyett az $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ számhármasokat s a baloldalon (u_1', u_2', u_3') helyett rendre a $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ számhármasokat; így kapjuk, hogy

$$a_{11} = a_{21} = a_{12} = a_{32} = a_{23} = a_{33} = 0.$$

Ha még az E egységpontot úgy vesszük fel, hogy a polaritásnál önmagához konjugált pont legyen, akkor, mert polárisának vonalkoordinátái:

$$(u_1', u_2', u_3') = (a_{13}, a_{22}, a_{13}),$$

az egyesített helyzet feltétele szerint:

$$a_{13}.1 + a_{22}.1 + a_{13}.1 = 0,$$

azaz:

$$a_{13} = -\frac{a_{22}}{2}$$

s a *hiperbolikus polaritás kifejezése* ebben a koordinátarendszerben:

$$u_1' = -\frac{1}{2}x_3, \quad u_2' = x_2, \quad u_3' = -\frac{1}{2}x_1. \tag{8}$$

IV. A tér projektív geometriája.

44. §. A projektív tér alkata.

A jelen fejezet tárgyalásának alapjául szolgálnak a **P I, II** és **D** axiómák ; a **44**.1—6 tételekhez a **P I, II** axiómák.

44.1. Tétel. *A projektív teret egy sík nem osztja szét; két sík két részre, három, nem egy egyenesen átmenő sík négy részre, négy olyan sík, melynek nincs közös pontja, nyolc részre osztja fel.*

Bizonyítás. Ha α tetszőleges sík, és P, Q két, α-hoz nem tartozó pont, akkor a PQ egyenesnek egy és csak egy A pontja tartozik az α síkhoz. Az A pontot nem tartalmazó PQ szakasz összeköti a P, Q pontokat, s nincs az α síkkal közös pontja.

Legyen α és β két különböző sík, metszésvonaluk g ; felveszünk egy g-n át nem menő γ síkot ; ennek α-val és β-val való metszésvonala a γ síkot két részre osztja fel (**25**.1) ; ezeknek a szögtartományoknak a g egyenesről való vetülete alkotja azt a két térrészt, melyre az α és a β sík a teret felosztja.

Legyen α, β, γ három, nem egy egyenesen átmenő sík, közös pontjuk O. Felveszünk egy δ síkot, mely nem megy át az O ponton. A δ síkot az α, β, γ síkokkal való a, b, c metszésvonalai négy háromszögtartományra osztják fel (**25**.1). A négy háromszögtartománynak az O pontból való vetülete az a négy térrész, melyre a három megadott sík a teret felosztja.

A δ sík ezek közül a térrészek közül mindegyiket két részre osztja fel; tehát a közös pont nélküli $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ síkok a teret nyolc részre osztják fel.

Értelmezés. Ha A, B, C, D nem egy síkban fekvő pontok, akkor ezek a pontok, az AB, CD, AC, BD, AD, BC egyenesek, s az $\alpha = BCD, \beta = ACD, \gamma = ABD, \delta = ABC$ síkok egy *tetraédert* alkotnak. Az A, B, C, D pontok, a nevezett egyenesek és síkok a *tetraéder csúcsai, élei és lapjai.* Egy csúcsot és egy lapot, illetve két élt *átellenes*nek nevezünk, ha nincs közös pontjuk. Az A csúcs és az α lap átellenes, az AB és CD él átellenes stb.

Értelmezés. Ha $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ négy olyan sík, melynek nincs közös pontja, az ezek által a **44**.1 tétel értelmében meghatározott nyolc térrész közül mindegyiket *tetraédertartomány*nak nevezzük. Egy ilyen *tetraédertartomány határán* értjük az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ síkok ama pontjainak összességét, melyek összeköthetők az illető tartomány valamely pontjával a tartományban fekvő szakasszal.

Az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ síkok közül három-háromnak a metszéspontját jelöljük A, B, C, D-vel, mint fent. Jelöljük τ_0-val a négy sík által meghatározott valamelyik tetraédertartományt. A síkra vonatkozó megfelelő eredmények alapján könnyen bebizonyíthatjuk a következő állításokat.

44.2. *A τ_0 tetraédertartomány határa az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ síkokban az ABCD tetraéder élei által meghatározott egy-egy háromszögtartományból s ennek határából áll* (l. **25**.2).

44.3. *Ha π olyan sík, mely nem megy át az A, B, C, D pontok közül egyiken sem, s ha π-nek van a τ_0 tartományban pontja, akkor τ_0 határával is van közös pontja, és megfordítva* (l. **25**.3).

Legyen π egy olyan sík, mely nem megy át az A, B, C, D pontok közül egyiken sem; π-nek az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ síkokkal való metszésvonalát jelöljük a, b, c, d-vel. Az a, b, c, d egyenesek közül bármely háromnak nincs közös pontja; ha például a, b, c-nek volna közös pontja, ez egybeesnék az α, β, γ síkok D közös pontjával, s feltevésünk szerint D nem tartozik a π síkhoz. Az a és b egyenesek metszéspontja a π síknak az α és β síkok CD metszésvonalával közös pontja stb. Az a, b, c egyenesek a π síkot négy háromszögtartományra osztják fel (**25**.1); a d egyenesnek ezek közül három tartománnyal van közös pontja, s a három tartomány közül mindegyiket egy háromszögtartományra s egy (négy egyenes-szakasz által határolt) *négyszögtartomány*ra osztja fel. *Az a, b, c, d egyenesek e szerint a π síkot négy háromszög- és három négyszögtartományra osztják fel.*

44.4. *Ha P a π síknak olyan pontja, mely az a, b, c, d egyenesek által meghatározott valamelyik négyszögtartományhoz tartozik, akkor a π síknak a tetraéder éleivel való metszéspontjai közül négy tartozik a P-t tartalmazó τ_0 tetraédertartomány határához; az illető négy él közül kettő-kettő átellenes éle a tetraédernek.* Ebben az esetben a π síknak a τ_0 tartomány határához tartozó ABC, ABD, ACD, BCD háromszögtartományok közül néggyel van közös pontja (mindegyikkel egy-egy közös szakasza).

44.5. *Ha P a π síknak olyan pontja, mely az a, b, c, d egyenesek által meghatározott valamelyik háromszögtartományhoz tartozik, akkor a π síknak a tetraéder éleivel való metszéspontjai közül három tartozik a P-t tartalmazó τ_0 tetraédertartomány határához, s a tetraéder illető három éle egy csúcson megy át.* Ebben az esetben a π síknak a τ_0 határához tartozó háromszögtartományok közül hárommal van közös pontja (mindegyikkel egy-egy közös szakasza).

A **44**.1 tétel utolsó állításának a térbeli dualitás elve szerint a következő tétel felel meg:

44.6. Tétel. *Négy, nem egy síkban fekvő A, B, C, D pont a rajtuk át nem menő síkok összességét nyolc osztályra osztja fel. Két sík akkor és csak akkor tartozik ugyanahhoz az osztályhoz, ha az általuk meghatározott két térrész közül ugyanahhoz tartozik a négy megadott pont.*

Legyen A, B, C, D négy, nem egy síkban fekvő pont; jelöljük a BCD, CDA, DAB, ABC síkot rendre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$-val. Ha π tetszőleges olyan sík, mely nem megy át az A, B, C, D pontok közül egyiken sem, akkor *az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ síkok által meghatározott nyolc tetraédertartomány közül π-nek héttel van közös pontja;* ugyanis a π síkot az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ síkokkal való metszésvonalai hét tartományra osztják fel, mint láttuk; ezek közül mindegyik egy-egy, az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ síkok által meghatározott tetraédertartományhoz, s két különböző síktartomány két különböző tetraédertartományhoz tartozik. Jelöljük τ_0-val az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ síkok által meghatározott tetraédertartományok közül azt, mely nem tartalmazza a π sík egy pontját sem; jelöljük τ_0'-val az A, B, C, D pontok által a rajtuk át nem menő síkok összességében meg határozott s a π síkot tartalmazó osztályt, melyet *a síktér egy tartományának* nevezünk. A síktér τ_0', s a ponttér τ_0 tartományát *egymásnak megfelelő tartományok*nak fogjuk nevezni.

Értelmezés. Egy *P pontnak a projektív térre vonatkozó környezetén* értünk minden olyan, a P pontot tartalmazó tetraédertartományt, melyet négy tetszőleges, közös pont nélküli $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sík határoz meg. A P pontot az *M halmaz sűrűsödési pontjá*nak nevezzük, ha P minden környezete tartalmazza az M halmaznak legalább egy, P-től különböző pontját.

A **25**.5 tétel bebizonyításában használt módszer megfelelő alkalmazásával adódik a következő

44.7. Tétel. *A projektív tér kompakt halmaz.*

Értelmezés. Az *α síknak a síktérben való környezetén* értjük a síktérnek az α síkot tartalmazó bármely olyan tartományát, melyet négy, nem egy síkban fekvő pont határoz meg. Az α környezetében fekvő síkok pontjai alkotják az *α síknak a ponttérben való környezetét.*

Értelmezés. Az a egyenesnek a projektív térre vonatkozó környezetét következő módon értelmezzük. Felosztjuk a projektív teret véges sok tetraédertartományra. Azoknak a tetraédertartományoknak az összessége, amelyeknek belsejében vagy határán van az a egyenesnek legalább egy pontja, alkotják az *a egyenesnek a projektív térre vonatkozó környezetét.* Az a' egyenesről akkor mondjuk, hogy az a egyenes megadott környezetéhez tartozik, ha minden pontja ehhez a környezethez tartozik. Hasonlóan értelmezzük egy tetszőleges *zárt ponthalmaznak a projektív térre vonatkozó környezetét.*

A sík folytonossági tételeihez hasonlóan adódnak a projektív tér következő folytonossági tételei.

44.8. *Két ponton átmenő egyenes, két sík metszésvonala, egy sík és egy egyenes metszéspontja, továbbá egy ponton és egy egyenesen átmenő sík folytonosan változik a meghatározó elemek folytonos változásával, amelynek folyamán ezek nem válnak egyesített helyzetűvé.*

Az első állítás részletes jelentése a következő. Ha A és B két különböző pont, akkor az AB egyenes tetszőleges környezetéhez megadható az A és a B pont egy-egy térbeli környezete oly módon, hogy egy-egy ezekhez tartozó tetszőleges A' és B' pontot összekötő $A'B'$ egyenes az AB egyenes megadott környezetéhez tartozik.

44.9. *Nem egy egyenesen fekvő három pont által meghatározott sík, továbbá nem egy egyenesen átmenő három sík metszéspontja, valamint két torz egyenesnek a tér adott pontján átmenő közös tranzverzálisa folytonos módon változik a három meghatározó elem folytonos változásával.*

Be fogjuk bizonyítani a következő tételt :

44.10. Tétel. *A projektív tér irányítható.*[1]

Mielőtt hozzáfognánk a tétel bebizonyításához, a projektív tér alkatát egy, a háromméretű euklidesi térben szerkesztett képpel szemléltetjük. A projektív teret előállíthatjuk mint egy gömb belsejében fekvő pontok összességét, melyekhez hozzávesszük a gömbfelületen fekvő átellenes pontpárokat. Ugyanis az euklidesi tér pontjait leképezhetjük kölcsönösen egyértelmű és folytonos módon az O középpontú és egységsugarú gömb belsejére, olyan módon, hogy minden

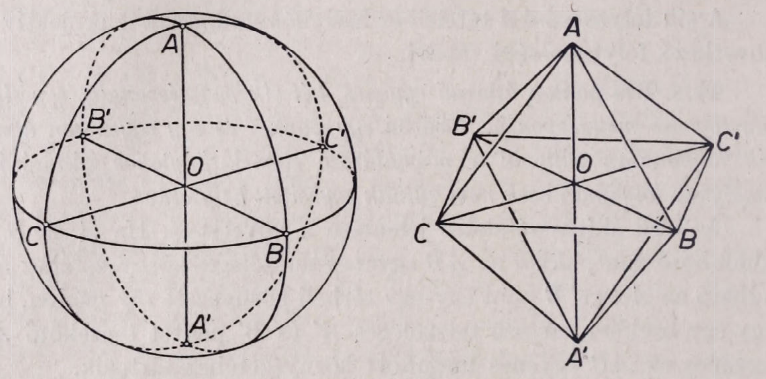
[1] Az értelmezést l. első kötet, 176—183. o.

P pontnak azt az OP félsugáron fekvő P' pontot feleltetjük meg, melyre az $OP = r$ és $OP' = r'$ távolságok között az

$$r = \frac{r'}{1 - r'^2}$$

összefüggés áll fenn. A végtelen távoli sík minden P pontjához rendeljük hozzá az OP egyenesnek a gömbfelülettel való két (átellenes) metszéspontját.

A projektív térnek négy, közös pont nélküli sík által nyolc tartományra való felosztását ezen a képen úgy végezhetjük el, hogy felvesszük a végtelen távoli síknak megfelelő gömbfelületet, s a további három α, β, γ síknak megfelelő síkot mint a gömb középpontján



64. ábra.

átmenő s egymásra páronkint merőleges síkot ; ez utóbbi három sík a gömb belsejét nyolc tartományra osztja fel (64. ábra). Jelöljük A, A', B, B', C, C'-vel a gömbfelületnek azokat a pontjait, melyek a három sík közül kettő-kettőnek metszésvonalához tartoznak. Annak a nyolc tartománynak, melyre a végtelen távoli sík és az α, β, γ síkok a projektív teret felosztják, a gömb belsejének megfelelő felosztásánál a következő gömbnyolcadok felelnek meg :

$$OABC, \quad OAC'B, \quad OAB'C', \quad OACB',$$
$$OA'C'B', \quad OA'B'C, \quad OA'CB, \quad OA'BC'.$$

Ezeket a gömbnyolcadokat mint tetraédereket irányíthatjuk a négy csúcs elrendezésével (l. első kötet, 182. o.). A táblázatban feltüntetett irányítások bármely két gömbnyolcadra, mint a gömb belsejében fekvő tartományokra nézve megegyezők. Például az $OABC$ és $OA'CB$ irányítások megegyezők, mivel a két tartomány közös határlapjának irányítása: OBC és OCB egymással ellenkező, s az A és az A' csúcs ennek a lapnak különböző oldalán fekszik. (Az $OABC$ tetraédertartomány csúcsainak $OABC$ elrendezése a tetraédertartományt határoló háromszögtartományok következő irányítását határozza meg: OAB, OBC, OCA, CBA; l. első kötet, 1ʿ2. o.)

Tekintsünk most két olyan tartományt, melyek a gömb belsejében nem, de a projektív térben szomszédosak. Ilyen például az $OABC$ és az $OA'C'B'$ tartomány; mivel ezeknek közös határlapja a két elrendezésnek megfelelően: CBA és $B'C'A'$ ellenkező irányítással fordul elő, tehát a két tartománynak megadott irányítása, mint a projektív térben szomszédos tartományoké is megegyező. Hasonlóan a további három párra vonatkozóan; ezeket, a végtelen távoli sík mentén egymással határos tartományokat a fenti táblázatban egymás alá írtuk.

Ebben a meggondolásban bennefoglaltatnak azok a kombinatórius elemek, melyekkel a **44**.10 tételt a szemléletre való hivatkozás nélkül, formálisan is bebizonyíthatjuk.

Lényegében ugyanazzal a módszerrel igazoltuk, hogy a projektív sík nem irányítható, s hogy a projektív tér irányítható. Az eredmény különböző voltának oka szemléletesen kifejezve a következő. Ha a körön egy pont egy irányban mozog, az átellenes pont a körön ugyanabban az irányban mozog. Ha ellenben a gömbfelületen egy pont egy irányított kis kört ír le, az átellenes pont által leírt kis kör a gömbfelületen az ellenkező irányítást határozza meg; ha a két irányított kört a gömb félforgásával egymással fedésbe hozzuk, ezek irányításának az egymást fedő körök két ellenkező irányítása felel meg.

45. §. A tér projektív leképezései.

A harmadfajú elemi alakzatok közti projektív vonatkozásokat hasonló módon értelmezzük, mint a másodfajú alakzatokét (39. §).

Értelmezés. *Két harmadfajú elemi alakzat közti projektív vonatkozáson* a két alakzat elemeinek olyan kölcsönösen egyértelmű megfelelését értjük, melynél a két harmadfajú alakzatban foglalt másodfajú elemi alakzatok egymásnak felelnek meg.

Ezt az értelmezést sorban arra az esetre alkalmazzuk, ha a két harmadfajú alakzat a ponttér, vagy a síktér, illetve ha az egyik a a pont- s a másik a síktér; ilyen módon a tér kollineáris, illetve korrelatív leképezéseinek következő értelmezéséhez jutunk.

Értelmezés. *A tér (önmagára való) kollineáris leképezése* a ponttérnek olyan kölcsönösen egyértelmű leképezése önmagára, melynél minden síknak sík, azaz egy síkban fekvő pontok összességének egy síkban fekvő pontok összessége felel meg. A dualitás elvének megfelelő, szimmetrikus alakban így is megfogalmazhatjuk: a tér kollineáris leképezése olyan előírás, mely minden A pontnak egy A' pontot, minden α síknak egy α' síkot feleltet meg kölcsönösen egyértelműen s oly módon, hogy egyesített helyzetű A pontnak és α síknak egyesített helyzetű A' pont és α' sík felel meg.

Értelmezés. *A tér (önmagára való) korrelatív leképezése* olyan előírás, mely minden A pontnak egy α' síkot s minden α síknak egy A' pontot feleltet meg kölcsönösen egyértelműen s oly módon, hogy egyesített helyzetű A pontnak és α síknak egyesített helyzetű α' sík és A' pont felel meg.

A tér bármely kollineáris leképezésénél minden a egyenesnek egy a' egyenes felel meg abban az értelemben, hogy az a egyenes pontjai s az a' egyenes pontjai a megadott kollineációnál kölcsönösen egyértelmű módon egymásnak felelnek meg. Ugyanis az a egyenesen átfektetett két tetszőleges α és β síknak a leképezésnél két egymástól különböző α' és β' sík felel meg; ezeknek a' metszésvonala az *a egyenesnek a kollineációnál származó képe.*

A korrelációnál ugyancsak minden a egyenesnek egy a' egyenes felel meg, de abban az értelemben, hogy minden, az a egyenesen fekvő A pontnak egy, az a' egyenesen átmenő α' sík felel meg. Az a' egyenest *az a egyenesnek a korrelációnál származó képének* fogjuk nevezni.

A tér kollineáris leképezései.

Foglalkozzunk előbb a kollineációkkal; ezeket mint a ponttér önmagára való leképezéseit jellemzi az a tulajdonságuk, hogy minden egyenest egyenesbe visznek át.

45.1. Tétel. *A térnek bármely olyan kölcsönösen egyértelmű leképezése önmagára, melynél minden egyenesnek egyenes felel meg, egy kollineáció.*

Bizonyítás. A tétel bebizonyítására azt kell megmutatnunk, hogy a leképezésnél minden síknak sík felel meg. Legyen α egy tetszőleges sík, a és b az α síkban fekvő két egyenes, a' és b' az ezeknek a megadott **T** leképezésnél megfelelő egyenesek; a' és b' egy α' síkban feküsznek, mivel közös pontjuk a és b metszéspontjának képe. Az α sík tetszőleges P pontján átfektetünk egy p egyenest, mely a-t és b-t két különböző A és B pontban metszi; ennek a két pontnak képe az a' és a b' egyenes két különböző A' és B' pontja, s a P pontnak egy, az $A'B'$ egyenesen, s ezért az α' síkban fekvő P' képpont felelmeg. Tehát az α sík minden P pontjának P' képe az α' síkhoz tartozik. Mivel **T** feltevésünk szerint kölcsönösen egyértelmű, hasonló meggondolást alkalmazva **T** inverzére, adódik, hogy ennél az α' sík minden pontjának az α sík valamely pontja felel meg. E szerint a **T** leképezés a tér kollineációja.

A **45**.1 tétel általánosítása a következő, melyet *a tér projektív leképezéseire vonatkozó alaptétel*nek szokás nevezni:

45.2. Tétel. *Ha a tér önmagára való* **T** *egyértelmű leképezésénél bármely két különböző pontnak két különböző pont, bármely három, egy egyenesen fekvő pontnak három, egy egyenesen fekvő pont felel meg, s ha van legalább három olyan (nem egy egyenesen fekvő) pont, melynek képe nem fekszik egy egyenesen, akkor a leképezés a térnek önmagára való (kölcsönösen egyértelmű) kollineáris leképezése.*

Bizonyítás. Legyen A, B, C három olyan pont, melynek képe: A', B', C' nem tartozik egy egyeneshez; feltételeink folytán ekkor az A, B, C pont sem tartozik egy egyeneshez. Jelöljük α-val az ABC, α'-vel az $A'B'C'$ síkot. Az AB egyenes bármely pontjának képe az $A'B'$ egyeneshez s AC bármely pontjának képe az $A'C'$ egyeneshez tartozik. Ha P az α sík tetszőleges pontja, jelöljük Q-val a BP és AC egyenesek metszéspontját; Q képe, Q' az $A'C'$ egyeneshez s P képe, P' a $B'Q'$ egyeneshez, s ezért az α' síkhoz tartozik. E szerint az α sík minden P pontjának megfelel az α' síkban egy és csak egy P' pont, α két különböző pontjának képe két különböző pont, három egy egyenesen fekvő pontjának képe egy egyenesen fekszik, s van az α síkban három olyan pont: A, B, C, melynek képe nem fekszik egy egyenesen. A α síknak az α' síkra való leképezése, melyet **T** létesít, kielégíti tehát a **26**.4 tétel feltételeit; ebből következik, hogy **T** az α és az α' síkok között kölcsönösen egyértelmű kollineációt létesít.

Legyen D a térnek olyan pontja, mely nem tartozik az α síkhoz; D képe, D' nem tartozik az α' síkhoz; ugyanis előbbi eredményünk szerint α' minden P' pontja α valamely P pontjának a képe s mivel P és D különbözők, tehát D' is különbözik P'-től.

Ha β tetszőleges, α-tól különböző sík, ennek az α síkkal való metszésvonalán felveszünk két A és B pontot; legyen továbbá

D a β sík olyan pontja, mely nem tartozik az AB egyeneshez. Az A, B, D pont képe, A', B', D' nem fekszik egy egyenesen, ugyanis $A'B'$ az α' síkban fekszik, de D' nem. Az előbbi, az α síkra vonatkozó meggondolást alkalmazhatjuk tehát a β síkra, A, B, C helyett az A, B, D pontármast véve alapul. Ilyen módon arra az eredményre jutunk, hogy a β síknak megfelel egy meghatározott β' sík; β és β' között **T** kölcsönösen egyértelmű, kollineáris vonatkozást létesít, s a β-hoz nem tartozó pontok képe nem tartozik β'-höz.

A tér bármely P' pontja valamely P pontnak **T**-nél származó képe. Legyen ugyanis D' a β' sík olyan pontja, mely nem tartozik α'-höz. A $P'D'$ egyenesnek α'-vel közös pontját jelöljük A'-vel s α'-nek egy, ehhez az egyeneshez nem tartozó pontját B'-vel. Az A, B, D pontok, melyeknek **T**-nél az A', B', D' pontok felelnek meg, nem feküsznek egy egyenesen, tehát egy γ síkot határoznak meg; a γ síknak **T**-nél a $\gamma' = A'B'D'$ sík felel meg, mely tartalmazza az $A'D'$ egyenest, s ezért a P' pontot is. A γ és γ' síkok között **T** kölcsönösen egyértelmű vonatkozást létesít, tehát a P' pont a **T** leképezésnél egy (és csak egy) a γ síkban fekvő P pontnak felel meg.

Ezzel igazoltuk, hogy **T** a térnek önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése, mely minden síknak síkot feleltet meg. A fenti értelmezések szerint tehát **T** a tér kollineáris leképezése.

45.3. Tétel. *Ha a tér önmagára való egyértelmű leképezésénél bármely két különböző pontnak két különböző pont, s bármely négy, egy síkban fekvő pontnak négy, egy síkban fekvő pont felel meg, továbbá, ha van négy olyan (nem egy síkban fekvő) pont, melynek képe nem fekszik egy síkban, akkor a leképezés a térnek önmagára való (kölcsönösen egyértelmű) kollineáris leképezése.*

Bizonyítás. Ezt a tételt a megelőzőre vezetjük vissza, amennyiben megmutatjuk, hogy bármely három, egy egyenesen fekvő P, Q, R pont képe : P', Q', R' szintén egy egyeneshez tartozik. Legyen ugyanis A, B, C, D négy olyan, nem egy síkhoz tartozó pont, melynek A', B', C', D' képe nem tartozik egy síkhoz ; ilyen pontnégyes feltevésünk szerint létezik. Ha a P', Q', R' pontok nem feküsznek egy egyenesen, akkor meghatároznak egy $P'Q'R'$ síkot ; az A', B', C', D' pontok közül legalább az egyik, például D', nem tartozik a $P'Q'R'$ síkhoz. Mivel a P, Q, R pontok egy egyeneshez, ezért a P, Q, R, D pontok egy síkhoz tartoznak, s a leképezésnél megfelelő P', Q', R', D' pontok nem tartoznak egy síkhoz, feltevésünkkel ellentétben.

45.4. Tétel. *A tér kollineáris leképezése minden másodfajú és elsőfajú elemi alakzatnak egy ugyanolyan nevű elemi alakzatot feleltet meg, s ezek között projektív vonatkozást létesít.*

Bizonyítás. A tér kollineáris leképezésénél egy tetszőleges α sík pontjainak egy α' sík pontjai, s az α síkban fekvő egyeneseknek az α' síkban fekvő egyenesek felelnek meg kölcsönösen egyértelmű módon; ebből a **26**.5 tétel szerint következik, hogy az α és α' síkok közti vonatkozás projektív (kollineáris), s ugyancsak, hogy az α és az α' sík egymásnak megfelelő egyenesei, valamint egymásnak megfelelő sugársorai között projektív vonatkozást létesít a tér kollineációja. (**26**.1). Ebből a projektív alapműveletek alkalmazásával következik továbbá, hogy a tér kollineáris leképezésénél minden sík- és sugárnyalábnak sík- és sugárnyaláb felel meg, s hogy két megfelelő nyaláb közti vonatkozás projektív, nevezetesen kollineáris; az egymásnak megfelelő nyalábokban foglalt sík-, illetve sugársorok ugyancsak projektív leképezéssel felelnek meg egymásnak a tér kollineációjánál.

Értelmezés. A tér öt pontjáról akkor mondjuk, hogy *általános helyzetű,* ha közülök bármely négy nem fekszik egy síkban. Öt síkot általános helyzetűnek nevezünk, ha közülök bármely négynek nincs közös pontja.

45.5. Tétel. *Ha a tér kollineáris leképezésénél öt általános helyzetű fixpont van, akkor a leképezés az azonosság, vagyis a tér minden pontja önmagának felel meg.*

Bizonyítás. Legyen A, B, C, D, E a megadott **T** kollineáris leképezésnek öt olyan fixpontja, mely közül bármely négy nem fekszik egy síkban. Az öt pont közül bármely kettőt összekötő egyenes, s bármely hármon átmenő sík invariáns. Ezért a DE invariáns egyenesnek az ABC invariáns síkkal való F metszéspontja, s a CE invariáns egyenesnek az ABD invariáns síkkal való G metszéspontja fixpontok. Mivel az ABC síkban A, B, C, F, s az ABD síkban A, B, D, G általános helyzetű pontnégyesek, melyeknek elemei fixpontok, **T** ezekben a síkokban az azonos leképezést származtatja. Ebből következik, hogy minden (az AB egyenest nem metsző) egyenes invariáns, mivel az egyenesnek az ABC és az ABD síkkal való metszéspontjai fixpontok. A tér bármely pontján, mely nem tartozik sem az ABC, sem az ABD síkhoz, átfektetünk két olyan egyenest, melyek nem metszik AB-t; ezeknek invarianciájából következik, hogy P fixpont, s így **T** a térben az azonos leképzés.

A fenti bizonyítás során levezettük a következő tételt is :

45.6. Tétel. *Ha a tér* **T** *kollineáris leképezésénél két különböző sík minden pontja fixpont, akkor* **T** *a tér azonos leképezése.*

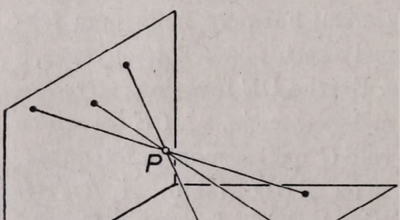
Ebből és a **26**.6 tételből következik, hogy *ha a tér* **T** *kollineáris leképezése három, egy ponton átmenő, de nem egy síkhoz tartozó egyenes közül mindegyiken az azonos leképezést származtatja, akkor* **T** *a tér azonos leképezése.*

A fenti tételeknek a térbeli dualitás elve szerint a következő tétel felel meg :

45.7. Tétel. *Ha a tér kollineáris leképezésénél öt olyan invariáns sík van, melyek közül bármely négynek nincs közös pontja, vagy ha két különböző síknyaláb minden eleme invariáns, vagy ha három olyan síksornak minden eleme invariáns, melyeknek tengelye egy síkban fekszik, de nem megy át egy ponton, akkor a leképezés az azonosság.*

45.8. Tétel. *Legyen α és β két különböző sík, metszésvonalukat jelöljük c-vel; legyen α' és β' két különböző sík, metszésvonalukat jelöljük c'-vel. Ha megadjuk α-nak α'-re, s β-nak β'-re egy-egy olyan kollineáris leképezését, melyek a c egyenes pontjaiban megegyeznek egymással, akkor létezik a térnek egy és csak egy olyan kollineáris leképezése, mely az α és β síkokban a megadott leképezésekkel megegyezik.*

Bizonyítás. A tér bármely olyan P pontja, mely nem tartozik sem az α, sem a β síkhoz, mint középpont meghatároz egy perspektív vonatkozást az α és β síkok között (65. ábra). Az α síknak α'-re, s β-nak β'-re való, megadott leképezésével átvisszük ezt a perspektív vonatkozást az α', β' síkokra ; mivel a két megadott leképezés megegyezik a c egyenesen, s a perspektivitásnál c pontjai fixpontok, ebből következik, hogy az α' és β' síkok között ilyen módon létesített projektív leképezésnél a c' egyenes pontjai fixpontok, a **26**.2 tétel szerint tehát ez egy perspektív vonatkozás az α' és β' síkok között. Ennek P' középpontját feleltetjük meg a P pontnak, mint az értelmezendő **T** leképezésnél származó képét. Két különböző P és Q pontnak ilyen módon két különböző P' és Q' pont felel meg. Bármely három, egy egyenesen fekvő



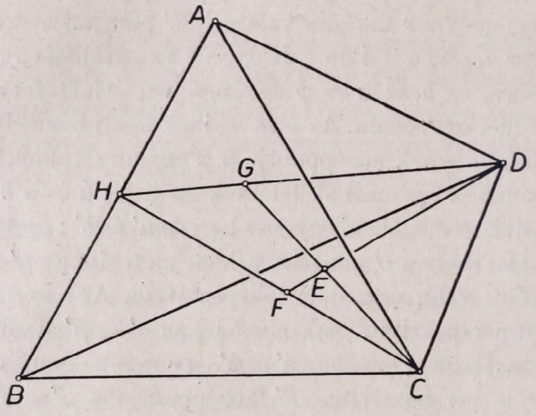
65. ábra.

pontnak három, egy egyenesen fekvő pont felel meg; ezt következőképpen igazoljuk. Legyen először p olyan egyenes, melynek nincs c-vel közös pontja; p-nek az α és a β síkkal közös pontja legyen A és B, az ezeknek az α' és a β' síkban megfelelő pontok A' és B'. A p egyenes tetszőleges P pontjának **T**-nél származó képe legyen P'; mivel a P' középpontú perspektív vonatkozás az α' és β' síkok között az A' és B' pontot egymásnak felelteti meg, tehát P' az $A'B'=p'$ egyenesen fekszik. Ha Q olyan pont, mely nem tartozik a p egyeneshez, akkor Q képe, Q' nem tartozik a p' egyeneshez. — Legyen másodszor p olyan egyenes, mely a c egyenes valamely C pontján megy át, de nem tartozik sem az α, sem a β síkhoz. Legyen a az α síkban egy, a C ponton átmenő egyenes, és b az a és p egyeneseken átfektetett γ síknak a β síkkal való metszésvonala. Az α és β síkok közti bármely perspektív vonatkozásnál, melynek középpontja a p egyenes valamely P pontja, az a és b egyenesek egymásnak felelnek meg. Az a és a b egyenesnek az α' és a β' síkban megfelelő egyenes legyen a' és b'; ezeknek van egy közös C' pontja, mely a C pontnak a képe az α síknak α'-re, s ugyancsak β-nak β'-re való, megadott leképezésénél. Az α és β síkok közti, P középpontú perspektivitásnak megfelel az α' és β' síkok között egy perspektív vonatkozás; ennél az a' és b' egyenesek egymásnak felelnek meg, s ezért a perspektivitás P' középpontja a $\gamma'=(a', b')$ síkban fekszik. Ha P és Q a p egyenes két tetszőleges, C-től különböző pontja, ezeknek **T**-nél származó P' és Q' képe különbözik C'-től, s a $P'Q'$ egyenes átmegy a C' ponton. Az ellenkezőt téve fel, a γ' síkban fekvő $P'Q'$ egyenes metszené a'-t és b'-t két, C'-től különböző A' és B' pontban; ezeknek a pontoknak az a és a b egyenesen a C-től különböző A és B pont felel meg. Mint már előbb megállapítottuk, a **T** leképezésnél az AB egyenes pontjai, és csakis ezek mennek át az $A'B'$ egyenesen fekvő pontokba. Viszont P és Q nem tartozhatnak mindketten az AB egyeneshez, mivel feltevésünk szerint a PQ egyenes átmegy a C ponton, s ezért nem megy át sem az A, sem a B ponton. Ebből következik, hogy a C ponton átmenő p egyenesnek **T**-nél egy, a C' ponton átmenő p' egyenes felel meg. A **45.2** tétel feltételei teljesülnek, s ebből következik, hogy a fenti előírással értelmezett **T** leképezés a tér kollineációja. A **45.6** tétel folytán a **T** kollineációt egyértelműen meghatározzák az α és a β síkokban előírt projektív leképezések.

A duális tétel megfogalmazását, mint a továbbiakban gyakran, az olvasóra bízzuk.

45.9. Tétel. *Ha A, B, C, D, E és A', B', C', D', E' két általános helyzetű pontötös, akkor van a térnek egy és csak egy olyan kollineációja, mely az A, B, C, D, E pontnak rendre az A', B', C', D', E' pontot felelteti meg.*

Bizonyítás. (66. ábra). Jelöljük F-fel a DE egyenes és az ABC sík metszéspontját, G-vel a CE egyenes és az ABD sík metszéspontját, továbbá H-val az AB egyenes és a CDE sík metszéspontját; H az egy síkban fekvő CF és DG egyenesek



66. ábra.

metszéspontja. Legyenek F', G', H' a másik pontötös által hasonlóan meghatározott pontok. Az ABC síknak az $A'B'C'$ síkra, s az ABD síknak az $A'B'D'$ síkra való kollineáris leképezését egyértelműen meghatározzák az egymásnak megfelelő következő, általános helyzetű pontnégyesek:

$$(A, B, C, F) \to (A', B', C', F') \quad \text{és} \quad (A, B, D, G) \to (A', B', D', G').$$

Mindkét leképezésnél a H pontnak a H' képpont felel meg; a két sík kollineáris leképezése az AB egyenesen megegyezik egymással. A **45**.8 tétel folytán létezik tehát a térnek egy olyan **T** kollineáris leképezése, mely az ABC és ABD síkok fent meghatározott leképezésével megegyezik; **T**-nél az A, B, C, D, F, G, H pontnak az ugyanolyan nevű pont felel meg, azaz A-nak A', stb. Az E pontnak, mint a DF és CG egyenesek metszéspontjának képe a $D'F'$ és $C'G'$ egyenesek E' metszéspontja. — A **45**.5 tétel folytán a **T** leképezést a két megadott pontötös egyértelműen meghatározza.

A **45**.9 tételből könnyen levezethető a következő:

T é t e l. *A tér kollineációját egyértelműen meghatározzák a következő adatok:*

45.10. *Három egy ponton átmenő, de nem egy síkban fekvő egyenesnek három ugyanilyen helyzetű egyenesre való projektív leképezése,* melyek közül mindegyiknél a három egyenes közös pontjának a másik három egyenes közös pontja felel meg.

45.11. *Egy α síknak egy α' síkra való tetszőleges kollineáris leképezése, s két, α-hoz nem tartozó B és C pontnak képe, B' és C',* melyek nem tartoznak α'-höz, s melyeket összekötő $B'C'$ egyenesnek α'-vel közös pontja a BC egyenes és α metszéspontjának képe α-nak α'-re való leképezésénél.

45.12. *Két torz a és b egyenesnek két torz a' és b' egyenesre való tetszőleges projektív leképezése, s egy, sem a-hoz, sem b-hez nem tartozó E pontnak a képe, E'*; E-n átmegy egy és csak egy olyan egyenes, melynek van a-val egy A, b-vel egy B közös pontja; az ezeknek a'-n és b'-n megfelelő pontok legyenek A' és B'; az E' pontot az $A'B'$ egyenesen tetszőlegesen vehetjük fel, de úgy, hogy A'-től és B'-től különbözzék.

46. §. A tér perspektív leképezései.

É r t e l m e z é s. *A tér perspektív (vagy homolog) leképezésén* olyan kollineációt értünk, mely eleget tesz a következő feltételeknek:

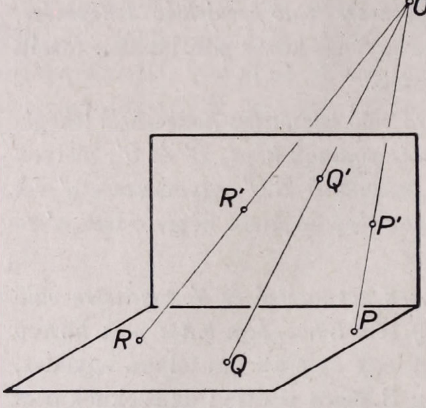
a leképezés *perspektív egy O középpontra vonatkozóan,* azaz bármely P pontot képével, P'-vel összekötő PP' egyenes átmegy az O ponton;

a leképezés *perspektív egy ε síkra vonatkozóan,* azaz bármely α síknak képével, α'-vel való metszésvonala az ε síkhoz tartozik.

A két feltétel közül mindegyik következik a másikból:

46.1. T é t e l. *Ha a tér valamely kollineációja az ε síkban az azonos leképezést származtatja, vagy ha egy nyaláb minden elemét önmagának felelteti meg, akkor a kollineáció perspektív.*

B i z o n y í t á s. Elegendő a tétel első állítását bebizonyítani; a második ebből a dualitás elve szerint következik. — Tegyük fel, hogy a **T** kollineációnál az ε sík minden pontja fixpont. Legyen α egy tetszőleges sík, és α' ennek a képe. Az α és ε síkok g metszésvonala **T**-nél invariáns, s ezért az α' síkhoz is hozzátartozik. Akár egybeesik egymással α és α', akár különbözők, **T** az α síknak az α' síkra való perspektív leképezését származtatja, mivel a g egyenes minden pontja fixpont (**26**.2 és **27**.1). Legyen P, Q, R az α sík három, nem egy egyenesen fekvő pontja, s P', Q', R' ezeknek a képe; a PP', QQ', RR' egyenesek egy O ponton mennek át (67. ábra). A P, Q, R pontok között van legalább kettő, például P és Q, mely nem fekszik ugyanazon az O ponton átmenő egyenesen. Az O pontot tehát a PP' és QQ' egyenesek egyértelműen meghatározzák. Ha R a tér tetszőleges pontja, mely nem fekszik a PQ egyenesen, akkor a PQR és $P'Q'R'$ síkok közti vonatkozás perspektív, s a perspektivitás középpontja a PP' és QQ' egyenesek O metszéspontja. Ebből következik, hogy bármely R pontot képével, R'-vel összekötő RR' egyenes átmegy az O ponton, tehát hogy a tér megadott leképezése perspektív az O középpontra vonatkozóan.



67. ábra.

Megjegyzés. A **26**.6 tétel folytán a tér perspektív leképezéseinek jellemzésére elegendő feltenni azt, hogy *egy síkban négy általános helyzetű fixpontja, vagy invariáns egyenese van, vagy hogy egy ponton át négy invariáns sík vagy egyenes megy át, melyek közül bármely három nem tartozik egy sík-, illetve egy sugársorhoz.*

Értelmezés. A tér perspektív leképezését *speciális* vagy *általános perspektivitás*nak nevezzük a szerint, hogy a perspektivitás középpontja a perspektivitás síkjához tartozik, vagy nem.

46.2. Tétel. *A tér perspektív leképezését egyértelműen meghatározza a perspektivitás ε síkja és O középpontja, továbbá egy tetszőleges, O-tól és ε pontjaitól különböző A, A' megfelelő pontpár, mely egy, az O ponton átmenő egyenesen fekszik.*

Az A, A' pontpár helyett felvehetünk két tetszőleges, ε-tól különböző, s az O ponton át nem menő α és α' síkot, melyek egymást egy, az ε síkhoz tartozó egyenesben metszik; vagy két a és a' egyenest, melyek nem tartoznak az ε síkhoz, s nem mennek át az O ponton, és amelyek egy, az ε síkhoz tartozó pontban metszik egymást, s a rajtuk átfektetett sík átmegy az O ponton.

B i z o n y í t á s. Ha az O pont nem fekszik az ε síkban (általános perspektivitás), akkor az OA egyenesnek ε-nal közös pontját jelöljük P-vel. Az OP egyenesnek az O, P fixpontokkal bíró hiperbolikus leképezése, melynél az A pont A'-be megy át, s az ε sík azonos leképezése a **45**.11 tétel folytán egyértelműen meghatározza a térnek egy kollineációját, s ez a **46**.1 tétel szerint egy perspektivitás. — Ha az O pont az ε síkban fekszik (speciális perspektivitás), akkor az OA egyenesnek az O fixponttal bíró parabolikus leképezése, melynél az A pont A'-be megy át, s az ε sík azonos leképezése meghatározza a térnek egy kollineációját, mely perspektív.

Ebből a tételből következik, hogy *két különböző sík közti perspektív vonatkozás mindig megvalósítható a tér önmagára való perspektív leképezésével.* Ha ugyanis az α és α' síkok között adva van egy perspektív vonatkozás, melynek középpontja O, a két sík g metszésvonalán átfektetünk egy tetszőleges, α-tól és α'-től különböző ε síkot ; a térnek az O középpontra s az ε síkra vonatkozó perspektív leképezése, mely α-t α'-be viszi át, megegyezik az α síkban ennek az O középpontból az α' síkra való vetítésével.

46.3. T é t e l. *A tér minden kollineációja előállítható perspektív leképezések szorzataként.*

B i z o n y í t á s. Legyen A, B, C, D, E egy általános helyzetű pontötös, és A', B', C', D', E' a megadott $\mathbf{T}$ kollineációnál származó képe. Jelöljük a DE egyenes és az ABC sík metszéspontját F-fel, a $D'E'$ egyenes és az $A'B'C'$ sík metszés pontját F'-vel. A **26**.3 tétel szerint átvihetjük az ABC síkot az $A'B'C'$ síkba, síkok közti perspektív leképezések szorzatával úgy, hogy az A, B, C, F pontnak A', B', C', F' feleljen meg. Mivel a síkok közti perspektív vonatkozások fenti megjegyzésünk értelmében kiegészíthetők a tér perspektív leképezéseivé, tehát a tér bizonyos perspektív leképezéseiből alkotott $\mathbf{T}_1$ szorzattal átvihetjük az A, B, C, F pontokat az A', B', C', F' pontokba. A $\mathbf{T}_1$ leképezésnél D-nek és E-nek olyan D_1 és E_1 pont felel meg, hogy az A', B', C', D_1, E_1 pontötös általános helyzetű, és D_1, E_1, F' egy egyenesen fekszik; feltehetjük, hogy D_1E_1 különbözik a $D'E'$ egyenestől. A térnek az a $\mathbf{T}_2$ perspektív leképezése, melynek síkja $A'B'C'$, középpontja a D_1D' és E_1E' egyenesek metszéspontja, s mely a D_1 pontot D'-be viszi át, az E_1 pontnak az E' pontot felelteti meg. Mivel $\mathbf{T}_1$ perspektív leképezések szorzata, $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ is az ; s mert $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$-nél, ugyanúgy mint $\mathbf{T}$-nél az A, B, C, D, E pontnak A', B', C', D', E' felel meg, a **45**.9 tétel szerint a két leképezés azonos egymással : $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2=\mathbf{T}$.

46.4. Ha a P pont nem tartozik az $ABCD$ tetraéder egyik lapjához sem, jelöljük A_1, B_1, C_1, D_1-gyel a P pontnak az A, B, C, D csúcsból az átellenes lapra való vetületét. A térnek az a projektív leképezése, mely az A, B, C, D, P pontnak az A_1, B_1, C_1, D_1, P pontot felelteti meg, a **46**.1 tétel szerint perspektív a P középpontra vonatkozóan; a perspektivitás π síkját a *P pontnak az $ABCD$ tetraéderre vonatkozó polársíkjá*nak nevezzük. π-nek az ABC síkkal való metszésvonala a P pont D_1 vetületének az ABC háromszögre vonatkozó polárisa, stb. — Duálisan: minden síknak, mely nem megy át az A, B, C, D ponton, megfelel egy és csak egy P pont, melynek polársíkja π; P-t a *π sík pólusá*nak nevezzük.

Ha a tér **T** *kollineációjánál az $ABCD$ tetraéder az $A'B'C'D'$ tetraéderbe, s a P pont a P' pontba, akkor P-nek $ABCD$-re vonatkozó π polársíkja P'-nek $A'B'C'D'$-re vonatkozó π' polársíkjába megy át.*

A tétel bizonyítása a síkra vonatkozó **26**.8 tételből következik; ezt a tételt hasonlóan felhasználhatjuk a leképezésekre vonatkozó tételek dualizálására, mint a **26**.8 tételt a sík esetében.

A **30**.8 tételnek a térben a következő felel meg, hasonló bizonyítással:

46.5. Tétel. *A térnek azok a speciális perspektivitásai, melyeknek perspektivitási síkja ugyanaz az α sík, kommutatív, s az α síkon kívül egyszeresen tranzitív csoportot alkotnak.*

47. §. A tér tengelyes kollineációi.

Értelmezés. A tér valamely nem perspektív kollineációjának *ponttengelyén,* illetve *síktengelyén* olyan (invariáns) egyenest értünk, melynek összes pontjai fixpontok, illetve amelyen átmenő összes síkok invariánsak. Olyan egyenest, mely pont- és síktengely, vagyis melynek összes pontjai fixpontok, s a rajta átmenő síkok valamennyien invariánsak, a kollineáció *kettőstengelyé*nek nevezünk.

A tér nem perspektív kollineációját *tengelyes*nek (*axiális*nak) nevezzük, ha van pont-, vagy síktengelye; *kettőstengelyű*nek (*biaxiális*nak) ha van kettőstengelye.

Ha a tér valamely **T** kollineációjánál két egymást metsző egyenes minden pontja fixpont, akkor a rajtuk átfektetett síkban a leképezés az azonosság, s **T** a tér perspektív leképezése (**26**.6 és **46**.1). E szerint:

47.1. *A tér nem perspektív kollineációjának bármely két ponttengelye egymáshoz torz helyzetű.* Ebből a dualitás elve szerint következik, hogy *bármely két síktengelye is egymáshoz torz helyzetű.*

47.2. *A tér bármely, nem perspektív kollineációjának legfeljebb két tengelye van.*

Bizonyítás. Ha az egymáshoz torz a és b egyenesek valamennyi pontja fixpont, s azonkívül van még egy fixpont, akkor a leképezés a térben az azonosság a **45**.12 tétel szerint. Ezért a *kollineációnak nem lehet három különböző ponttengelye* s a dualitás folytán nem lehet három különböző síktengelye sem. (Itt is, mint a további meggondolás során, kizárjuk a perspektivitásokat.) *Ha a és b a kollineáció két ponttengelye, akkor ezek síktengelyek is;* ugyanis minden, az a egyenesen átfektetett α sík tartalmazza b-nek egy pontját s mivel ez fixpont, az α sík invariáns; hasonlóan, minden, a b egyenesen átmenő sík invariáns. Megfordítva, ha a kollineációnak két síktengelye van, ezek egyben ponttengelyek is, azaz kettőstengelyek. Ebből következik továbbá, hogy egy kollineációnak nem lehet kettőnél több tengelye, különben mindhárom kettőstengely volna s a leképezés a tér azonos leképezése.

47.3. *Ha a tér valamely nem perspektív kollineációjának van ponttengelye, akkor van síktengelye is és megfordítva.*

Bizonyítás. Legyen a a **T** kollineáció ponttengelye. Az a-n átmenő síksort **T** önmagába viszi át s ebben a síksorban projektív leképezést származtat; ha ez az azonosság, akkor a síktengely. Ha a síksor leképezése nem az azonosság, akkor legfeljebb két invariáns eleme van, tehát az a egyenesen **T**-nek legfeljebb két invariáns síkja megy át. Legyen A egy olyan pont, mely nem tartozik sem a-hoz, sem egy, a-n átmenő invariáns síkhoz. Jelöljük A'-vel és A''-vel A-nak a **T** leképezésénél s ennek négyzeténél származó képét. Az AA' egyenes nem metszi a-t, különben az a egyenesen s az A ponton átmenő sík **T**-nél invariáns volna, az A pont megválasztásával ellenkezően; hasonlóan az $A'A''$ egyenes sem metszi a-t. Ha az A'' pont az AA' egyenesen fekszik, akkor a $b = AA'$ egyenes invariáns **T**-nél; minden, b-n átfektetett sík tartalmazza a-nak egy pontját s ezért invariáns a **T** leképezésnél, vagyis b síktengely. Ha azonban az A, A', A'' pontok nem feküsznek egy egyenesen, akkor az $\alpha = AA'A''$ sík invariáns; ennek a síknak a-val közös P pontja ugyanis fixpont, ez nem tartozik sem az AA', sem az $A'A''$ egyeneshez, s az $\alpha = PAA'$ sík **T**-nél a $PA'A''$

síkba, azaz önmagába megy át. Hasonlóan szerkesztünk egy másik β invariáns síkot, mely nem tartalmazza az a egyenest. Az α és β síkok metszésvonala egy, a-tól különböző b invariáns egyenes; a b egyenesen és a egy tetszőleges pontján átfektetett sík invariáns, azaz b a **T** kollineációnak síktengelye.

47.4. A fenti eredményekből adódik a tengelyes kollineációk osztályozása.

1. Ha két ponttengely van, ezek kettőstengelyek s egymáshoz torz helyzetűek; a leképezést *kettőstengelyű hiperbolikus kollineáció*nak nevezzük.

2. Ha egy kettőstengely van, a leképezést *kettőstengelyű parabolikus kollineáció*nak nevezzük.

3. Ha egy ponttengely s egy ezt nem metsző síktengely van, akkor a leképezést *általános tengelyes kollineációnak* nevezzük, mégpedig *hiperbolikus*nak, *parabolikus*nak vagy *elliptikus*nak, a szerint, hogy a síktengelyen a fixpontok száma 2, 1 vagy 0; nyilván ugyanennyi invariáns sík megy át a ponttengelyen.

4. Ha egy ponttengely s egy ezt metsző síktengely van, akkor a leképezést *speciális tengelyes kollineáció*nak nevezzük, mégpedig *hiperbolikus*nak vagy *parabolikus*nak, a szerint, hogy a síktengelyen két vagy egy fixpont van; ugyanennyi invariáns sík megy át a ponttengelyen, mint látni fogjuk.

Ebben a felsorolásban említjük meg, analogia alapján, a következő típusú leképezést:

5. *Kettőstengelyű elliptikus kollineáció.* Így nevezzük a tér olyan kollineációját, melynek nincs fixpontja, sem invariáns síkja s melynek egy (és csak egy) invariáns egyenese megy át a tér bármely pontján.

Ebben a szakaszban a tengelyes, s a következőben a kettőstengelyű kollineációkkal fogunk foglalkozni.

47.5. *Általános tengelyes kollineációk.*

Hiperbolikus típus. Bármely, a b síktengelyen átmenő, tehát invariáns β síkban a **T** kollineáció egy I típusú leképezést származtat (l. 30. §), melynek fixpontjai a b tengelyen fekvő két fixpont s a β síknak az a ponttengellyel való metszéspontja. A **T** kollineáció invariáns egyenesei a síktengely egyik vagy másik fixpontját a ponttengely tetszőleges pontjával összekötő egyenesek. Az a ponttengelyen két invariáns sík megy át, t. i. azok, amelyek tartalmazzák a síktengely egyik vagy másik fixpontját. Ezekben a síkokban a **T** kollineáció egy-egy általános perspektivitást származtat, amelynek tengelye a, s középpontja a b síktengely illető fixpontja.

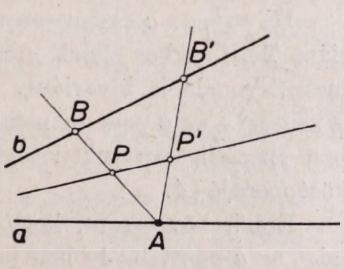
Parabolikus típus. Bármely, a b síktengelyen átmenő β síkban **T** egy *II* típusú leképezést származtat, melynek fixpontjai a síktengelyen fekvő B fixpont s a β síknak az a ponttengellyel való A metszéspontja; ebben a síkban invariáns egyenesek b és AB. A **T** kollineáció invariáns egyenesei a B fixpontot az a ponttengely tetszőleges pontjával összekötő egyenesek. Az a ponttengelyen s a B fixponton átmenő síkban **T** általános perspektivitást származtat, amelynek tengelye a, s középpontja B.

Elliptikus típus. Bármely, a b síktengelyen átmenő β síkban **T** egy *III* típusú leképezést származtat, melynek invariáns egyenese b s fixpontja β-nak a-val közös pontja. Az a egyenesen nem megy át egy invariáns sík sem. A **T** leképezésnek nincs a-n és b-n kívül más invariáns egyenese.

Mindhárom típus esetében egy, az a ponttengelyen átmenő, nem invariáns α sík s ennek α' képe között **T** perspektivitást létesít, amelynek középpontja a b síktengelyen fekszik; b ugyanis invariáns **T**-nél, s ezért α és b metszéspontjának képe α' és b metszéspontja.

47.6. Tétel. *A tér általános tengelyes kollineációját egyértelműen meghatározza a két tengely, a síktengely önmagára való projektív leképezése és egy, a tengelyekhez nem tartozó P pont s ennek P' képe.*

Bizonyítás. Legyen a és b két torz egyenes és $\mathbf{t}$ a b egyenes önmagára való projektív leképezése, mely nem az azonosság. Az a egyenes tetszőleges A pontját összekötjük b valamely B pontjával s ennek $\mathbf{t}$-nél származó B' képével; az AB és AB' egyenesen felveszünk egy-egy P és P' pontot, melyek egymástól s az A, B, B' pontoktól különböznek (68. ábra). Ha B és B' nem esik egybe, akkor feltesszük, hogy a PP' egyenesnek b-vel való metszéspontja különbözik $\mathbf{t}$ fixpontjaitól; ha pedig $B = B'$, s ha $\mathbf{t}$-nek van b-n még egy B_1 fixpontja, akkor a P és P' pontot úgy vesszük fel, hogy a P pontot a b egyenes valamely nem invariáns Q pontjával összekötő PQ egyenes, s a P' pontot a $Q' = \mathbf{t}(Q)$ ponttal összekötő $P'Q'$ egyenes az AB_1 egyenest két különböző pontban



68. ábra.

messe. A P, P' pontok ilyen megválasztásával biztosítottuk, hogy az Ab síknak az az önmagára való leképezése, melyet a b egyenesen megadott **t** projektív leképezés, továbbá az A fixpont s a P pont P' képe meghatároz, nem perspektív, mivel e sík egyik invariáns egyenesén sincs kettőnél több fixpont. A **45**.11 tétel szerint az Ab síknak ez a projektív leképezése s az a egyenes azonos leképezése meghatározza a térnek egy és csak egy **T** kollineációját, mely nem perspektív, mivel az Ab invariáns sík leképezése nem perspektív. A **T** kollineációnak ponttengelye a, és síktengelye b, mivel bármely, b-n átmenő β síknak a-val való metszéspontja fixpont s ezért a β sík invariáns. **T**-nek a b egyenes nem ponttengelye, s így **T** nem lehet kettőstengelyű kollineáció, hanem egy általános tengelyes kollineáció, mely ugyanolyan típusú, mint a b egyenesen megadott **t** projektív leképezés.

47.7. *Speciális tengelyes kollineációk.*

Legyen a és b a **T** kollineáció pont- és síktengelye, metszéspontjukat jelöljük A-val s az ab síkot α-val. A és α invariáns a **T** leképezésnél.

Az α síkban **T** perspektivitást származtat, mivel az a egyenes minden pontja fixpont (**27**.1). Ha **T**-nek van a b egyenesen A-n kívül még egy B fixpontja, akkor az α sík perspektivitása általános s középpontja B; ha **T**-nek nincs b-n más fixpontja, mint A, akkor az α sík perspektivitása speciális s középpontja A. Emlékeztetünk arra, hogy a sík perspektivitásának egyedüli fixpontjai a középpont s a tengely pontjai; ezeken kívül tehát nincs **T**-nek az α síkban más fixpontja.

Ha egy, az a egyenesen átmenő, α-tól különböző α_1 sík is invariáns **T**-nél, akkor ennek minden, a b tengelyen átmenő síkkal való metszésvonala is invariáns. Ebben az esetben az (A, α_1) sugársor egyenesei s az a pontsor pontjai invariánsak **T**-nél, tehát **T** az α_1 síkban speciális perspektivitást származtat, amelynek tengelye a s középpontja A.

Ebből következik, hogy **T**-nek a térben nincs más fixpontja, mint az a ponttengely pontjai s legfeljebb b-nek még egy B pontja; a dualitás elve szerint **T**-nek nincs más invariáns síkja, mint a b tengelyű síksor elemei s legfeljebb még egy, az a egyenesen átmenő α_1 sík.

Ha **T**-nek van a b egyenesen egy, a-hoz nem tartozó B fixpontja, vagyis ha **T** a b egyenesen hiperbolikus leképezést származtat, akkor az a síkban **T** általános perspektivitás, s ezért *az* (A, α) *sugársor elemei nem invariánsak, a-t és b-t kivéve.* Az A középpontú nyalábban **T** perspektív leképezést származtat, mivel minden, a b egyenesen átmenő sík invariáns ; a **27**.1 tétel térbeli duálisa szerint (vagy a **27**.1 tételt alkalmazva az A középpontú nyalábnak egy A-n át nem menő γ síkkal való metszetére) adódik, hogy az A középpontú nyalábban van egy olyan (A, α_1) sugársor, melynek minden eleme invariáns. Mivel az (A, α) sugársor elemei nem invariánsak **T**-nél, ezért az α_1 invariáns sík különbözik α-tól. Az α_1 sík átmegy az a egyenesen ; ellenkező esetben ugyanis az a egyenesen s az (A, α_1) sugársor egyenesein átmenő síkok, vagyis az a tengelyű síksor elemei invariánsak volnának **T**-nél, tehát a kettőstengely volna, feltevésünkkel ellentétben.

Ezzel igazoltuk, hogy *ha a* **T** *kollineáció a b síktengelyen, akkor az a tengelyű síksorban is hiperbolikus leképezést származtat.* Ugyanezzel a meggondolással adódik a tétel megfordítása is.

Ebből következik továbbá, hogy *ha a* **T** *kollineáció a b síktengelyen, akkor az a tengelyű síksorban is parabolikus leképezést származtat* és megfordítva.

A *hiperbolikus típusú* speciális tengelyes kollineáció az a, b tengelyeken átmenő α síkban általános perspektivitást származtat, mint már megjegyeztük ; az a ponttengelyen átmenő másik, α_1 invariáns síkban speciális perspektivitást származtat, melynek tengelye a s középpontja $A = (a, b)$; ugyanis a b síktengelyen átmenő, invariáns síkoknak α_1-gyel való metszésvonalai, vagyis (az (A, α_1) sugársor elemei invariánsak **T**-nél. Bármely, a b tengelyen átmenő s α-tól különböző β síkban **T** egy *II* típusú leképezést származtat, melynek fixpontjai A és B, s invariáns egyenesei b és β-nak α_1-gyel való metszésvonala.

A *parabolikus típusú* speciális tengelyes kollineáció az $\alpha = ab$ síkban speciális perspektivitást létesít, amelynek tengelye a s középpontja $A = (a, b)$. Bármely más, a b tengelyen átmenő β síkban **T** egy *IV* típusú leképezést származtat, melynek fixpontja A, s invariáns egyenese b.

Mindkét típus esetében az a ponttengelyen átmenő tetszőleges sík s ennek képe között **T** perspektivitást létesít, melynek középpontja a b síktengelyen fekszik.

47.8. Tétel. *A tér speciális tengelyes kollineációját egyértelműen meghatározza a két tengely, a síktengely önmagára való* **t** *projektív leképe-*

zése, melynél a két tengely metszéspontja fixpont és egy, a tengelyek síkjához nem tartozó P pont s ennek P' képe. (A P' pont megválasztására vonatkozó korlátozásokat lásd a bizonyításban.)

Bizonyítás. Legyen a és b két egymást metsző egyenes, közös pontjuk A ; jelentse $\mathbf{t}$ a b egyenes önmagára való projektív leképezését, melynek fixpontja A. Felveszünk két P és P' pontot, melyek közül egyik sem tartozik az $\alpha = ab$ síkhoz, s amelyeket összekötő PP' egyenesnek van b-vel közös pontja.

Ha először $\mathbf{t}$ a b egyenes hiperbolikus leképezése, fixpontjai legyenek A és B ; feltesszük, hogy a PP' egyenes nem megy át a B ponton. Ha PP'-nek a b egyenessel való Q metszéspontja különbözik A-tól, jelöljük $\mathbf{t}_1$-gyel az AP egyenesnek a Q pontból az AP' egyenesre való vetítését. Ha pedig a PP' egyenes átmegy az A ponton, jelöljük $\mathbf{t}_1$-gyel az AP egyenesnek azt a parabolikus leképezését, melynek fixpontja A, s mely a P pontot P'-be viszi át (**15**.7). A $\beta = Pb$ sík önmagára való projektív leképezését egyértelműen meghatározza a b egyenes $\mathbf{t}$ s az AP egyenes $\mathbf{t}_1$ leképezése ; a β síknak ez a projektív leképezése önmagára s az a egyenes azonos leképezése egyértelműen meghatározza a térnek egy $\mathbf{T}$ kollineációját (**45**.11), mely nyilván nem perspektív. $\mathbf{T}$-nek ponttengelye a, van tehát síktengelye, ez a β síkban fekszik s a B ponton megy át. Minthogy a (B, β) sugársorban nincs b-n kívül más invariáns egyenes, ezért $\mathbf{T}$ síktengelye b. Ebből következik, hogy $\mathbf{T}$ hiperbolikus típusú, speciális tengelyes kollineáció.

Ha másodszor $\mathbf{t}$ a b egyenes parabolikus leképezése, akkor feltesszük, hogy a PP' egyenesnek b-vel való Q metszéspontja különbözik A-tól; jelöljük $\mathbf{t}_1$-gyel az AP egyenesnek a Q pontból az AP' egyenesre való vetítését. Az a egyenes azonos leképezése, a b egyenes $\mathbf{t}$ s az AP egyenes $\mathbf{t}_1$ leképezése egyértelműen meghatározza a tér $\mathbf{T}$ kollineációját (**45**.10), ez parabolikus típusú speciális tengelyes kollineáció, mint könnyen belátható.

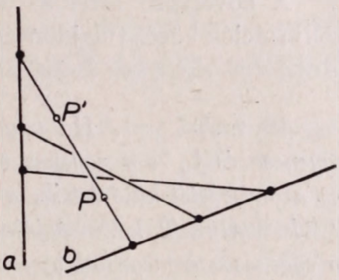
A fenti bizonyításból, vagy a **47**.8 tétel korolláriumaként adódik a következő tétel :

47.9. *Az α sík speciális perspektivitása s a β sík IV típusú leképezése, melyek a két sík metszésvonalán ugyanazt a (parabolikus) leképezést származtatják, meghatározzák a térnek egy parabolikus típusú, speciális tengelyes kollineációját.*

48. §. A tér kettőstengelyű kollineációi.

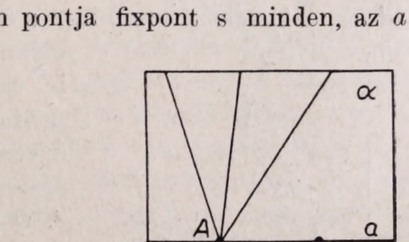
48.1. A **T** *kettőstengelyű hiperbolikus kollineáció* két tengelyét jelöljük a-val és b-vel. A két tengely **T**-nek kettőstengelye, azaz minden a-n vagy b-n fekvő pont s minden a-n vagy b-n átmenő sík invariáns **T**-nél. Ezeken kívül nincs **T**-nek más fixpontja vagy invariáns síkja, különben **T** a tér azonos leképezése volna (**45**.12). A tér bármely P pontján, mely nem tartozik sem a-hoz, sem b-hez, átmegy egy és csak egy olyan egyenes, melynek a-val is, b-vel is van közös pontja; mivel ezek a pontok invariánsak, azért *a térnek minden, a-tól és b-től különböző pontján* **T**-*nek egy és csak egy invariáns egyenese megy át.* Bármely, az a tengelyen átmenő α síkban **T** általános perspektivitást létesít, melynek tengelye a, s középpontja b-nek α-val közös pontja; hasonlóan a b tengelyen átmenő síkokban.

48.2. Ha a és b két tetszőleges torz egyenes s P és P' két, ezekhez nem tartozó pont, melyeket összekötő PP' egyenes metszi a-t és b-t, akkor van a térnek egy és csak egy olyan kettőstengelyű hiperbolikus kollineációja, melynek tengelyei a és b, s mely a P pontot P'-be viszi át. Ugyanis a **45**.12 tétel szerint az a és b egyenes azonos leképezése s a P pont P' képe egyértelműen meghatározza a térnek egy **T** kollineációját; ennek kettőstengelyei a és b (69. ábra).



69. ábra.

48.3. Ha **T** *kettőstengelyű parabolikus kollineáció,* tengelyét jelöljük a-val. Az a egyenes minden pontja fixpont s minden, az a egyenesen átmenő α sík invariáns. Az α síkban **T** perspektivitást létesít, melynek középpontja, A az a tengelyhez tartozik. Ennek igazolására felveszünk egy másik, a-n átmenő β síkot s az ebben **T** által létesített perspektivitás középpontját jelöljük B-vel. Ha A és B közül valamelyik nem tar-



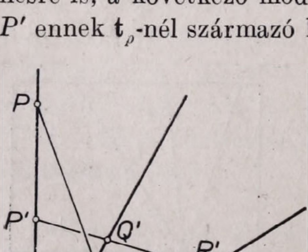
70. ábra.

tozik a-hoz, akkor egy tetszőleges, az AB egyenesen átmenő, de a-t nem tartalmazó γ sík invariáns, mivel α-val és β-val való metszésvonalai invariáns egyenesek. A γ síknak az a tengelyű síksorral való metszésvonalai szintén invariáns egyenesek s ezért a **27**.1 tétel szerint a γ sík önmagára való leképezése, melyet **T** létesít, egy perspektivitás; ennek tengelye **T**-nek egy második ponttengelye volna, **T**-re vonatkozó feltételünkkel ellentétben. Ugyanezzel a meggondolással igazoltuk azt is, hogy *az α és a β sík perspektivitásának A és B középpontja az a tengelynek két, egymástól különböző pontja.* Ha P a tér tetszőleges olyan pontja, mely nem tartozik az a tengelyhez, az $\alpha = Pa$ sík perspektivitásának A középpontját P-vel összekötő egyenes invariáns **T**-nél s ez a P ponton átmenő egyetlen invariáns egyenes. Tehát *a tér minden, a-tól különböző pontján a* **T** *leképezésnek egy és csak egy invariáns egyenese megy át.*

A következő tétel a három különböző típusú, kettőstengelyű kollineációk közös tulajdonságát állapítja meg s egyben igazolja a *kettőstengelyű elliptikus kollineációk* létezését.

48.4. Tétel. *Ha p, q, r a tér három tetszőleges, páronkint torz egyenese és $\mathbf{t}_p$ a p egyenes önmagára való projektív leképezése, mely az azonosságtól különbözik, akkor van a térnek egy és csak egy olyan kettőstengelyű* **T** *kollineációja, melynél p, q, r invariánsak, s mely a p egyenesen a megadott $\mathbf{t}_p$ leképezéssel megegyezik.* **T** *és $\mathbf{t}_p$ ugyanolyan típusú (hiperbolikus, parabolikus, vagy elliptikus).*

Bizonyítás. A p egyenesen megadott $\mathbf{t}_p$ projektív leképezést a p, q, r egyenesek közti perspektivitással, vagyis a három egyenes közös tranzverzálisai segítségével átvisszük a másik két egyenesre is, a következő módon. Legyen P a p egyenes változó pontja, P' ennek $\mathbf{t}_p$-nél származó képe ; a P ponton átmegy egy és csak egy olyan egyenes, mely metszi q-t is, r-et is egy-egy Q és R pontban ; a P' ponton is átmegy egy és csak egy olyan egyenes, mely metszi q-t is, r-et is egy-egy Q' és R' pontban (71. ábra). A Q pontnak a Q', az R pontnak az R' pontot feleltetjük meg, s a q és az r egyenesen ilyen módon értelmezett leképezést jelöljük $\mathbf{t}_q$-val és $\mathbf{t}_r$-rel. A **45**.12 tétel szerint van a térnek egy és csak



71. ábra.

egy olyan $\mathbf{T}$ kollineációja, mely a p, q, r egyeneseken a $\mathbf{t}_p, \mathbf{t}_q, \mathbf{t}_r$ leképezésekkel megegyezik; ezt a leképezést ugyanis a p és a q egyenes $\mathbf{t}_p$ és $\mathbf{t}_q$ leképezése s az R pont R' képe egyértelműen meghatározza, mivel a három egyenes közös tranzverzálisai $\mathbf{T}$-nél egymásba mennek át.

Ha a p egyenes $\mathbf{t}_p$ leképezése *hiperbolikus*, a q és az r egyenesnek $\mathbf{t}_p$-vel aequivalens $\mathbf{t}_q$ és $\mathbf{t}_r$ leképezése is hiperbolikus; a megfelelő fixpontokat összekötő két egyenesen $\mathbf{T}$ az azonosság, ezek az egyenesek $\mathbf{T}$-nek kettőstengelyei, s $\mathbf{T}$ *kettőstengelyű hiperbolikus kollineáció.*

Ha a p, q, r egyeneseken *parabolikus* a leképezés, a fixpontokat összekötő egyenes $\mathbf{T}$-nek egy kettőstengelye s a leképezés *kettőstengelyű parabolikus kollineáció.*

Ha a p, q, r egyenesek leképezése *elliptikus*, akkor a leképezésnek nincs fixpontja, sem invariáns síkja. Ugyanis a p, q, r egyeneseken nincs fixpont; ha $\mathbf{T}$-nek volna egy A fixpontja, akkor az A ponton s a p egyenesen átfektetett sík invariáns s ennek q-val közös pontja fixpont volna, ami ellenmondás. Hasonlóan, $\mathbf{T}$-nek nincs invariáns síkja.

A tér minden pontján átmegy $\mathbf{T}$*-nek egy és csak egy invariáns egyenese.* Ennek az állításnak az igazolására a következő eljárást alkalmazzuk; megszerkesztünk egy, a $\mathbf{T}$ leképezéssel felcserélhető $\mathbf{J}$ involutorius kollineációt, melynek nincs fixpontja s megmutatjuk, hogy $\mathbf{J}$ minden invariáns egyenese $\mathbf{T}$-nél is invariáns. A tér tetszőleges A pontját s ennek $\mathbf{J}$-nél származó $A_1 = \mathbf{J}(A)$ képét összekötő egyenes invariáns $\mathbf{J}$-nél, azaz a tér bármely pontján átmegy egy és csak egy $\mathbf{J}$-nél s ezért $\mathbf{T}$-nél is invariáns egyenes.

A **17**.7 tétel szerint van a p egyenesnek egy és csak egy olyan $\mathbf{j}_p$ elliptikus involuciója, mely a $\mathbf{t}_p$ elliptikus leképezéssel felcserélhető; a p, q, r egyenesek közös tranzverzálisaival átvisszük $\mathbf{j}_p$-t a másik két egyenesre s az így nyert elliptikus involuciókat jelöljük $\mathbf{j}_q$-val és $\mathbf{j}_r$-rel; nyilván ezek is felcserélhetők $\mathbf{t}_q$-val és $\mathbf{t}_r$-rel. A **45**.12 tétel folytán van a térnek egy és csak egy olyan $\mathbf{J}$ kollineációja, mely a p, q, r egyeneseken a $\mathbf{j}_p, \mathbf{j}_q, \mathbf{j}_r$ leképezésekkel megegyezik. Mivel a $\mathbf{J}^2$ leképezés a három egyenes közül mindegyiken az azonosság, $\mathbf{J}^2$ a tér azonos leképezése, vagyis $\mathbf{J}$ involutorius. $\mathbf{J}$-nek nincs fixpontja, sem invariáns síkja, mint fent ($\mathbf{T}$ esetében) már láttuk. Mivel $\mathbf{T}$ és $\mathbf{J}$ a p, q, r egyeneseken felcserélhető, a $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{JTJ}$ kollineáció ezeken az egyeneseken az azonos leképezést származtatja s ezért az egész térben is (**45**.12), vagyis: $\mathbf{TJ} = \mathbf{JT}$, $\mathbf{T}$ és $\mathbf{J}$ *felcserélhető egymással.* A p, q, r

egyenesek közös tranzverzálisai mind **T**-nél, mind **J**-nél egymásba mennek át.

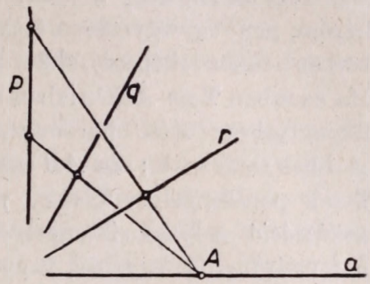
Egy tetszőleges A pontot s ennek **J**-nél származó A_1 képét összekötő $a = AA_1$ egyenes invariáns **J**-nél, mivel A és A_1 egymásba megy át. Tegyük fel, hogy a különbözik p-től és q-tól; az a egyenes p-hez és q-hoz törz helyzetű, mivel metszéspontjuk **J**-nek fixpontja volna. Mivel p, q és a invariánsak **J**-nél, közös tranzverzálisaik **J**-nél egymásba mennek át; ebből következik, hogy $\mathbf{j}_p$ és $\mathbf{j}_q$ aequivalensek egymással az a egyenesről való vetítésnél, vagyis, ha $\mathbf{S}_a$-val jelöljük a q egyenesnek a-ról a p egyenesre való vetítését: $\mathbf{S}_a^{-1}\mathbf{j}_q\mathbf{S}_a = \mathbf{j}_p$. A $\mathbf{t}_q$ leképezésnek $\mathbf{S}_a$-val való transzformáltja: $\mathbf{S}_a^{-1}\mathbf{t}_q\mathbf{S}_a$ a p egyenesnek önmagára való projektív leképezése, melynek nincs fixpontja (mivel $\mathbf{t}_q$-nak sincs) s felcserélhető a $\mathbf{j}_p = \mathbf{S}_a^{-1}\mathbf{j}_q\mathbf{S}_a$ involucióval, tehát a **17**.10 tétel szerint a $\mathbf{t}_p$-t tartalmazó egytagú elliptikus csoporthoz tartozik. Mivel $\mathbf{t}_p$ és $\mathbf{t}_q$, továbbá $\mathbf{t}_q$ és $\mathbf{S}_a^{-1}\mathbf{t}_q\mathbf{S}_a$ aequivalensek, tehát $\mathbf{t}_p$ és $\mathbf{S}_a^{-1}\mathbf{t}_q\mathbf{S}_a$ is aequivalensek egymással, s ezért a **19**.4 tétel szerint $\mathbf{S}_a^{-1}\mathbf{t}_q\mathbf{S}_a$ vagy $\mathbf{t}_p$-vel, vagy $\mathbf{t}_p^{-1}$-gyel azonos. Ha a egybeesik r-rel, akkor $\mathbf{S}_a^{-1}\mathbf{t}_q\mathbf{S}_a = \mathbf{t}_p$; megmutatjuk, hogy ugyanez érvényes minden, **J**-nél invariáns a egyenesre is.

Tegyük fel, hogy **T** *nem involutorius;* a p egyenesen meghatározunk egy pozitív irányítást a $(P, \mathbf{t}_p(P), \mathbf{t}_p^2(P))$ pontok ciklikus sorrendjével, hol P a p egyenes tetszőleges pontját jelenti. Ezt az irányt a p, q, r egyenesek közti perspektivitással átvisszük q-ra is s a q egyenes pozitív irányának nevezzük. Valamely, **J**-nél invariáns a egyenesről való $\mathbf{S}_a$ vetítésnél a $\mathbf{t}_q$ leképezésnek $\mathbf{t}_p$, illetve $\mathbf{t}_p^{-1}$ felel meg, ha $\mathbf{S}_a$ a q egyenes pozitív irányát a p egyenes pozitív, illetve negatív irányába viszi át. Ha az A pontot, melyen átfektettük a **J**-nél invariáns a egyenest, folytonos módon változtatjuk, úgyhogy p és q pontjaitól különböző maradjon, akkor **J** folytonossága miatt az a egyenes s ezzel együtt az $\mathbf{S}_a$ leképezés is folytonos módon[1] változik. Ha tehát A valamely helyzetében $\mathbf{S}_a$ a p és q egyenesek pozitív irányát felelteti meg egymásnak, akkor így van minden más helyzetében is, mivel ezt a p és q egyenesek elkerülésével elérhetjük. Ha A az r egyenes pontja, akkor $\mathbf{S}_a$ a p és q egyenesek pozitív irányát felelteti meg egymásnak; ugyanez érvényes tehát az A pont bármely más hely-zetére is; ezzel igazoltuk, hogy $\mathbf{S}_a^{-1}\mathbf{t}_q\mathbf{S}_a = \mathbf{t}_p$.

Ebből következik, hogy mint **J**-nél, **T**-nél is a p, q, a egyenesek

[1] **Ennek a fogalomnak értelmezését l. első kötet, 294. o.**

közös tranzverzálisai egymásba mennek át ; ugyanúgy a p, r, a egyenesek közös tranzverzálisai is. Ha az A pont nem tartozik a p, q, r egyenesek valamely közös tranzverzálisához, akkor az A pontot meghatározzák a p, q, a és a p, r, a egyeneseknek az A ponton átmenő közös tranzverzálisai (72. ábra) ; ezeknek **T**-nél származó képe szintén közös tranzverzálisa a p, q, a, illetve a p, r, a egyeneseknek, p-vel való metszéspontjuk különböző, s mivel metszik egymást a $\mathbf{T}(A)$ pontban, ez a pont az a egyeneshez tartozik (ellenkező esetben p és a egy síkhoz tartoznék). Ha pedig A a p, q, r egyeneseknek egy közös b tranzverzálisán fekszik, akkor b, $b' = \mathbf{T}(b)$ és $b_1 = \mathbf{J}(b)$ három közös tranzverzálisa a p, q, r és a egyeneseknek. A b egyenesnek a b' egyenesre **T** által származtatott leképezése, a p, q, r egyenesekkel való metszéspontokban megegyezik a b_1 egyenesről való vetítéssel, tehát ez a két leképezés a b egyenes minden pontjában megegyezik (**5**.5). Ezért **T**-nél ugyanúgy, mint a b_1-ről való vetítésnél az A pontnak az $a = AA_1$ és b' egyenesek metszéspontja felel meg, tehát *az a egyenes invariáns* **T**-*nél.* Ezzel igazoltuk, hogy *a tér minden pontján átmegy T-nek egy és csak egy invariáns egyenese.* Az értelmezés szerint tehát **T** *kettőstengelyű elliptikus kollineáció.*



72. ábra.

48.5. T é t e l. *Ha a tér valamely* **T** *kollineációjának végtelen sok invariáns eleme van, akkor* **T** *vagy perspektív, vagy tengelyes, vagy kettőstengelyű kollineáció.*

B i z o n y í t á s. Tegyük fel, hogy **T**-nek *végtelen sok fixpontja* van ; nem lehet ezek között öt általános helyzetű, különben **T** az azonos leképezés volna (**45**.5) ; zárjuk ki ezt az esetet. Ha **T**-nek van négy, nem egy síkban fekvő A, B, C, D fixpontja, akkor **T** összes többi fixpontja az ABC, ABD, ACD, BCD síkokban fekszik. Ha ezek közül valamelyikben, például az ABC síkban van egy olyan fixpont, mely nem tartozik az AB, AC, BC egyenesek közül egyikhez sem, vagy ha e közül a három egyenes közül legalább kettőn van az A, B, C-től különböző fixpont, akkor az ABC síkban **T** az azonos leképezés s ezért a térnek *általános perspektív leképezése* (**26**.6 és **46**.1). Az ellenkező esetben a fixpontok az $ABCD$ tetraéder két átellenes élén, például az AB és CD egyeneseken feküsznek; ezek közül legalább az egyiken, például AB-n van még egy fixpont, tehát ez az egyenes ponttengelye **T**-nek. Ha CD-n nincs más fixpont, mint C és D, akkor **T** *hiperbolikus típusú, általános tengelyes kollineáció.* Ha CD-n van még egy fixpont, akkor **T** *kettőstengelyű hiperbolikus kollineáció.*

Tegyük fel, hogy **T** összes fixpontjai egy síkban feküsznek s van három, nem egy egyenesen fekvő A, B, C fixpont. Ha **T** az ABC síkban az azonos leképezés, akkor a térnek *speciális perspektív leképezése.* Ha azonban **T** az ABC síkban nem az azonosság, akkor összes többi fixpontjai az ABC háromszög oldalai közül ugyanahhoz, például AB-hez tartoznak; az AB egyenes minden pontja fixpont, ez tehát **T**-nek ponttengelye. **T** vagy *parabolikus típusú, általános tengelyes kollineáció,* melynek síktengelye egy, a C ponton átmenő, az ABC síkhoz nem tartozó egyenes, vagy *hiperbolikus típusú, speciális tengelyes kollineáció,* melynek síktengelye az ABC síkban fekszik s a C ponton megy át.

Végül, ha **T** összes fixpontja egy egyenesen fekszik, akkor vagy kettőstengely ez az egyenes és **T** *kettőstengelyű parabolikus kollineáció;* vagy van **T**-nek egy, a ponttengelyt nem metsző síktengelye, melyen **T** elliptikus leképezést származtat s ebben az esetben **T** *elliptikus típusú, általános tengelyes kollineáció;* vagy **T** síktengelye metszi a ponttengelyt s a **T** leképezés *parabolikus típusú, speciális tengelyes kollineáció.*

A fenti meggondolást a dualitás elve szerint átalakítva, ugyanerre az eredményre jutunk, ha feltesszük, hogy **T**-nek *végtelen sok invariáns síkja* van.

Tegyük fel, hogy **T**-nek legfeljebb véges sok fixpontja és invariáns síkja, de *végtelen sok invariáns egyenese* van. Ha **T**-nek van invariáns síkja, ebben van legalább egy fixpont, a **28.1** tétel szerint s viszont a dualitás elve alapján, minden fixponton átmegy legalább egy invariáns sík. Egy síkban nem fekhetik végtelen sok invariáns egyenes, különben ebben a síkban a leképezés vagy az azonosság, vagy perspektivitás volna, ellentétben azzal a feltevéssel, hogy a leképezésnek legfeljebb véges sok fixpontja van. Hasonlóan nem mehet át végtelen sok invariáns egyenes egy O ponton; ellenkező esetben vagy invariáns minden az O ponton átmenő egyenes és ekkor **T** a tér perspektív leképezése, vagy pedig egy, az O ponton átmenő síkban minden, az O ponton átmenő egyenes invariáns s ebben a síkban a leképezés egy perspektivitás, feltevésünkkel ellenkezően. E szerint bármely ponton csak véges sok invariáns egyenes megy át s bármely síkban legfeljebb véges sok invariáns egyenes van. Ha volna a leképezésnek egy O fixpontja, akkor minden olyan sík invariáns volna, mely tartalmazza az O pontot s egy az O-n át nem menő invariáns egyenest, s mint az invariáns egyeneseknek, ezeknek a síkoknak a száma is végtelen volna, feltevésünkkel ellentétben. Ebből következik, hogy *a* **T** *leképezésnek nincs fixpontja, sem invariáns síkja, s hogy bármely két invariáns egyenese torz,* különben metszéspontjuk fixpont volna.

Legyen a p, q, r a **T** leképezés három invariáns egyenese ; ezeknek közös tranzverzálisai **T**-nél egymásba mennek át s a három egyenesen **T** által származtatott projektív leképezések aequivalensek a három egyenes közti perspektív vonatkozásnál. Ezek a leképezések elliptikusak, mivel **T**-nek nincs fixpontja. E szerint **T** *kettőstengelyű elliptikus kollineáció.* Ezzel bebizonyítottuk a **48**.5 tételt.

48.6. *Ha a* **T** *kettőstengelyű elliptikus kollineációnál az a egyenes egy tőle különböző a' egyenesbe megy át, akkor a és a' egymáshoz torz helyzetű.* Legyen ugyanis A és B az a egyenes két különböző pontja, p és q a rajtuk átmenő invariáns egyenesek; A képe, A' a p egyenesen, B képe, B' a q egyenesen fekszik. Mivel $p = AA'$ és $q = BB'$ torz egyenesek, ezért $a = AB$ és $a = A'B'$ ugyancsak torz helyzetűek.

49. §. A tér involutorius kollineációi.

Ha **T** a tér involutorius kollineációja, akkor a tér bármely P pontján átmegy legalább egy invariáns egyenes ; ha ugyanis P fixpont, akkor a **28**.1 tétel duálisát alkalmazzuk a P középpontú sugárnyalábra s ebből következik legalább egy, a P ponton átmenő invariáns egyenes létezése ; ha pedig P nem fixpont, akkor a P-t képével, P'-vel összekötő PP' egyenes invariáns. Ebből a **48**.5 tétel szerint következik, hogy a tér minden involutorius kollineációja vagy perspektív, vagy tengelyes, vagy kettőstengelyű leképezés. A különböző típusok meghatározására szolgál a következő meggondolás.

Tegyük fel először, hogy a leképezésnek van egy invariáns α síkja ; ebben **T** vagy az azonos leképezést származtatja, vagy egy harmonikus perspektivitást. Ha **T** az α síkban az azonosság, akkor a térben perspektivitás, amelynek síkja α (**46**.1). Legyen A tetszőleges olyan pont, mely képétől, A'-től különbözik ; az AA' egyenes invariáns, ezen **T** hiperbolikus involuciót származtat, mivel az egyenesnek α-val közös pontja fixpont ; legyen O a **T** leképezés másik fixpontja az AA' egyenesen. Minden, az O ponton átmenő egyenes invariáns, mivel O s az egyenesnek α-val közös Q pontja fixpontok. Minden ilyen egyenesen megegyezik **T** az O, Q fixpontokra vonatkozó harmonikus involucióval. A térnek ezt az involutorius leképezését az O középpontra s az α síkra vonatkozó *harmonikus perspektivitás*nak nevezzük.

Tegyük fel továbbra is, hogy az α sík invariáns **T**-nél, de **T** nem perspektív leképezés. Az α síkban **T** harmonikus perspektivitást létesít, melynek a tengelye a **T** leképezésnek ponttengelye ; az α síkban van **T**-nek még egy, a-hoz nem tartozó A fixpontja. Az a-n átmenő síksorban **T** vagy azonos leképezést, vagy hiperbolikus involuciót létesít, mivel ennek a síksornak α eleme invariáns. Van tehát legalább még egy, a-n átmenő invariáns β sík s ebben egy, a-hoz nem tartozó B fixpont. Az AB egyenes a-hoz képest torz és **T**-nél invariáns. Az AB egyenesen és a tetszőleges C pontján átmenő sík invariáns ; az ebben **T** által származtatott harmonikus perspektivitás tengelye nem mehet át a C ponton, különben az ezen a tengelyen és a-n átmenő síkban **T** az azonos leképezést származtatná, amit kizártunk. Tehát az ABC sík perspektivitásának tengelye AB ; ez a **T** leképezésnek második ponttengelye. A **T** leképezés kettőstengelyű hiperbolikus leképezés, melyet *(kettőstengelyű) hiperbolikus involució*nak nevezünk.

Tegyük fel másodszor, hogy **T**-nek nincs invariáns síkja, tehát fixpontja sem. Bármely A pontot képével, A'-vel összekötő AA' egyenes invariáns ; legyen B az AA' egyeneshez nem tartozó pont, B' a B pont képe ; a BB' invariáns egyenes torz AA'-höz képest. Legyen C olyan pont, amely nem tartozik sem AA'-höz, sem BB'-höz, és C' a C pont képe. Az AA', BB', CC' páronkint torz egyeneseken **T** elliptikus involuciókat létesít, melyek aequivalensek egymással a három egyenes közti perspektivitásnál. A **T** leképezés kettőstengelyű elliptikus leképezés, melyet *(kettőstengelyű) elliptikus involució*nak nevezünk. (A **48**.4 tétel bebizonyításában már szerepelt.) E szerint :

49.1. Tétel. *A tér bármely involutorius kollineációja vagy harmonikus perspektivitás, vagy (kettőstengelyű) hiperbolikus, vagy elliptikus involució.*

50. §. A tér kollineációi véges számú invariáns elemmel.

50.1. *Ha a tér valamely kollineációjának legfeljebb véges számú invariáns eleme van, akkor minden A fixpontnak megfelel egy a asszociált invariáns sík, mely az A ponton átmenő s a leképezésnél egymásnak megfelelő egyenesek közti perspektivitások középpontjaiból áll. Megfordítva, minden a invariáns síknak megfelel a duális értelemben egy asszociált fixpont, mégpedig az A fixpont, melyhez az a invariáns sík asszociált. Ha egy fixpont s egy invariáns sík nem egyesített helyzetű, akkor egymáshoz asszociáltak.*

Ennek a tételnek a bizonyítása lényegében ugyanolyan, mint a síkra vonatkozó megfelelő tételé (**29**.1—5); részletes kidolgozását az olvasóra bízzuk.

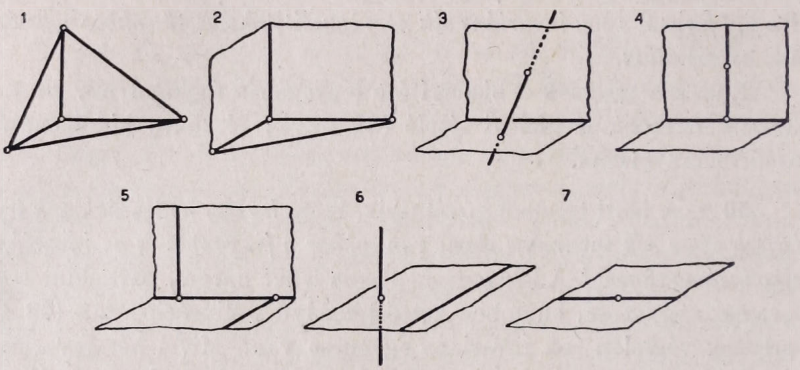
50.2. A fenti tételből következik, hogy *ha egy kollineációnak legfeljebb véges sok invariáns eleme van, akkor a fixpontok és az invariáns síkok száma egyenlő.* A leképezésnek nem lehet három, páronkint torz invariáns egyenese, különben kettőstengelyű kollineáció lenne (**48**.4), melynek végtelen sok invariáns egyenese van. Mivel két invariáns egyenes metszéspontja fixpont, ebből következik, hogy *ha egy kollineációnak nincs fixpontja s csak véges sok invariáns egyenese van, akkor ezeknek száma legfeljebb kettő, s ha van két invariáns egyenese, ezek torz helyzetűek.* Ha a leképezésnek van fixpontja, a *fixpontok száma legfeljebb négy;* egy egyenesen ugyanis legfeljebb két, egy síkban legfeljebb három fixpont van, s öt általános helyzetű fixpont esetében a leképezés az azonosság volna (**5**.6, **26**.6 és **45**.5). Hasonlóan, az invariáns síkok száma legfeljebb négy s egy egyenesen legfeljebb két, egy ponton legfeljebb három invariáns sík megy át. Minden invariáns síkban van legalább egy fixpont (**28**.1) s a benne fekvő fixpontok és invariáns egyenesek száma egyenlő (**29**.6). Ennek megfelelően minden fixponton átmegy legalább egy invariáns sík s a fixponton átmenő invariáns síkok és egyenesek száma egyenlő. Jegyezzük meg végül, hogyha a leképezésnek van fixpontja, akkor minden invariáns egyenes vagy egy invariáns síkban fekszik, vagy egy fixponton megy át.

50.3. A fentiek alapján felsorolhatjuk a tér ama kollineációinak típusait, melyeknek legfeljebb véges sok invariáns eleme, de legalább egy fixpontja van. (A következő felsorolásra vonatkozik a 73. ábra.)

1. A leképezésnek négy A, B, C, D fixpontja van, ezek nem feküsz-

nek egy síkban; a leképezés invariáns síkjai és egyenesei az $ABCD$ tetraéder lapjai és élei.

2. A leképezésnek három A, B, C fixpontja van, ezek nem feküsznek egy egyenesen. A $\gamma = ABC$ síkon kívül még két invariáns sík van, α és β, ezeknek γ-val való metszésvonala az AC, illetve a BC egyenes. Az AB, AC, BC invariáns egyeneseken kívül a leképezésnek még egy invariáns egyenese van: az α és β síkok metszésvonala.



73. ábra.

3. A leképezésnek két fixpontja van, A és B s két invariáns síkja, α és β. A két fixpont közül egyik sem tartozik az α, β síkok b metszésvonalához; az invariáns egyenesek b és $a = AB$.

4. A leképezésnek két fixpontja van, A és B, s két invariáns síkja, α és β; B az α és β síkok b metszésvonalán fekszik, A nem. Az invariáns egyenesek $a = AB$ és b.

5. A leképezésnek két fixpontja van, A és B s két invariáns síkja, α és β. Mindkét fixpont a két sík c metszésvonalán fekszik. Mindkét síkban van tehát két fixpont s ezért két invariáns egyenes; mindkét fixponton átmegy két invariáns sík, s ezért két invariáns egyenes. E szerint a leképezésnek három invariáns egyenese van: $c = AB$, továbbá egy az α síkban fekvő s a B ponton átmenő a, és egy a β síkban fekvő s az A ponton átmenő b invariáns egyenes.

6. A leképezésnek egy A fixpontja s egy, az A ponton átmenő α invariáns síkja van, továbbá két torz invariáns egyenese, melyek közül az egyik az α síkban fekszik, a másik az A ponton megy át.

7. A leképezésnek egy A fixpontja, egy, az A ponton átmenő

α invariáns síkja s egy, az α síkban fekvő s az A ponton átmenő a invariáns egyenese van.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

50.4. Tétel. *A tér kollineáris leképezéseinek hét különböző olyan típusa van, melyeknek legalább egy fixpontja s véges sok invariáns eleme van. A fixpontok és az invariáns síkok száma legfeljebb négy, az invariáns egyeneseké legfeljebb hat.*

Már fent megjegyeztük, hogyha a tér valamely kollineációjának nincs fixpontja, s csak véges sok invariáns egyenese van, ezeknek száma legfeljebb kettő (l. **50.2**). Megszerkesztjük a tér olyan fixpont nélküli kollineációit, melyeknek csak két, illetve csak egy invariáns egyenese van.

50.5. Legyen a és b két egymáshoz torz egyenes; felveszünk a-n és b-n egy-egy elliptikus leképezést, melyek *nem aequivalensek* egymással, de egyébként tetszőlegesek. Legyen A az a egyenes valamely pontja, A' ennek a képe, B a b egyenes valamely pontja, B' ennek a képe, s legyen E és E' az AB, illetve az $A'B'$ egyenesnek egy-egy A, B, A', B'-től különböző pontja. A **45.12** tétel szerint van a térnek egy és csak egy olyan **T** kollineációja, mely az a és b egyeneseken a megadott leképezésekkel megegyezik s az E pontot E'-be viszi át.

A **T** leképezésnek nincs invariáns síkja; ellenkező esetben az invariáns síknak vagy az a, vagy a b egyenessel való metszéspontja fixpont volna; de az a, b egyeneseken nincs fixpont, mivel ezeken **T** elliptikus leképezést származtat. Hasonlóan, nincs a leképezésnek a térben fixpontja, különben a fixponton s az egyik invariáns egyenesen átfektetett sík invariáns volna. A leképezésnek nincs a-n és b-n kívül más invariáns egyenese. Ha ugyanis egy ezektől különböző c egyenes is invariáns **T**-nél, akkor c nem metszheti sem a-t, sem b-t, mert különben metszéspontjuk fixpont volna. Tehát a, b, c páronkint torz egyenesek, s mert **T**-nél invariánsak, közös tranzverzálisaik **T**-nél egymásba mennek át. A c egyenesről való vetítésnél az a és a b egyenesen **T** által származtatott elliptikus leképezés egymásba menne át, holott feltettük, hogy ez a két leképezés nem aequivalens egymással.

Van tehát a térnek olyan kollineációja, melynek pontosan két invariáns egyenese van, de nincs fixpontja, sem invariáns síkja.

50.6. Megszerkesztjük *a térnek olyan kollineációját, melynek csak egy invariáns egyenese van, de nincs sem fixpontja, sem invariáns síkja;* a következő eljárás GODEAUXtól származik.

Tegyük fel, hogy a tér $\mathbf{T}$ kollineációjának csak egy a invariáns egyenese van, s nincs sem fixpontja, sem invariáns síkja. Legyen A az a egyenes valamely pontja, p egy A-n átmenő, a-tól különböző egyenes, továbbá B és C a p egyenesnek két, A-tól s egymástól különböző pontja. Az A, B, C pont A', B', C' képe rendre különbözik A, B, C-től: az $a=AA', b=BB', c=CC'$ egyenesek páronkint torz helyzetűek; különben a p és a $p'=A'B'$ egyenes egy, az a egyenesen átmenő invariáns síkhoz tartoznék. Jelöljük $\mathbf{T}_1$-gyel azt a kettőstengelyű elliptikus kollineációt, melynek invariáns egyenesei a, b, c s mely a-n a $\mathbf{T}$ által származtatott elliptikus leképezéssel megegyezik (**48**.4). A $\mathbf{T}_1$ leképezés, ugyanúgy, mint $\mathbf{T}$, az A, B, C pontokat az A', B', C' pontokba viszi át. A $\mathbf{T}'=\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T}$ kollineációnál az a egyenes pontjai, továbbá B' és C' fixpontok, s ezért $\mathbf{T}'$ az $\alpha=ap'$ síkban az azonosság, tehát a tér perspektív leképezése; a perspektivitás síkja α, középpontját jelöljük O-val. A $\mathbf{T}_1$ leképezésnek egy és csak egy invariáns egyenese megy át az O ponton, s mert ez a $\mathbf{T}'$ perspektivitásnál, ezért a $\mathbf{T}=\mathbf{T}_1\mathbf{T}'$ leképezésnél is invariáns; mivel feltevésünk szerint $\mathbf{T}$ egyetlen invariáns egyenese a, ez azt jelenti, hogy az O pont az a egyenesen fekszik.

A fenti meggondolás megfordításából adódik a $\mathbf{T}$ leképezés megszerkesztése. Legyen $\mathbf{T}_1$ egy kettőstengelyű elliptikus kollineáció, O a tér tetszőleges pontja, a a $\mathbf{T}_1$ leképezésnek az O ponton átmenő invariáns egyenese, és α egy, az a egyenesen átmenő sík. Legyen $\mathbf{T}'$ a tér olyan speciális perspektivitása, melynek középpontja O s perspektivitási síkja α. A $\mathbf{T}=\mathbf{T}_1\mathbf{T}'$ leképezésnél nyilván invariáns az a egyenes, s ezen $\mathbf{T}$ ugyanazt az elliptikus leképezést származtatja, mint $\mathbf{T}_1$, mivel $\mathbf{T}'$ ezen az egyenesen az azonosság. Hasonlóan, az a tengelyű síksorban $\mathbf{T}$ és $\mathbf{T}_1$ ugyanazt az elliptikus leképezést származtatja. Ebből következik, hogy $\mathbf{T}$-nek nincs fixpontja, sem invariáns síkja. Ha $\mathbf{T}$-nek volna a-n kívül még egy b invariáns egyenese, ez a-hoz torz, tehát nem megy át a $\mathbf{T}'$ perspektivitás O középpontján, s nem tartozik az α síkhoz. Ebből következik, hogy b nem invariáns sem $\mathbf{T}_1$-nél, sem $\mathbf{T}'$-nél; de mert $\mathbf{T}$-nél invariáns, ezért b-nek $\mathbf{T}_1$-nél származó b' képe $\mathbf{T}'$-nél b-be megy át. A b és b' egyenes egymáshoz torz, mivel a $\mathbf{T}_1$ kettőstengelyű elliptikus kollineációnál egyik a másikba megy át (**48**.6); de b-nek és b'-nek az α síkkal való metszéspontja közös, mivel a $\mathbf{T}'$ perspektivitásnál b' képe b. Ez ellenmondás; tehát *$\mathbf{T}$-nek nincs a-n kívül más invariáns egyenese.*

50.7. *A tér minden kollineációjának van legalább egy invariáns egyenese.* Ha a kollineációnak van legalább egy fixpontja, akkor ez az állítás a nyalábra alkalmazott **28**.1 tételből következik. Abban az esetben, ha a kollineációnak nincs fixpontja (sem invariáns síkja), az **57**.2-ban igazoljuk ezt a tételt, mely biztosítja, hogy a tér kollineációinak fenti felsorolása teljes.

51. §. A sík elliptikus polaritásával felcserélhető térbeli kollineációk.

Legyen **T** a térnek olyan kollineációja, melynek invariáns síkja α, s amely az α síkban megadott Ω elliptikus polaritással felcserélhető abban az értelemben, hogy α bármely pontjának **T**Ω és Ω**T** ugyanazt, az α síkban fekvő egyenest felelteti meg.

51.1. A **T** által az α síkban származtott kollineáció a **37**.3 tétel szerint vagy az azonosság, vagy harmonikus perspektivitás, melynek A középpontja és a tengelye egymásnak felel meg Ω-nál, vagy egy *III* típusú leképezés, melynek A fixpontja s a invariáns egyenese egymásnak felel meg Ω-nál.

1) Ha **T** az α síkban az azonosság, akkor a térben *általános vagy speciális perspektivitás*, melynek síkja α (**46**.1).

Ha **T** az α síkban harmonikus perspektivitást származtat, melynek tengelye a s középpontja A, akkor **T** a térben a következő típusú leképezés lehet:

2) *Harmonikus perspektivitás*, melynek középpontja az A pont, és síkja az a egyenesben metszi az α síkot.

3) *Kettőstengelyű hiperbolikus involució*, melynek egyik tengelye a, s másik tengelye, b átmegy az A ponton.

4) *Hiperbolikus típusú, általános tengelyes kollineáció*, melynek ponttengelye a és síktengelye egy, az A ponton átmenő b egyenes.

5) *Parabolikus típusú, általános tengelyes kollineáció*, melynek ponttengelye a és síktengelye egy, az A ponton átmenő b egyenes.

6) *Hiperbolikus típusú, speciális tengelyes kollineáció*, melynek ponttengelye a és síktengelye egy, az α síkban fekvő, az A ponton átmenő b egyenes.

Ha **T** az α síkban egy *III* típusú, nem perspektív, projektív leképezést származtat, melynek fixpontja A és invariáns egyenese a, akkor típusa a következő lehet:

7) *Elliptikus típusú, általános tengelyes kollineáció*, melynek síktengelye a és melynek ponttengelye, b az A ponton megy át.

8) A kollineációnak *két fixpontja* van : A és egy, az α síkhoz nem tartozó B pont, *két invariáns egyenese:* a és a $b=AB$ egyenes, és *két invariáns síkja:* α és a $\beta=Ba$ sík (l. **50**.3, 3) típus).

9) A kollineációnak *egyetlen fixpontja* A, *egyetlen invariáns síkja* α, *két invariáns egyenese:* a és egy, az A ponton átmenő, nem az α síkban fekvő b egyenes (l. **50**.3, 6) típus).

51.2. *A* 3)—9) *típusú, Ω-val felcserélhető kollineációk előállíthatók* 1) *és* 2) *típusú perspektivitások szorzataként.*

Ha ugyanis **T** olyan, Ω-val felcserélhető kollineáció, mely a térben nem harmonikus perspektivitás, de az α síkban harmonikus perspektivitást származtat, akkor az utóbbinak középpontját és tengelyét jelöljük A-val és a-val, s legyen $\mathbf{T}'$ a térnek olyan harmonikus perspektivitása, melynek középpontja A, s melynek síkja az α síkot az a egyenesben metszi. A $\mathbf{T}\mathbf{T}'=\mathbf{T}''$ kollineáció az α síkban az azonos leképezést származtatja, tehát a térnek egy perspektivitása, melynek síkja α ; $\mathbf{T}$ az 1) és 2) típusú $\mathbf{T}''$ és $\mathbf{T}'$ perspektivitások szorzata : $\mathbf{T}=\mathbf{T}''\mathbf{T}'$.

Ha pedig **T** az α síkban egy *III* típusú, nem perspektív leképezést származtat, amelynek fixpontja A, és invariáns egyenese a, akkor legyen P az a egyenes tetszőleges pontja, $p=\Omega(P)$ ennek polárisa, és $\mathbf{T}_1$ a tér olyan harmonikus perspektivitása, melynek középpontja P és síkja az α síkot a p egyenesben metszi. A $\mathbf{T}_2=\mathbf{T}\mathbf{T}_1$ leképezésnél A fixpont, s az a egyenes invariáns ; $\mathbf{T}_2$ az a egyenesen hiperbolikus involuciót származtat, mivel az a egyenesnek ez a leképezése megfordítja az irányítást s felcserélhető az Ω által létesített elliptikus involucióval. Ebből következik, hogy $\mathbf{T}_2$, mint az α sík Ω polaritásával felcserélhető kollineáció, az α síkban harmonikus perspektivitás, melynek középpontja az a egyenes valamely Q pontja s tengelye a Q pont q polárisa. — Az előbbi bekezdés szerint a tér $\mathbf{T}_2$ kollineációja előállítható az 1) és 2) típusú $\mathbf{T}''$ és $\mathbf{T}'$ perspektivitások szorzataként, tehát $\mathbf{T}\mathbf{T}_1=\mathbf{T}''\mathbf{T}'$, s ebből $\mathbf{T}=\mathbf{T}''\mathbf{T}'\mathbf{T}_1$.

Bebizonyítottuk a következő tételt :

51.3. Tétel. *A térnek minden olyan kollineációja, melynek invariáns síkja α, s mely az α síknak megadott Ω elliptikus polaritásával felcserélhető,*

a) *vagy általános, vagy speciális perspektivitás, melynek síkja α,*

b) *vagy harmonikus perspektivitás, melynek A középpontja az* *a síkban fekszik, s a perspektivitás síkja az α síkot az A pont polárisában metszi,*

c) *vagy az* a) *és* b) *típusú perspektivitások közül kettőnek vagy többnek a szorzata.*

Mindezek a leképezések együtt csoportot alkotnak.

52. §. A tér affin és hasonlósági leképezései.

A projektív tér valamely υ síkját *végtelen távoli sík*nak vesszük fel, s *affin leképezés*nek nevezünk minden olyan kollineációt, melynél a végtelen távoli sík önmagába megy át.

A **45**.9 tételből levezethetjük a következő tételt, hasonló meggondolással, mint amelyet a sík esetében alkalmaztunk (**32**.1):

52.1. Tétel. *Ha A, B, C, D és A', B', C', D' az affin tér olyan pontjai, melyek közül sem A, B, C, D, sem A', B', C', D' nem tartoznak egy síkhoz, akkor van a térnek egy és csak egy olyan affin leképezése, melynél az A, B, C, D pontnak rendre az A', B', C', D' pont felel meg.*

52.2. A tér affin leképezéseinek különböző típusait a projektív tér kollineációinak felsorolásából állapíthatjuk meg, ha ezek közül elhagyjuk a fixpont és invariáns sík nélküli leképezéseket s figyelembe vesszük egy-egy kollineáció-típusnál az invariáns elemeknek esetleg különböző szerepét.

Így kapjuk meg például az *affin perspektivitások* következő típusait.

a) Általános perspektivitás, melynek síkja az υ végtelen távoli sík, s középpontja egy végesben fekvő O pont ; ezt az O pontra vonatkozó *homothétikus leképezés*nek nevezzük. — Ennek speciális esete az O középpontra s az υ síkra vonatkozó harmonikus perspektivitás ; ez az affin térnek az *O pontra vonatkozó tükrözése,* melynél minden P pontnak az O pontra vonatkozó P' tükörképe felel meg.

b) Általános perspektivitás, melynek síkja egy υ-tól különböző α sík, s középpontja egy α-hoz nem tartozó U végtelen távoli pont. — Ennek speciális esete az U középpontra s az α síkra vonatkozó harmonikus perspektivitás, mely az affin térnek *az α síkra vonatkozó tükrözése az U által meghatározott irányban.*

c) Speciális perspektivitás, melynek síkja az υ végtelen távoli sík, s középpontja egy U végtelen távoli pont. Ez az affin tér *eltolása* egy olyan $\overrightarrow{PP'}$ vektorral, melyen átmenő PP' egyenesnek végtelen távoli pontja U. — *Az affin tér eltolásai kommutatív s a térben egyszeresen tranzitív csoportot alkotnak* (l. **32**.2. *c*).

d) Speciális perspektivitás, melynek síkja egy υ-tól különböző α sík, s középpontja α-nak egy végtelen távoli U pontja.

A nem perspektív kollineációk felsorolásából specializálással megkapjuk a nem perspektív affinitások felsorolását. A kettőstengelyű és a tengelyes, hiperbolikus vagy parabolikus típusú affinitások esetében egy tengely, elliptikus típusú, általános tengelyes affinitások esetében a síktengely szükségképpen végtelen távoli egyenes. A véges sok invariáns elemmel bíró affinitások esetében a leképezésnek legalább egyik fixpontja végtelen távoli pont, mivel a végtelen távoli sík invariáns. — A különböző típusok felsorolását mellőzzük.

52.3. A térben a *merőlegesség* fogalmát következőképpen vezetjük be. Felveszünk az υ végtelen távoli síkban egy Ω_0 elliptikus polaritást, amelyet *abszolut polaritás*nak nevezünk. Az a egyenest és az α síkot egymásra merőlegesnek nevezzük, ha a végtelen távoli pontjának polárisa α végtelen távoli egyenese. Két egyenest, vagy két síkot egymásra merőlegesnek nevezünk, ha végtelen távoli elemeik konjugáltak az Ω_0 polaritásra vonatkozóan.

52.4. *A tér hasonlósági leképezésén* értünk minden olyan affinitást, mely egymásra merőleges egyeneseket egymásra merőleges egyenesekbe visz át, vagyis amely felcserélhető az υ végtelen távoli síkban az Ω_0 abszolut polaritással.

Az **51**.3 tétel szerint a tér hasonlósági leképezései a következők:

a) Általános perspektivitás, melynek síkja υ, s középpontja egy végesben fekvő O pont; ez egy O középpontú *homothétikus leképezés.*

b) Speciális perspektivitás, melynek síkja υ, s középpontja egy U végtelen távoli pont; ez a térnek egy *eltolása.*

c) Harmonikus perspektivitás, melynek középpontja egy végtelen távoli U pont és síkja α az U pontnak Ω_0-nál megfelelő u egyenesben metszi a végtelen távoli síkot; ez a térnek az *α síkra vonatkozó merőleges tükrözése.*

d) Az a), b), c) típusú leképezések közül kettőnek vagy többnek a szorzata.

A tér hasonlósági leképezései csoportot alkotnak.

Jegyezzük meg, hogy két egymást metsző síkra vonatkozó tükrözés szorzata, a szerint, hogy a két sík merőleges egymásra, vagy nem, a térnek kettőstengelyű hiperbolikus involuciója, melynek egyik tengelye: a a két sík metszésvonala, s másik tengelye: u az a-ra merőleges síkok végtelen távoli egyenese, — vagy pedig elliptikus típusú, általános tengelyes kollineáció, melynek ponttengelye a és síktengelye u. Ezek a leképezések a térnek az a tengely körül való *forgásai.*

A tér hasonlósági leképezéseinek felsorolását, mely az **51**.1 felsorolásból levezethető, az olvasóra bízzuk.

53. §. A tér korrelatív leképezései.

A tér korrelatív leképezéseit a 45. § bevezetésében mint a tér pontjai és síkjai közti kölcsönösen egyértelmű vonatkozásokat értelmeztük, s megjegyeztük, hogy ezeknél a tér egyenesei egymásnak felelnek meg kölcsönösen egyértelmű módon. A kollineációkra vonatkozó tételekből a dualitás elvének megfelelő átalakítással kapjuk meg a korrelációkra vonatkozó tételeket; ezek közül a következőket említjük meg.

53.1. Tétel. *A tér korrelatív leképezése minden másod- és elsőfajú elemi alakzatnak egy másod- illetve elsőfajú elemi alakzatot feleltet meg, s ezek között projektív vonatkozást létesít.*

Ugyanis minden sugár- és síknyalábnak egy sugár- és pontmező felel meg, és megfordítva, s az ezekben foglalt sugársorok egymásnak, s a sík- és pontsorok egymásnak felelnek meg. E szerint bármely két, egymásnak megfelelő másodfajú elemi alakzat vonatkozása projektív, s ebből következik (l. **39**.1), hogy az egymásnak megfelelő elsőfajú elemi alakzatok vonatkozása is projektív.

53.2. Tétel. *Legyen α és β két különböző sík, metszésvonaluk c; legyen A' és B' két különböző pont, az őket összekötő egyenes c'. Ha megadjuk az α sík pontjainak az A' középpontú síknyalábra, s a β sík pontjainak a B' középpontú síknyalábra egy-egy olyan projektív leképezését, melyek a c egyenes pontjaiban megegyeznek, azaz c bármely C pontjának mindkét leképezés ugyanazt a c' egyenesen átmenő γ' síkot felelteti meg, akkor létezik a térnek egy és csak egy olyan korrelatív leképezése, mely az α és β síkokban a megadott projektív leképezésekkel megegyezik.*

Bizonyítás. Ez a tétel a kollineációkra vonatkozó **45**.8 tételnek felel meg, s bebizonyítását is azéból a dualitás elvének megfelelő átszövegezéssel kapjuk meg.

A tér bármely P pontja, amely nem tartozik sem az α, sem a

β síkhoz, mint középpont meghatároz egy perspektív vonatkozást az α és β síkok között. Az α síknak az A' középpontú, s a β síknak a B' középpontú síknyalábra való leképezésével átvisszük ezt a perspektív vonatkozást a két síknyalábra. Legyen α' egy tetszőleges, az A' ponton átmenő sík, A az α sík megfelelő pontja, B az AP egyenesnek a β síkkal való metszéspontja, és β' a B pontnak megfelelő sík; az α' síknak a β' síkot feleltetjük meg. Ilyen módon egy projektív vonatkozást létesítünk az A' és B' középpontú síknyalábok között. Minden, a $c'=A'B'$ egyenesen átmenő α' sík önmagának felel meg a leképezésnél; az α' síknak ugyanis egy, a c egyenesen fekvő C pont felel meg, ez az α és β síkok közti perspektív vonatkozásnál önmagába, s a β sík pontjainak a B' középpontú nyalábra való leképezésénél az α' síkba megy át. A két síknyaláb közti vonatkozás tehát perspektív a c' tengelyre s ezért a **26**.2 tétel duálisa szerint egy π' síkra vonatkozóan is. A P pontnak a π' síkot feleltetjük meg. — Két különböző P és Q pontnak két különböző π' és ϱ' sík felel meg.

Bármely három, egy egyenesen fekvő pontnak három, egy egyenesen átmenő sík felel meg a fent értelmezett leképezésnél. Ha ugyanis először p olyan egyenes, mely nem metszi c-t, akkor az α és a β síkkal közös pontja legyen A és B, s az ezeknek megfelelő síkok α' és β'. A p egyenes tetszőleges P pontjának a fenti előírás szerint megfelelő síkot jelöljük π'-vel. Mivel az A' és a B' középpontú nyalábnak a π' síkra vonatkozó perspektivitása az α' és a β' síkot egymásnak felelteti meg, ezért az α', β' és π' síkok egy p' egyenesen mennek át. Ha pedig Q olyan pont, mely nem tartozik a p egyeneshez, akkor a megfelelő ϱ' sík nem tartalmazza a p' egyenest.

Ha másodszor p olyan egyenes, mely metszi a c egyenest egy C pontban, de nem tartozik sem az α, sem a β síkhoz, akkor legyen a az α síkban egy, a C ponton átmenő egyenes és b a $\gamma=ap$ síknak β-val való metszésvonala. Az α és β síkok közti perspektív vonatkozásnál, melynek középpontja a p egyenes valamely P pontja, az a és b egyenesek egymásnak felelnek meg. Az α sík pontjai s az A' középpontú síknyaláb megadott projektív vonatkozásánál az a egyenesnek egy, az A' ponton átmenő a' egyenes, s hasonlóképpen a b egyenesnek egy, a B' ponton átmenő b' egyenes felel meg; mivel az a és b egyenesnek van egy C közös pontja, az ennek mindkét projektív vonatkozásnál megfelelő γ' sík tartalmazza az a' és a b' egyenest. Az α és β síkok közti, P középpontú perspektív vonatkozásnak megfelel egy perspektív vonatkozás az A' és a B' középpontú nyalábok között; ennél az

a' és a b' tengellyel bíró síksorok egymásnak felelnek meg, tehát a perspektivitás π' síkja átmegy az a' és b' egyenesek C' metszéspontján. Ha P és Q a p egyenes két, C-től különböző pontja, a megfelelő π' és ϱ' síkok különböznek γ'-től s a három síknak van egy közös egyenese. Jelöljük ugyanis p'-vel π' és ϱ' metszésvonalát; a p' egyenes átmegy a C' ponton. Ha p' nem tartozik a γ' síkhoz, jelöljük α'-vel a $p'a'$, és β'-vel a $p'b'$ síkot, továbbá A-val és B-vel az a és a b egyenesnek azt a pontját, melynek képe α', illetve β'. Mivel az AB egyenes pontjainak és csakis ezeknek felelnek meg az α' és β' síkok metszésvonalán, vagyis a p' egyenesen átmenő síkok, azért a P és a Q pont az AB egyenesen feküdnék; ez ellentmond annak a feltevésünknek, hogy a PQ egyenes az a és b egyenesek C metszéspontján megy át. — Ebből következik, hogy a C ponton átmenő p egyenesnek egy, a γ' síkban fekvő p' egyenes felel meg.

Az eredetileg az α és β síkon értelmezett projektív leképezést a fenti előírással kiterjesztettük az egész térre olyan módon, hogy a tér minden pontjának egy sík, két különböző pontnak két különböző sík, s egy egyenesen fekvő pontoknak egy egyenesen átmenő síkok felelnek meg. A **45**.2 tételből a dualitás elve szerint következik, hogy ez a leképezés a térnek kölcsönösen egyértelmű projektív leképezése, tehát egy korreláció.

Az α és a β sík megadott projektív leképezései, melyek a két sík c metszésvonalán megegyeznek, egyértelműen meghatározzák a korrelációt. Ha ugyanis Σ és Σ' két olyan korreláció, mely az α és a β síkban megegyező, akkor $\Sigma'\Sigma^{-1}$ a térnek önmagára való kollineációja, mely az α és a β síkban az azonosság, tehát a tér azonos leképezése (**45**.6). Ebből következik, hogy $\Sigma=\Sigma'$.

Az **53**.2 tételből (vagy a **45**.9 tételből a dualitás elve alapján) levezethető az

53.3. Tétel. *Ha A, B, C, D, E öt olyan pont, mely közül bármely négy nem fekszik egy síkban, és α, β, γ, δ, ε öt olyan sík, mely közül bármely négynek nincs közös pontja, akkor van a térnek egy és csak egy olyan korrelációja, melynél az A, B, C, D, E pontnak rendre az α, β, γ, δ, ε sík felel meg.*

54. §. A tér poláris leképezései.

Értelmezés. A tér korrelatív leképezését *involutoriusnak*, vagy *poláris leképezésnek* nevezzük, ha négyzete az azonosság. A tér *polaritásánál* (azaz poláris leképezésénél) az egymásnak megfelelő pontok és síkok kétszeresen, a leképezésnél és a leképezés inverzénél egymásnak felelnek meg: ha a P pontnak a π sík, akkor a π síknak a P pont felel meg. A P pontot a π *sík pólusának*, s a π síkot a P *pont polársíkjának* nevezzük a tér megadott Ω polaritása szerint.

Értelmezés. Az Ω *polaritás szerint konjugáltnak* nevezzük a tér két tetszőleges olyan P és Q pontját, melyek közül az egyiknek a polársíkja átmegy a másik ponton. Ha a P pont π polársíkja átmegy a Q ponton, akkor a Q pont ϱ polársíkja átmegy a P ponton, mivel az egyesített helyzetű π és Q elemeknek Ω-nál ugyancsak egyesített helyzetű P és ϱ elemek felelnek meg. — Két síkot konjugáltnak nevezünk, ha az egyiknek a pólusa a másik síkban fekszik; ekkor a másiknak a pólusa az első síkban fekszik. Konjugált pontok polársíkjai konjugált síkok, és konjugált síkok pólusai konjugált pontok. — Két egyenest konjugáltnak, vagy egymás *polárisának* nevezünk, ha az egyiken fekvő pontok polársíkjai átmennek a másik egyenesen, s ekkor megfordítva is. Másszóval két egyenes akkor konjugált, ha a polaritásnál egymásnak felel meg: az egyik egyenes bármely pontja konjugált a másik egyenes mindegyik pontjához, s bármely sík, mely az egyik egyenesen átmegy, konjugált minden, a másik egyenesen átmenő síkhoz.

54.1. Tétel. *A tér Ω polaritásánál konjugált pontok vonatkozása minden olyan síkban, mely nem tartalmazza pólusát, síkbeli polaritást, s minden olyan egyenesen, mely nem metszi polárisát, involuciót létesít.*

Bizonyítás. Legyen α olyan sík, mely nem tartalmazza pólusát, az A pontot; α minden P pontjának megfelel a P pont π polársíkjának α-val való p metszésvonala. A p egyenesnek Ω-nál a $p'=PA$ egyenes felel meg; p tetszőleges Q pontjának az α síkban megfelelő q egyenes a P ponton megy át. Az α síkban a P pontok és a p egyenesek megfelelése tehát egy polaritás.

Ha a olyan egyenes, melynek nincs polárisával, az a' egyenessel közös pontja, akkor az a pontsornak Ω-nál az a' tengelyű síksor, s ennek az a egyenessel való metszéssel az a pontsor felel meg. Az a egyenesnek önmagára való leképezése, mely ilyen módon származik, projektív és involutorius, azaz involució.

Az **54.1** tétel második részéből közvetlenül, illetve a térbeli dualitás alapján adódik a következő két tétel:

54.2. *Ha az a egyenesnek nincs polárisával közös pontja, akkor az a egyenesen vagy két önmagához konjugált pont van, vagy egy sincs.*

54.3. *Ha az a egyenesnek nincs polárisával közös pontja, akkor az a egyenesen vagy két önmagához konjugált sík megy át, vagy egy sem.*

Bebizonyítjuk a következő tételt:

54.4. Tétel. *Ha a tér Ω polaritásánál az α sík önmagához konjugált, akkor vagy az α sík A polusa az egyetlen önmagához konjugált pontja az α síknak, s nincs a síkban egy önmagához konjugált egyenes sem; vagy két, az A ponton átmenő egyenes önmagához konjugált, s ezeknek összes pontja is, de a sík más pontja nem; vagy az (A, α) sugársor minden egyenese, s a sík minden pontja önmagához konjugált.*

Bizonyítás. Minden, az α síkban fekvő egyenes polárisa átmegy az A ponton; mivel α önmagához konjugált, ezért tartalmazza az A pontot. Ebből következik, hogy az α sík minden önmagához konjugált egyenese átmegy az A ponton, továbbá, hogy az (A, α) sugársor Ω-nál önmagának felel meg. Ennek a sugársornak önmagára való leképezése, melyet Ω létesít, projektív, mégpedig vagy *elliptikus* vagy *hiperbolikus involució*, vagy az *azonosság*. Az első esetben a sugársorban, s ezért az α síkban sincs önmagához konjugált egyenes; az A ponton kívül nincs az α síkban más, önmagához konjugált pont, mert különben az A pontot az α sík egy másik önmagához (és A-hoz) konjugált pontjával összekötő egyenes önmagához konjugált volna. A második esetben az α síkban két önmagához konjugált egyenes van; ezeknek összes pontja önmagához konjugált, de az α sík más pontja nem. A harmadik esetben az (A, α) sugársor minden egyenese, s az α sík valamennyi pontja önmagához konjugált.

Az **54**.4 tételből korolláriumként adódik:

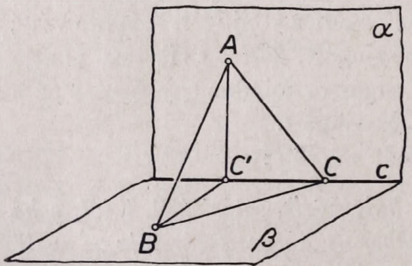
54.5. Tétel. *Ha az l egyenes különbözik polárisától, l'-től, s ha van l-nek l'-vel egy közös A pontja, akkor az A pont polársíkja az $\alpha = ll'$ sík. A két egyenesen nincs A-n kívül más önmagához konjugált pont, s egyiken sem megy át α-n kívül más önmagához konjugált sík.*

54.6. Tétel. *Ha van az Ω polaritásnál egy önmagához konjugált a egyenes, akkor a minden pontján átmegy legalább egy, a-tól különböző, önmagához konjugált egyenes, s ezek közül bármely kettő torz egymáshoz, ha a-val való metszéspontjuk különböző.*

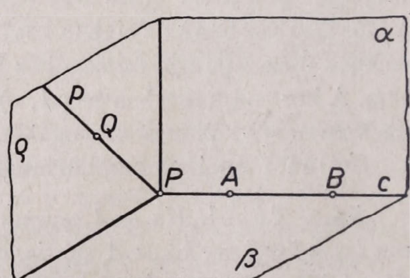
Bizonyítás. Az a egyenes tetszőleges P pontjának π polársíkja tartalmazza az a egyenest. A (P, π) sugársorban a konjugált egyenesek vonatkozása vagy az azonosság, vagy hiperbolikus involució ; nem lehet elliptikus involució, mivel a sugársor a eleme önmagához konjugált. Van tehát legalább egy, a-tól különböző p egyenes, mely a P ponton megy át, s önmagához konjugált. Ha P és Q az a egyenes két különböző pontja, ezeknek polársíkja két különböző, az a egyenesen átmenő π és ϱ sík. Ha p a π síkban, és q a ϱ síkban fekvő, a-tól különböző, önmagához konjugált egyenes, akkor p és q egymáshoz torz helyzetű.

54.7. Tétel. *Bármely két, az Ω polaritásnál önmagához konjugált α és β síkban ugyanannyi önmagához konjugált egyenes van.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az α és β sík nem konjugált egymáshoz, azaz közülök egyik sem tartalmazza a másiknak a pólusát. Jelöljük A-val és B-vel α és β pólusát, és c-vel a két sík metszésvonalát. A c egyenes tetszőleges C pontjának polársíkja átmegy az AB egyenesen, s mert ez c-hez torz, tehát C polársíkja a c egyenest egy C' pontban metszi (74. ábra). Az AC és AC' egyenesek, s ugyancsak a BC és BC' egyenesek konjugáltak egymáshoz. A c egyenesen a konjugált C, C' pontok vonatkozása az (A, α) sugársor konjugált egyeneseinek vonatkozásából, s ugyancsak a (B, β) sugársor konjugált egyeneseinek vonatkozásából a c egyenessel való metszéssel származik. Tehát az (A, α) és a (B, β) sugársorban a konjugált egyenesek vonatkozása ugyanolyan típusú.



74. ábra.



75. ábra.

Tegyük fel másodszor, hogy α és β konjugált egymáshoz ; mivel α és β önmagukhoz is konjugáltak, tehát pólusuk, A és B a két sík c metszésvonalának két különböző pontja ; a $c{=}AB$ egyenes önmagához konjugált (75. ábra). Legyen P a c egyenesnek tetszőleges, A-tól és B-től különböző pontja ; az **54**.6 tétel szerint P-n átmegy legalább egy, c-től különböző, önmagához konjugált p egyenes és ez nem tartozik sem az α, sem a β síkhoz. Felveszünk p-n egy, P-től különböző Q pontot, s ennek polársíkját jelöljük ϱ-val. A ϱ sík tartalmazza a p egyenest, de az AB egyenest nem, tehát az önmagukhoz konjugált α, β, ϱ síkok közül sem α és ϱ, sem β és ϱ nem konjugáltak egymáshoz. Az előbbi bekezdés szerint a ϱ sík önmagához konjugált egyeneseinek a száma egyenlő mind az α, mind a β sík önmagához konjugált egyeneseinek a számával.

Az **54**.4 és 7 tételből a dualitás elve alapján következik:

54.8. Tétel. *Ha A és B két önmagához konjugált pont az Ω polaritásnál, akkor mindkettőn ugyanannyi önmagához konjugált egyenes megy át.*

Ha A-n átmegy legalább egy önmagához konjugált egyenes, ez A polársíkjában, α-ban fekszik, az (A, α) sugársorhoz tartozik, s ennek a sugársornak vagy két eleme, vagy mindegyik eleme önmagához konjugált.

55. §. A tér polaritásainak osztályozása.

A polaritásokat fenti eredményeink szerint következőképpen osztályozhatjuk.

55.1. Ha a polaritásnak nincs önmagához konjugált pontja, akkor *elliptikus polaritás*nak nevezzük. Az elliptikus polaritásnak nincs önmagához konjugált síkja, sem egyenese. *Bármely két, egymáshoz konjugált egyenes torz helyzetű,* mert különben metszéspontjuk önmagához konjugált pont volna.

55.2. Ha a polaritásnak van önmagához konjugált pontja, s ha ezen legfeljebb két önmagához konjugált egyenes megy át, akkor *hiperbolikus polaritás*nak nevezzük, mégpedig *ellipszoid vagy hiperboloid típusú*nak, a szerint, hogy az A ponton nem megy át vagy átmegy két önmagához konjugált egyenes. Az **54**.8 tétel folytán ez a tulajdonság független az (önmagához konjugált) A pont választásától.

55.3. Ha a polaritásnak van olyan önmagához konjugált A pontja, melyen kettőnél több önmagához konjugált egyenes megy át, akkor *szinguláris polaritás*nak vagy *nulla-rendszer*nek nevezzük. Ebben az esetben az A pont α polársíkjában fekvő (A, α) sugársor minden egyenese, s ennek folytán az α sík minden pontja önmagához konjugált. Az (A, α) sugársorhoz tartozó bármely a egyenes pontjainak polársíkjai az a tengelyű síksor elemei, s ezek a síkok valamennyien önmagukhoz konjugáltak. E szerint a tér minden pontja egy önmagához konjugált síkban fekszik, s így *a tér minden pontja s minden síkja önmagához konjugált.*

Viszont, *ha egy polaritásnál a tér minden pontja, vagy egy sík minden pontja önmagához konjugált, akkor a polaritás szinguláris.* Ha az α sík minden pontja önmagához konjugált, akkor α pólusa, A az α síkhoz tartozik; legyen ugyanis P az α síknak egy, A-tól különböző pontja, p a P pont π polársíkjának α-val való metszésvonala; legyen Q az α síknak egy, p-hez nem tartozó pontja, és q a Q pont ϱ polársíkjának α-val való metszésvonala. A p és q egyenesek metszéspontja, vagyis az α, π, ϱ síkok metszéspontja az APQ síknak a pólusa, s mivel ez a pont, mint az α sík minden pontja, önmagához konjugált, ezért az APQ sík α-val azonos, A pedig a p és q egyenesek metszéspontja. Egy tetszőleges, az α síkban fekvő s A-tól különböző P pont polársíkja átmegy az A és a P ponton; tehát az (A, α) sugársor minden eleme önmagához konjugált, s ezért a polaritás szinguláris.

A szinguláris polaritások létezését következőképpen igazoljuk. Legyen A, B, C, D, E öt általános helyzetű pont; az

$$\alpha' = EAB, \quad \beta' = ABC, \quad \gamma' = BCD, \quad \delta' = CDE, \quad \varepsilon' = DEA$$

síkok szintén általános helyzetűek. Az **53**.3 tétel szerint van a térnek egy és csak egy olyan Ω korrelatív leképezése, mely az A, B, C, D, E pontnak az $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'$ síkot felelteti meg. Az $\alpha' = EAB$ síknak Ω-nál az $\varepsilon', \alpha', \beta'$ síkok metszéspontja, vagyis az A pont felel meg, hasonlóan β'-nak B, stb. Tehát Ω^2-nél A, B, C, D, E fixpontok, Ω^2 a tér azonos leképezése (**45**.5), s ezért Ω egy poláritás. Az AB, BC, CD, DE, EA egyenesek közül mindegyik önmagához konjugált; például az AB egyenes polárisa az $\alpha' = EAB$ és $\beta' = ABC$ síkok AB metszésvonala. — Mivel a CD egyenes önmagához konjugált, a rajta átmenő ACD sík is önmagához konjugált, s pólusa a CD egyenesnek az $\alpha' = EAB$ síkkal való P metszéspontja. Az AP egyenes önmagához konjugált, mivel az A pont $\alpha' = EAB$ polársíkjának, s a P pont ACD polársíkjának metszésvonala AP. Az α' síkban fekvő AB, AE, AP egyenesek különböznek egymástól, mivel az A, B, C, D, E pontok közül bármely négy nem tartozik egy síkhoz; mindhárom egyenes konjugált önmagához, s ezért Ω szinguláris polaritás.

55.4. Tétel. *Ha Ω a tér valamely polaritása és* **T** *a tér kollineációja, akkor Ω-nak* **T**-vel *való transzformáltja: $\Omega' = \mathbf{T}^{-1}\Omega\mathbf{T}$ szintén polaritás, s ez ugyanolyan típusú, mint Ω.*

Ugyanis az Ω' korreláció négyzete az azonosság, mivel

$$\Omega'^2 = \mathbf{T}^{-1}\Omega^2\mathbf{T}, \quad \text{és} \quad \Omega^2 = \mathbf{I},$$

tehát Ω' is polaritás. Bármely két, Ω-nál egymáshoz konjugált elemnek **T**-nél két olyan elem felel meg, melyek Ω'-nél egymáshoz konjugáltak. Ebből következik a tétel állítása.

További tárgyalásunkból kizárjuk a szinguláris polaritásokat, ezentúl polaritáson mindig nem-szinguláris polaritást értünk.

A tér korrelációi között a polaritásokat a következő tulajdonság jellemzi:

55.5. Tétel. *Ha a tér valamely korrelációjánál egy $ABCD$ tetraéder A, B, C, D csúcsának rendre az átellenes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ lap felel meg, akkor a korreláció egy (nem szinguláris) polaritás.*

Bizonyítás. Feltételeink folytán a megadott Ω korrelációnál az AB egyenesnek az α és β síkok metszésvonala, vagyis a CD egyenes felel meg; hasonlóan a tetraéder minden élének képe az átellenes él. Az $ABC=\delta$ síknak az α, β, γ síkok D metszéspontja felel meg. Az Ω^2 kollineációnál tehát az $ABCD$ tetraéder csúcsai, élei és lapjai invariáns elemek. Az Ω korreláció az α síkban egy korrelációt származtat, melynél α bármely P pontjának a $\pi = \Omega(P)$ síknak az α síkkal való p metszésvonala felel meg; mivel az α sík önmagára való korrelációjánál a BCD háromszög minden csúcsának az átellenes oldal felel meg, a **35**.1 tétel szerint ennek a korrelációnak a négyzete az α sík azonos leképezése, s ez megegyezik az Ω^2 kollineáció által az α invariáns síkban származtatott leképezéssel. Hasonlóan Ω^2 a β síkban is az azonos leképezést származtatja; ebből következik, hogy Ω^2 a tér azonos leképezése (**45**.6). Tehát Ω térbeli polaritás, mely nem szinguláris, mivel az egymásnak megfelelő A pont és α sík nem egyesített helyzetű.

Értelmezés. Az $ABCD$ tetraédert az Ω polaritáshoz tartozó *poláris tetraéder*nek nevezzük, ha minden csúcsának polársíkja a tetraéder átellenes lapja. Az értelmezésből következik, hogy *a poláris tetraéder két-két átellenes éle egymásnak a polárisa.*

55.6. Tétel. *Minden polaritáshoz tartozik legalább egy poláris tetraéder.*

Bizonyítás. Van legalább egy olyan A pont, mely nem fekszik polársíkjában, az α síkban (különben a polaritás szinguláris volna). Az α síkban származtatott polaritáshoz tartozik legalább egy BCD poláris háromszög (**35**.6). $ABCD$ poláris tetraéder.

55.7. Tétel. *Ha l és l' két egymáshoz torz helyzetű konjugált egyenes, akkor van olyan poláris tetraéder, melynek ezek átellenes élei.*

Bizonyítás. Az l és az l' egyenesen a konjugált pontok vonatkozása egy-egy involució ; legyen A és B az l egyenes két különböző, konjugált pontja, C és D az l' egyenes két különböző, konjugált pontja. Az A ponthoz konjugáltak a B, C, D pontok, s ezek nem feküsznek egy egyenesen, tehát a BCD sík az A pont polársíkja ; hasonlóan a többi pontokra. E szerint $ABCD$ poláris tetraéder.

55.8. *A különböző fajtájú polaritások létezését* a poláris tetraéder segítségével következőképpen igazoljuk. Felveszünk egy tetszőleges $ABCD$ tetraédert, egy E pontot, mely nem tartozik a tetraéder egyik lapjához sem, és egy ε síkot, mely nem megy át a tetraéder egyik csúcsán sem. *Van a térnek egy és csak egy olyan Ω polaritása, melynek poláris tetraédere $ABCD$, s melynél az E pont polársíkja ε.* Ugyanis az **53**.3 tétel szerint van a térnek egy és csak egy olyan korrelációja, melynél az A, B, C, D, E pontnak az $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sík felel meg, s az **55**.5 tétel szerint ez egy nem szinguláris polaritás.

Az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tetraéderlapok által meghatározott nyolc tetraédertartomány között van egy és csak egy olyan, melynek nincs az ε síkkal közös pontja (**44**.6) ; ha ebben a tartományban vesszük fel az E pontot, akkor *Ω elliptikus polaritás.* Ebben az esetben ugyanis az ε síknak az α síkkal való e' metszésvonala, s az AE egyenesnek az α síkkal közös E' pontja az α sugármező és pontmező egymásnak megfelelő tartományához tartozik (**25**.7), vagyis az $\alpha = BCD$ síkban az E' pontot tartalmazó BCD háromszögtartománynak nincs az e' egyenessel közös pontja. Az $\alpha = BCD$ lapon Ω elliptikus polaritást származtat (**36**.1), s hasonlóan a többi tetraéderlapon is. Az Ω polaritás az $ABCD$ tetraéder mindegyik élén egy-egy elliptikus involuciót származtat. Ha a tér valamely P pontja, mely nem tartozik a tetraéder egyik lapjához sem, a P pont π polársíkjához tartoznék, akkor π-nek a tetraéder valamelyik élével való Q metszéspontja a P-t tartalmazó τ_0 tetraédertartomány határához tartoznék (**44**.3). Tegyük fel például, hogy Q az AB él pontja ; Q polársíkja a $\varrho = PCD$ sík, ennek AB-vel való Q' metszéspontja szintén a τ_0 tartomány határához tartozik, s ezért az A, B és Q, Q' pontpárok nem választják el egymást az AB

egyenesen. Az Ω által az AB egyenesen származtatott involuciónál A és B egymásnak, Q és Q' egymásnak felel meg, s ez az involució a **14**.3 tétel szerint hiperbolikus volna, fenti megállapításunkkal ellentétben. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt :

55.9. Tétel. *Ha a tér Ω polaritása egy poláris tetraéder mindegyik élén elliptikus involuciót, akkor a tetraéder mindegyik lapján elliptikus polaritást származtat, és Ω a tér elliptikus polaritása. Bármely P pont, mely nem tartozik az $ABCD$ tetraéder egyik lapjához sem, s ennek π polársíkja a pont- és síktér egymásnak megfelelő tartományához tartozik, azaz π-nek nincs a P-t tartalmazó tetraédertartománnyal közös pontja.*

*Hiperbolikus polaritás*ok meghatározása céljából elegendő, ha az E pontot magában az ε síkban vesszük fel ; ekkor ugyanis E önmagához konjugált pont, s Ω hiperbolikus polaritás.

Az ε síkot az $ABCD$ tetraéder lapjaival való metszésvonalai hét tartományra osztják fel, melyek közül négy háromszögtartomány és három négyszögtartomány. Ezek közül az egyik *négyszögtartományban* vegyük fel először az E pontot. Az ε síknak a tetraéder éleivel való metszéspontjai közül négy tartozik az E pontot tartalmazó τ_0 tetraédertartomány határához, s a megfelelő négy él közül kettőkettő átellenes (**44**.4) ; legyenek ezek például AB, CD, AD, BC. Az **55**.9 tétel levezetésében már alkalmazott meggondolás szerint az Ω polaritás e közül a négy él közül mindegyiken hiperbolikus involuciót létesít. Az AB és CD átellenes éleken fekvő, önmagukhoz konjugált pontokat jelöljük P, P'-vel és Q, Q'-vel. A PCD sík önmagához konjugált, pólusa a P pont, s ennek a síknak PQ és PQ' egyenesei önmagukhoz konjugáltak. Az Ω polaritás ebben az esetben *hiperboloid típusú hiperbolikus polaritás.*

Vegyük fel másodszor az E pontot az ε síknak egy olyan *háromszögtartományában*, melyet az $ABCD$ tetraéder lapjaival való metszésvonalak határoznak meg. Az ε sík és a tetraéder éleinek metszéspontjai közül ebben az esetben három tartozik az E pontot tartalmazó τ_0 tetraédertartomány határához, s a tetraéder illető három éle egy ponton, például az A ponton megy át (**44**.5). Az Ω polaritás az AB, AC, AD éleken hiperbolikus involuciót, s a **36**.1 tétel folytán a BC, CD, DB élek közül mindegyiken elliptikus involuciót, továbbá az ABC, ACD, ABD lapokon hiperbolikus, és a BCD lapon elliptikus polaritást származtat. Mivel a BCD síkban nincs önmagához konjugált pont, az Ω polaritásnál nincs önmagához konjugált egyenes; ugyanis egy önmagához konjugált egyenes minden pontja, így a BCD síkkal közös pontja is önmagához konjugált. E szerint *Ω ellipszoid típusú hiperbolikus polaritás.* Jegyezzük meg, hogy a tetraéder bármely két átellenes élén Ω különböző típusú (egyiken elliptikus, másikon hiperbolikus) involuciót származtat. Eredményünket a következő tételben foglaljuk össze:

55.10. Tétel. *Ha a tér Ω polaritása hiperbolikus, s ha $ABCD$ egy poláris tetraéder, akkor Ω vagy két átellenes élen származtat elliptikus, s a többi négy élen hiperbolikus involuciót, s ez esetben hiperboloid típusú; vagy egy csúcshoz tartozó három élen származtat hiperbolikus, s a többi három élen elliptikus involuciót, s ez esetben Ω ellipszoid típusú hiperbolikus polaritás.*

Ebből és az **55**.7 tételből korolláriumként adódik:

55.11. Tétel. *Legyen l és l' két tetszőleges torz, egymáshoz konjugált egyenes. Ha Ω ellipszoid típusú hiperbolikus polaritás, akkor az Ω-nál konjugált pontok l és l' közül az egyiken hiperbolikus, a másikon elliptikus involuciót alkotnak. Ha Ω hiperboloid típusú hiperbolikus polaritás, akkor a konjugált pontok mindkét egyenesen ugyanolyan típusú involuciót alkotnak.*

55.12. Tétel. *A térnek bármely két, megegyező típusú polaritása aequivalens egymással, vagyis az egyik átvihető a másikba a tér kollineációjával való transzformálással.*

Bizonyítás. Legyen Ω és Ω' két *elliptikus* polaritás, $ABCD$ és $A'B'C'D'$ ezeknek egy-egy poláris tetraédere. Az $ABCD$ tetraéder mindegyik élén elliptikus involuciót alkotnak az Ω-nál konjugált pontok; ennek az involuciónak s az illető élhez tartozó két csúcspontra vonatkozó harmonikus involuciónak van egy közös pontpárja (**16**.5). Az AB, CD, AC, BD, AD, BC éleken ilyen módon meghatározott pontpárokat jelöljük sorban:

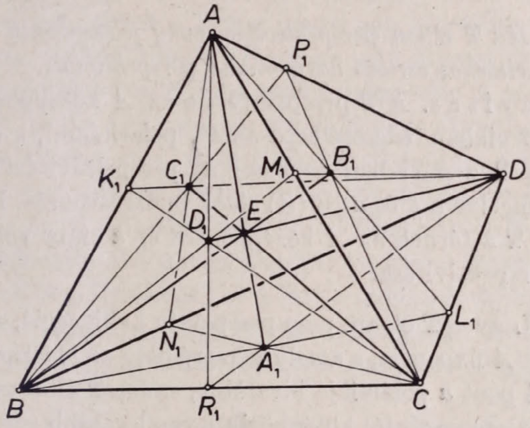
$$K_1, K_2, L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2, P_1, P_2, R_1, R_2\text{-}$$

vel. A jelöléseket válasszuk úgy, hogy az 1 indexszel ellátott pontok az $ABCD$ tetraéder által meghatározott tartományok közül egynek a határához tartozzanak (76. ábra.). Az AR_1, BM_1, CK_1 egyenesek egy D_1 ponton mennek át, az R_2, M_2, K_2 pontok egy d_1 egyenesen: a D_1 pontnak az ABC háromszögre vonatkozó polárisán feküsznek

(**36**.2). Hasonlóan értelmezzük az A_1, B_1, C_1 pontokat s az a_1, b_1, c_1 egyeneseket. Az

$$L_2 N_2 R_2, \quad L_2 M_2 P_2, \quad K_2 N_2 P_2, \quad K_2 M_2 R_2$$

ponthármasok rendre az a_1, b_1, c_1, d_1 egyenesen feküsznek, tehát a négy egyenes közül bármely kettőnek van, de bármely háromnak nincs közös pontja, e szerint a négy egyenes egy ε síkban fekszik. Az ε síknak Ω-nál az AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 egyenesek közös E pontja felel meg. Az E pontnak az $ABCD$ tetraéderre vonatkozó polársíkja ugyancsak az ε sík. Hasonlóan határozzuk meg az E' pontot és az ε' síkot, melyek egymásnak felelnek meg mind Ω'-nél, mind az



76. ábra.

$A'B'C'D'$ tetraéderre vonatkozó polaritásnál. Az A, B, C, D, E pontokat az A', B', C', D', E' pontokba átviszi a térnek egy és csak egy **T** kollineációja (**45**.9) s ez az ε síkot az ε' síkba viszi át (**46**.4). Az Ω polaritásnak **T**-vel való transzformáltja az Ω' polaritás (**53**.3 és **55**.4).

Hasonló meggondolással igazolhatjuk a poláris tetraéder segítségével a fenti tétel állítását ellipszoid, illetve hiperboloid típusú hiperbolikus polaritások esetében is. Erre vonatkozóan lásd a **74**.9 és a **80**.1 tételt is.

A tér elliptikus polaritásával felcserélhető kollineációk.

Legyen Ω a tér elliptikus polaritása. A tér **T** harmonikus perspektivitását az *Ω polaritáshoz tartozó harmonikus perspektivitásnak* nevezzük, ha középpontja a perspektivitás síkjának Ω-nál megfelelő pólus.

55.13. *Az Ω polaritáshoz tartozó bármely* **T** *harmonikus perspektivitás felcserélhető Ω-val.*

Bizonyítás. Legyen **T** olyan harmonikus perspektivitás, amelynek középpontja A és perspektivitási síkja $\alpha = \Omega(A)$. Az A ponton átmenő tetszőleges β síkban a **T** által származtatott harmonikus perspektivitás felcserélhető az Ω által származtatott Ω_β elliptikus polaritással (**37**.2), vagyis $\mathbf{T}^{-1}\,\Omega_\beta\,\mathbf{T}\Omega_\beta$ a β sík azonos leképezése. Ez megegyezik a $\mathbf{T}^{-1}\,\Omega\mathbf{T}\Omega$ által a β síkban származtatott leképezéssel; ugyanis a β sík polusa, B az α síkhoz tartozik s ezért fixpontja a **T** leképezésnek. Mivel β az A ponton átmenő tetszőleges sík, ezért az egész térben: $\mathbf{T}^{-1}\Omega\mathbf{T}\Omega = \mathbf{I}$, azaz: $\mathbf{T}\Omega = \Omega\mathbf{T}$.

55.14. *Ha* **T** *olyan perspektivitás, mely felcserélhető Ω-val, akkor* **T** *az Ω polaritáshoz tartozó harmonikus perspektivitás.*

Bizonyítás. A **T** perspektivitás az A középponton átmenő tetszőleges β síkban felcserélhető az Ω_β polaritással, s ezért a **37**.3 tétel szerint **T** a β síkban harmonikus perspektivitást származtat, amelynek tengelye a β és $\alpha = \Omega(A)$ síkok metszésvonala. Ebből következik, hogy **T** a térnek az A középpontra és α síkra vonatkozó harmonikus perspektivitása.

55.15. Legyen **T** olyan, nem perspektív kollineáció, melynek van legalább egy A fixpontja, s amely felcserélhető az Ω elliptikus polaritással. Az A pont α polársíkja invariáns, ennek **T** által származtatott leképezése az azonosságtól különbözik, s van legalább egy B fixpontja (**28**.1). Az AB invariáns egyenesen **T** által származtatott leképezés felcserélhető az Ω-nál konjugált pontok elliptikus involuciójával; ez a leképezés tehát vagy az azonosság, vagy az egyenesnek az A, B fixpontokra vonatkozó harmonikus involuciója. Az utóbbi esetben **T**-nek az A középpontra és α síkra vonatkozó $\mathbf{T}_1$ harmonikus perspektivitással való $\mathbf{T}_1\mathbf{T}$ szorzata, mely **55**.13 folytán szintén felcserélhető Ω-val, az AB egyenesen az azonos leképezést származtatja.

Az α invariáns síkban **T** által származtatott kollineáció felcserélhető az Ω által származtatott Ω_α elliptikus polaritással, s ezért a **37**.3 tétel szerint előállítható két olyan $\mathbf{t}_2$ és $\mathbf{t}_3$ harmonikus perspektivitás szorzataként, melynek középpontja: C és D konjugált a B ponthoz, s tengelye: c és d átmegy a B ponton. Jelöljük $\mathbf{T}_2$-vel és $\mathbf{T}_3$-mal a térnek azt a két harmonikus perspektivitását, melynek középpontja C, illetve D, s perspektivitási síkja az Ac, illetve az Ad sík. Ezeknek $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3$ szorzata az α síkban megegyezik **T**-vel, s az AB egyenesen az azonos leképezést származtatja. E szerint $\mathbf{T}$, vagy $\mathbf{T}_1\mathbf{T}$ azonos a $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3$ kollineációval, tehát $\mathbf{T}$ *előállítható az Ω-val felcserélhető* $\mathbf{T}_2$ *és* $\mathbf{T}_3$, *illetve* $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ *és* $\mathbf{T}_3$ *harmonikus perspektivitások szorzataként.*

55.16. Ha $\mathbf{T}$ az AB egyenesen az azonos leképezést származtatja, akkor AB a $\mathbf{T}$ *kollineáció ponttengelye.* Ha az α sík $\mathbf{T}$ által származtatott leképezése egy harmonikus perspektivitás, akkor ennek tengelye egy másik ponttengely, s ez esetben $\mathbf{T}$ *kettőstengelyű hiperbolikus involució.* Ha pedig $\mathbf{T}$ az α síknak *III* típusú leképezése, ennek invariáns egyenese $\mathbf{T}$-nek síktengelye, s $\mathbf{T}$ a tér *elliptikus típusú, általános tengelyes kollineációja.*

Ha $\mathbf{T}$ az AB egyenesen az A, B fixpontokra vonatkozó harmonikus involució, akkor a térben vagy egy *elliptikus típusú általános tengelyes kollíneációnak a szorzata* egy olyan, *Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitással,* amelynek középpontja a ponttengelyen fekszik, vagy pedig harmonikus perspektivitás (középpontja A és síkja α, vagy középpontja B és síkja az A ponton, s az α síkban származtatott harmonikus perspektivitás tengelyén átmenő sík).

55.17. Ha az Ω elliptikus polaritással felcserélhető $\mathbf{T}$ kollineációnak nincs fixpontja, akkor van legalább egy a invariáns egyenese (**57**.2), s ennek Ω-nál származó a' polárisa szintén invariáns. Az a, a' invariáns egyeneseken $\mathbf{T}$ egy-egy elliptikus leképezést létesít, mely felcserélhető az illető egyenesen Ω által származtatott elliptikus involucióval.

Legyen $\mathbf{T}_1$ a tér olyan harmonikus perspektivitása, melynek középpontja az a egyenesen fekszik, s perspektivitási síkja a középpont polársíkja, amely az a' egyenesen megy át. Legyen továbbá $\mathbf{T}_2$ olyan harmonikus perspektivitás, amelynek középpontja a' valamely pontja s perspektivitási síkja ennek polársíkja. A két harmonikus perspektivitás $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ szorzata a tér kettőstengelyű hiperbolikus involuciója, amelynek két tengelye : a perspektivitási középpontokat összekötő egyenes, s a perspektivitási síkok metszésvonala.

A $\mathbf{T}\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ kollineáció mind az a, mind az a' egyenesen egy-egy, az irányítást megfordító, tehát hiperbolikus leképezést létesít, mely felcserélhető az Ω-nál konjugált pontok elliptikus involuciójával ; ezek tehát hiperbolikus involuciók, fixpontjaikat jelöljük B, C-vel és B', C'-vel. A $BB'C'$ invariáns síkban a $BB'C'$ invariáns háromszög egyik oldalán, t. i. a $B'C'=a'$ egyenesen a $\mathbf{T}\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ leképezés megfordítja az irányítást, s ezért a másik két oldal közül az egyiken megfordítja, a másikon megtartja az irányítást (**30**.3). A jelöléseket válasszuk úgy, hogy a BB' egyenesen megmaradjon az irányítás. Mivel a BCC' invariáns háromszög BC és BC' oldalain a $\mathbf{T}\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ leképezés megfordítja, ezért a CC' oldalon megtartja az irányítást. A BB' és CC' torz egyenesek minden pontja fixpont a $\mathbf{T}\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ leképezésnél; mivel ez a leképezés involutórius, ebből következik, hogy $\mathbf{T}\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ a tér *kettőstengelyű hiperbolikus involuciója.* Mivel $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ is kettőstengelyű hiperbolikus involució, tehát $\mathbf{T}$ *előállítható két kettőstengelyű hiperbolikus involució szorzataként;* a két hiperbolikus involució közül mindegyiknek két tengelye konjugált egymáshoz az Ω polaritásnál. Ha a két hiperbolikus involució négy tengelyének van a-n és a'-n kívül még egy közös tranzverzálisa, akkor $\mathbf{T}$ *a tér kettőstengelyű elliptikus kollineációja;* ellenkező esetben *fixpont és invariáns sík nélküli kollineáció két invariáns egyenessel* (l. **50**.5).

55.18. *Egy kettőstengelyű hiperbolikus involució akkor és csak akkor cserélhető fel Ω-val, ha a tengelyek konjugáltak.*

Bizonyítás. Ha az Ω-val felcserélhető $\mathbf{T}$ kollineációnak ponttengelye a, ennek a' polárisa síktengely; ha a, akkor tehát a' is kettőstengely. — Ha pedig a $\mathbf{T}$ kettőstengelyű hiperbolikus involució a és a' tengelye konjugált egymáshoz, akkor a két tetszőleges konjugált pontja legyen B és C; ezeknek polársíkja $\beta=Ca'$ és $\gamma=Ba'$. A B középpontra és a β síkra vonatkozó $\mathbf{T}_1$, s ugyancsak a C középpontra és a γ síkra vonatkozó $\mathbf{T}_2$ harmonikus perspektivitás felcserélhető Ω-val; ezek szorzata, vagyis a $\mathbf{T}$ kettőstengelyű hiperbolikus involució szintén felcserélhető Ω-val.

Tárgyalásunk eredményét a következő tételben foglaljuk össze:

55.19. Tétel. *A tér Ω elliptikus polaritásával a következő kollineációk cserélhetők fel:*

a) *Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitás* (azaz olyan, amelynek középpontja a perspektivitási sík pólusa).

b) *Kettőstengelyű hiperbolikus involució, amelynek tengelyei egymáshoz konjugált egyenesek;* előállítható két, Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitás szorzataként, melyeknek középpontja konjugált.

c) Két Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitás szorzata, melynek középpontja nem konjugált egymáshoz; ez *elliptikus típusú, általános tengelyes kollineáció, amelynek pont- és síktengelye egymásnak polárisa.*

d) *Az előbbi leképezés szorzata egy Ω-hoz tartozó, olyan harmonikus perspektivitással, amelynek középpontja a ponttengelyen fekszik.* Ennek a leképezésnek két fixpontja van s két invariáns síkja ; a két fixpont közül egyik sem tartozik a két invariáns sík metszésvonalához ; az invariáns egyenesek : a két fixpontot összekötő egyenes, és a két invariáns sík metszésvonala (l. **50**.3 tétel, 3) típus).

e) *Kettőstengelyű elliptikus kollineáció, mely előállítható két, Ω-val felcserélhető kettőstengelyű hiperbolikus involució szorzataként.*

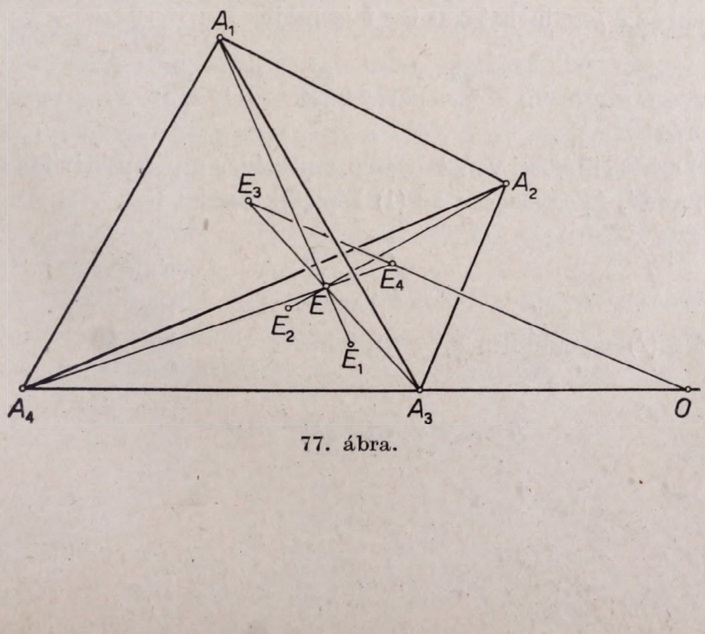
f) *Fixpont és invariáns sík nélküli kollineáció két invariáns egyenessel,* mely ugyancsak előállítható két, Ω-val felcserélhető kettőstengelyű hiperbolikus involució szorzataként.

55.20. *Valamennyi, Ω-val felcserélhető kollineáció előállítható Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitások szorzataként.*

56. §. Homogén koordináták a térben.

A térben homogén koordináták meghatározása céljából felveszünk négy, nem egy síkban fekvő A_1, A_2, A_3, A_4 pontot, ezeket *alappontoknak*, s az $A_1A_2A_3A_4$ tetraédert *alaptetraédernek* nevezzük ; továbbá egy E *egységpontot*, mely nem tartozik a tetraéder egyik lapjához sem. Az E pontot a tetraéder A_i csúcsából az átellenes lapra vetítjük, s a vetületet E_i-vel jelöljük ($i=1, 2, 3, 4$). Ha P tetszőleges más olyan pont, mely nem tartozik a tetraéder egyik lapjához sem, P_i-vel jelöljük P-nek az A_i csúcsból az átellenes lapra való vetületét.

A tetraéder $A_1A_2A_3$ lapján (vagyis az $A_1A_2A_3$ síkban) bevezetjük az (x_1, x_2, x_3) homogén pontkoordinátákat az $A_1A_2A_3$ alapháromszögre s az E_4 egységpontra vonatkozóan. (l. 40. §). Hasonlóan



77. ábra.

bevezetjük az $A_2A_3A_4$, az $A_1A_3A_4$ és az $A_1A_2A_4$ alapháromszögre s rendre az E_1, E_2, E_3 egységpontra vonatkozó homogén pontkoordinátákat a tetraéder többi lapjain, s ezeket jelöljük (y_2, y_3, y_4), (z_1, z_3, z_4) és (t_1, t_2, t_4)-gyel.

Az A_3A_4 és E_4E_3 egyenesek egy síkban, t. i. az A_3A_4E síkban feküsznek, metszéspontjukat jelöljük O-val. Az O pontból való vetítésnél az $A_1A_2A_3$ sík A_1, A_2, A_3, E_4 pontjainak az $A_1A_2A_4$ síkban az A_1, A_2, A_4, E_3 pontok felelnek meg (77. ábra) ; ezt a perspektív leképezést a koordináták következő transzformációja fejezi ki (l. 41. §, (5) képlet) :

$$x_1 = t_1, \quad x_2 = t_2, \quad x_3 = t_4. \tag{1}$$

E szerint az $A_1A_2A_3$ és az $A_1A_2A_4$ síkban bevezetett projektív koordináták az O pontból való vetítésnél egymásnak felelnek meg.

Legyen P tetszőleges olyan pont, mely nem tartozik az alaptetraéder egyik lapjához sem ; P-nek az A_3 és az A_4 csúcsból az átellenes lapra való P_3 és P_4 vetülete, továbbá az A_3 és A_4 pontok egy síkban feküsznek ; az A_3A_4 és P_4P_3 egyenesek metszéspontját jelöljük O'-vel. Az O' pontból való vetítésnél az $A_1A_2A_3$ alapháromszög csúcsainak az $A_1A_2A_4$ síkban az $A_1A_2A_4$ alapháromszög csúcsai felelnek meg, tehát ezt a leképezést a koordináták következő transzformációja fejezi ki :

$$x_1 = a_{11} t_1, \quad x_2 = a_{22} t_2, \quad x_3 = a_{44} t_4. \tag{2}$$

A P_3 és a P_4 pont koordinátáit jelöljük (t_1^0, t_2^0, t_4^0)-val és (x_1^0, x_2^0, x_3^0)-val ; ezekkel az a_{ii} együtthatókat így fejezhetjük ki :

$$a_{11} = \frac{x_1^0}{t_1^0}, \quad a_{22} = \frac{x_2^0}{t_2^0}, \quad a_{44} = \frac{x_3^0}{t_4^0}.$$

Mivel a két sík közti vonatkozás perspektív, s a perspektivitás tengelyén, az A_1A_2 egyenesen az (1) képletek szerint

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{t_1}{t_2},$$

ezért a (2) egyenletben $a_{11}=a_{22}$, tehát

$$\frac{x_1^0}{x_2^0} = \frac{t_1^0}{t_2^0}.$$

Jelöljük a P pont P_1 és P_2 vetületének koordinátáit (y_2^0, y_3^0, y_4^0)-val és (z_1^0, z_3^0, z_4^0)-val; hasonló meggondolással kapjuk a következő egyenlőségeket:

$$\frac{x_1^0}{x_2^0}=\frac{t_1^0}{t_2^0},\ \frac{x_2^0}{x_3^0}=\frac{y_2^0}{y_3^0},\ \frac{x_1^0}{x_3^0}=\frac{z_1^0}{z_3^0},\ \frac{t_1^0}{t_4^0}=\frac{z_1^0}{z_4^0},\ \frac{t_2^0}{t_4^0}=\frac{y_2^0}{y_4^0},\ \frac{y_3^0}{y_4^0}=\frac{z_3^0}{z_4^0}.$$

Ha tehát bevezetjük az

$$x_1=x_1^0,\ x_2=x_2^0,\ x_3=x_3^0,\ x_4=\frac{x_1^0}{t_1^0}t_4^0$$

számnégyest, akkor fennállanak a következő arányok:

$$x_1:x_2:x_3=x_1^0:x_2^0:x_3^0,\quad x_2:x_3:x_4=y_2^0:y_3^0:y_4^0,$$
$$x_1:x_3:x_4=z_1^0:z_3^0:z_4^0,\quad x_1:x_2:x_4=t_1^0:t_2^0:t_4^0.$$

A P pontnak az (x_1, x_2, x_3, x_4) számnégyest feleltetjük meg, mint *homogén (projektív) koordinátákat;* ezt a számnégyest a P pont egy arányossági tényezőtől eltekintve egyértelműen meghatározza.

A P pont vetületeinek a tetraéderlapokon megfelelő koordinátahármasokat a P pont (x_1, x_2, x_3, x_4) koordinátanégyeséből egy-egy elemének elhagyásával kapjuk. Ezekhez a vetületekhez a $(0, x_2, x_3, x_4)$, $(x_1, 0, x_3, x_4)$, $(x_1, x_2, 0, x_4)$, $(x_1, x_2, x_3, 0)$ számnégyeseket rendeljük hozzá mint térbeli homogén koordinátákat. E szerint az $A_1A_2A_3$ sík bármely pontjához, melynek az $A_1A_2A_3$ alapháromszögre és az E_4 egységpontra vonatkozó koordinátái: (x_1, x_2, x_3), az $(x_1, x_2, x_3, 0)$ térbeli koordinátákat rendeljük hozzá; hasonlóan vezetjük be a koordinátákat a másik három tetraéderlapon.

Minden P pontnak megfelel a fenti előírás szerint egy, arányossági tényezőtől eltekintve, egyértelműen meghatározott (x_1, x_2, x_3, x_4) számnégyes, melynek nem minden eleme 0, s megfordítva, minden (x_1, x_2, x_3, x_4) számnégyesnek, kivéve $(0, 0, 0, 0)$-t, megfelel egy és csak egy P pont. Az E egységpontnak az $(1, 1, 1, 1)$ számnégyes s az ezzel arányos $(\lambda, \lambda, \lambda, \lambda)$ számnégyesek felelnek meg. Az A_i pont koordinátái: $x_i=1$, a többi $x_k=0$. Az A_1A_2 élen fekvő pontok koordinátái közül $x_3=x_4=0$, stb.

A térbeli koordináták értelmezéséből s a síkbeli koordinátákra vonatkozó eredményeinkből következik, hogy bármely, az A_4 csúcson átmenő α sík pontjainak (x_1, x_2, x_3, x_4) koordinátái egy

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0 \tag{3}$$

alakú lineáris egyenletnek tesznek eleget; ez ugyanis az α és az $A_1A_2A_3$ sík a metszésvonalának az egyenlete az $A_1A_2A_3$ síkban bevezetett (x_1, x_2, x_3) koordinátákban. Viszont minden olyan a $(0, 0, 0, 0)$-tól különböző (x_1, x_2, x_3, x_4) számnégyes, mely kielégíti a fenti egyenletet, olyan P pontnak a koordinátája, mely az A_4 csúcson s az a egyenesen átmenő α síkhoz tartozik. — Hasonlóan, az A_i csúcson átmenő síkokat olyan lineáris egyenletek fejezik ki, melyekben x_i együtthatója 0, s az A_iA_k élen átmenő síkok egyenletében x_i és x_k együtthatója 0.

Az egyenesek analitikus kifejezését lineáris egyenletpárok adják. Ha a olyan egyenes, mely átmegy az A_4 csúcson, s az átellenes lapot a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 0)$ koordinátájú pontban metszi, akkor a bármely P pontjának (x_1, x_2, x_3, x_4) koordinátáira fennáll az

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$$

arány; e szerint

$$\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 = 0, \qquad \lambda_3 x_1 - \lambda_1 x_3 = 0. \tag{4}$$

Ez annak a két síknak az egyenlete, mely az a egyenesen s az A_3A_4, illetve az A_2A_4 élen megy át. — Egy tetszőleges olyan a egyenes kifejezésére, mely nem megy át az alaptetraéder egyik csúcsán sem, vegyük fel az a egyenesen s az A_3, illetve az A_4 csúcson átmenő síkok egyenletét; legyenek ezek:

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_4 x_4 = 0, \qquad w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 = 0\,; \tag{5}$$

ez az egyenletpár *az a egyenes analitikus kifejezése.*

Ebből levezethető az egyenes következő paraméteres előállítása bármely két (y_1, y_2, y_3, y_4) és (z_1, z_2, z_3, z_4) pontjának koordinátáival:

$$x_i = \lambda y_i + \mu z_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{6}$$

Ha ugyanis az y_i és a z_i számnégyes kielégíti az (5) egyenletpárt, akkor nyilván az x_i számnégyes is, bármely (a 0, 0-tól különböző) értékek is λ és μ; viszont minden olyan x_i számnégyest, mely kielégíti az egyenletpárt, annak két y_i és z_i megoldásával a (6) alakban fejezhetünk ki.

Egy tetszőleges *sík analitikus kifejezésé*nek megállapítására vegyünk fel az adott α síkban egy a egyenest, s egy, a-hoz nem tartozó Q pontot. Az α sík bármely P pontja egy, a Q ponton s az a egyenes valamely A pontján átmenő egyenesen fekszik. Ha az a egyenest az

(5) egyenletpárral fejezzük ki, s a Q pont koordinátáit q_i-vel jelöljük, az AQ egyeneseken fekvő pontok x_i koordinátái, és csakis ezek, kielégítik a következő egyenletet:

$$\begin{aligned}(v_1x_1+v_2x_2+v_4x_4)(w_1q_1+w_2q_2+w_3q_3)-\\ -(w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3)(v_1q_1+v_2q_2+v_4q_4)=0.\end{aligned} \tag{7}$$

Jelöljük az (5) alatti egyenletek baloldalát röviden $V(x)$, $W(x)$-szel. Ha az a egyenes A pontjának koordinátái y_i, akkor a (6) képletek szerint kifejezzük az AQ egyenes tetszőleges P pontjának x_i koordinátáit:

$$x_i=\lambda y_i+\mu q_i,$$

s behelyettesítjük a (7) kifejezésbe; tekintettel a $V(y)=W(y)=0$ egyenletekre, így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}V(x)W(q)-W(x)V(q)=[\lambda V(y)+\mu V(q)]W(q)-\\ -[\lambda W(y)+\mu W(q)]V(q)=0,\end{aligned}$$

Megfordítva, ha az x_i számokra fennáll a (7) egyenlet, legyen

$$\lambda':\mu'=-V(q):V(x)=-W(q):W(x);$$

az $y_i=\lambda' x_i+\mu' q_i$ számok kielégítik a $V(y)=W(y)=0$ egyenletpárt, vagyis az y_i koordinátájú pont az a egyeneshez, s ezért az x_i koordinátájú pont az $\alpha=aQ$ síkhoz tartozik.

A (7) egyenletet az x_i változók szerint rendezve, az

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0 \tag{8}$$

alakú egyenletet kapjuk; ez az *a sík egyenlete.* Minden (8) alakú egyenlet, melynek u_i együtthatói tetszőleges számok, de nem valamennyi 0, síkot állít elő, vagyis mindazok a P pontok egy síkban feküsznek, amelyeknek x_i koordinátái kielégítik az egyenletet. A (8) egyenletet ugyanis úgy kaphatjuk meg, ha például $u_3 \neq 0$, hogy azon a Q ponton, amelynek koordinátái $(0, 0, -u_4, u_3)$, és az

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0, \quad x_4=0$$

egyenletpárral előállított egyenesen síkot fektetünk át, s ennek egyenletét a (7) képlet szerint kifejezzük.

Minden síknak megfelel ilyen módon egy, arányossági tényezőtől eltekintve, egyértelműen meghatározott (u_1, u_2, u_3, u_4) számnégyes, melynek nem minden eleme 0, s megfordítva minden, a (0, 0, 0, 0)-tól különböző (u_1, u_2, u_3, u_4) számnégyesnek megfelel egy és csak egy sík.

Az (u_1, u_2, u_3, u_4) számnégyest az illető *sík homogén (projektív) koordinátáinak* nevezzük.

Az (x_1, x_2, x_3, x_4) koordinátájú pont és az (u_1, u_2, u_3, u_4) koordinátájú sík *egyesített helyzetének feltételét* a (8) egyenlet fejezi ki.

Ha az

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0, \text{ és } v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 = 0 \quad (9)$$

egyenletek nem csupán arányossági tényezőben különböznek egymástól, vagyis, ha az

$$u_i v_k - u_k v_i \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

számok közül legalább az egyik 0-tól különbözik, akkor a (9) egyenletek két különböző α és β síkot, tehát a (9) egyenletpár az α és β síkok metszésvonalát állítja elő. Ennek a kifejezésnek speciális esete az (5) egyenletpár; ottan az egyenest két olyan sík metszésvonalaként állítottuk elő, melyek az alaptetraéder egy-egy csúcsán mennek át.

Ha a π sík nem megy át az alaptetraéder egyik csúcsán sem, jelöljük a tetraéder lapjaival való metszésvonalát p_1, p_2, p_3, p_4-gyel, s ezeknek az egyeneseknek az $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ háromszögekre vonatkozó pólusát P_1, P_2, P_3, P_4-gyel; az A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3, A_4P_4 egyenesek egy P ponton mennek át, mely a π síknak az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéderre vonatkozó pólusa (l. **46**.4). A P pontnak (x_1, x_2, x_3, x_4) és a π síknak (u_1, u_2, u_3, u_4) koordinátái között az

$$u_i = \frac{1}{x_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

összefüggések állanak fenn; ezt ugyanolyan módon igazoljuk, mint a síkra vonatkozó, megfelelő állítást (l. 175. o.). Az E egységpont polársíkja az *egységsík,* melynek koordinátái $(u_1, u_2, u_3, u_4) = (1, 1, 1, 1)$.

57. §. A tér koordinátáinak lineáris transzformációi.

Az (x_1, x_2, x_3, x_4) homogén koordináták *lineáris transzformációján* egy olyan

$$\varrho' x_i' = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + a_{i4} x_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1)$$

egyenletrendszert értünk, melynek determinánsa:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

zérustól különbözik. Az *inverz transzformáció* kifejezése

$$\varrho x_i = A_{1i} x_1' + A_{2i} x_2' + A_{3i} x_3' + A_{4i} x_4' \quad (i = 1, 2, 3, 4), \qquad (2)$$

hol A_{ik} jelenti az A determinánsban az a_{ik} elemhez tartozó algebrai adjungáltat. *Két lineáris transzformáció szorzatát* ugyanúgy fejezzük ki, mint három változó esetében (l. a 41. § (1″) képletét).

Ha (x_1, x_2, x_3, x_4) és (x_1', x_2', x_3', x_4') ugyanarra, vagy két különböző koordinátarendszerre vonatkozó homogén pontkoordináták, akkor az (1) képletek a tér önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését fejezik ki, amennyiben minden P pontnak, amelynek koordinátái (x_1, x_2, x_3, x_4), az (x_1', x_2', x_3', x_4') koordinátákkal bíró P' pontot feleltetik meg; a (2) képletek szerint minden P' pont egy és csak egy P pontnak a képe.

Ennél a leképezésnél minden síknak sík felel meg; ugyanis az

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

egyenlettel előállított sík pontjainak azok a pontok felelnek meg, melyeknek (x_1', x_2', x_3', x_4') koordinátái, a (2) képletek folytán, kielégítik a

$$\sum_i x_i' (A_{i1} u_1 + A_{i2} u_2 + A_{i3} u_3 + A_{i4} u_4) = 0$$

egyenletet; ez egy síknak az egyenlete, melynek (u_1', u_2', u_3', u_4') koordinátáit az adott sík (u_1, u_2, u_3, u_4) koordinátáival a következő képletek fejezik ki:

$$\sigma' u_i' = A_{i1} u_1 + A_{i2} u_2 + A_{i3} u_3 + A_{i4} u_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4); \qquad (3)$$

ezekből az (u_1, u_2, u_3, u_4) koordináták kifejezése a következő:

$$\sigma u_i = a_{1i} u_1' + a_{2i} u_2' + a_{3i} u_3' + a_{4i} u_4' \quad (i = 1, 2, 3, 4). \qquad (4)$$

Mivel az x_i koordináták lineáris transzformációjánál minden pontnak pont, minden síknak sík felel meg, s az egyesített helyzet feltétele megmarad, tehát a transzformáció a térnek önmagára való kollineáris leképezését állítja elő. Megfordítva, a tér bármely kollineáris leképezése kifejezhető az x_i koordináták lineáris transzformációjával; ezt úgyanúgy bizonyítjuk be, a **45**.9 tétel alapján, mint a síkra vonatkozó, megfelelő tételt (l. 41. §). Ezt az eredményt a következő tételben mondjuk ki:

57.1. Tétel. *A térbeli homogén pontkoordináták (vagy síkkoordináták) minden lineáris transzformációja a térnek egy kollineációját állítja* *elő, s minden kollineáció kifejezhető a homogén pontkoordináták (vagy síkkoordináták) lineáris transzformációjával.*

Tegyük fel, hogy az x_i' és u_i' koordináták ugyanarra a koordinátarendszerre vonatkoznak, mint x_i és u_i. Ebben az esetben az (1) képletekkel előállított kollineáció fixpontjait az

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + a_{i4} x_4 = \varrho x_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{5}$$

egyenletrendszer (x_1, x_2, x_3, x_4) megoldásai adják. Az egyenletrendszert zérusra redukált alakban így írjuk fel:

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \varrho) x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 &= 0\\
a_{21} x_1 + (a_{22} - \varrho) x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 &= 0\\
a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + (a_{33} - \varrho) x_3 + a_{34} x_4 &= 0\\
a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + (a_{44} - \varrho) x_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek akkor és csak akkor van a (0, 0, 0, 0) számnégyestől különböző megoldása, ha a

$$\Delta(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \varrho \end{vmatrix} \tag{6}$$

determináns 0-val egyenlő. A $\Delta(\varrho)=0$ egyenlet ϱ-ban páros fokszámú, s ezért nincs szükségképpen valós gyöke; ha nincs valós gyöke, akkor a kollineációnak nincs fixpontja.

57.2. Ebben az esetben is *van legalább egy invariáns egyenes.* Legyen ugyanis $\varrho = \alpha + \beta i$ a $\Delta(\varrho)=0$ egyenlet valamely komplex gyöke; ezt az értéket az (5) egyenletrendszerbe helyettesítve, megkapjuk annak legalább egy (x_1, x_2, x_3, x_4) komplex értékekből álló megoldását. Legyen $x_k = y_k + z_k i$, hol y_k és z_k valós számok és $i = \sqrt{-1}$ az imaginárius egységet jelenti; az y_k és a z_k számok között van legalább egy-egy zérustól különböző. Az (5) egyenletrendszerben $\varrho = \alpha + \beta i$ és $x_k = y_k + z_k i$ helyettesítéssel, a bal- és a jobboldalon a valós és a képzetes részek külön-külön egyenlők, tehát:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha y_k - \beta z_k &= a_{k1} y_1 + a_{k2} y_2 + a_{k3} y_3 + a_{k4} y_4\\
\alpha z_k + \beta y_k &= a_{k1} z_1 + a_{k2} z_2 + a_{k3} z_3 + a_{k4} z_4
\end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Mivel feltettük, hogy a leképezésnek nincs fixpontja, ezekből az egyenletekből következik: először, hogy az (y_1, y_2, y_3, y_4) és a (z_1, z_2, z_3, z_4)

számok nem csupán arányossági tényezőben különböznek egymástól, hanem *két különböző pont* koordinátái, másodszor, hogy ennek a két pontnak a megadott leképezésnél származó képe a két pontot összekötő egyenesen fekszik, vagyis, hogy ez *az egyenes invariáns* a leképezésnél.

57.3. A kollineációk különböző típusainak előállításához analitikus módszerekkel úgy juthatunk el, hogy a $\Delta(\varrho)=0$ egyenlet gyökeinek sokszorossága, s valós vagy képzetes értéke szerint osztályozzuk a lineáris transzformációkat.

A tér egy megadott kollineációjának kifejezését olyan módon egyszerűsíthetjük, hogy a koordináták alaptetraéderének csúcsait, éleit és lapjait a kollineációnál kitüntetett pontokkal, egyenesekkel és síkokkal megegyezőnek vesszük fel. Nem fogjuk részletezni a különböző típusú kollineációk ilyenképpen egyszerűsített kifejezését, csak néhányat említünk meg közülök.

Ha a kollineációnak van *négy, nem egy síkban fekvő fixpontja*, ezeket vesszük fel az alaptetraéder csúcsainak, s így a következő kifejezést kapjuk:

$$x_1' = a_{11}x_1, \quad x_2' = a_{22}x_2, \quad x_3' = a_{33}x_3, \quad x_4' = a_{44}x_4. \tag{7}$$

Ebben az alakban állítható elő az általános perspektivitás $(a_{11}=a_{22}=a_{33})$, a kettőstengelyű hiperbolikus kollineáció $(a_{11}=a_{22}$, $a_{33}=a_{44})$, a hiperbolikus típusú, általános tengelyes kollineáció $(a_{11}=a_{22})$, s a négy fixponttal, négy invariáns síkkal és hat invariáns egyenessel bíró kollineáció (**50**.3. 1) típus).

Ha a leképezésnek van *két torz invariáns egyenese*, ezeket vesszük fel az alaptetraéder A_1A_2 és A_3A_4 élének, s így a következő kifejezéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, & x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \\ x_3' &= a_{33}x_3 + a_{34}x_4, & x_4' &= a_{43}x_3 + a_{44}x_4. \end{aligned} \tag{8}$$

Ebben az alakban állítható elő a speciális perspektivitás:

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = a_{43}x_3 + x_4; \tag{9}$$

továbbá az elliptikus és parabolikus típusú, általános tengelyes kollineáció $(a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=a_{21}=0$, s a két típusnak megfelelően további relációk az $a_{33}, a_{34}, a_{43}, a_{44}$ együtthatók között), a kettőstenge yű parabolikus és elliptikus kollineáció s a véges sok invariáns elemmel bíró kollineációk közül azok, melyeknek van legalább két invariáns egyenese.

Ha a leképezésnek van *egy invariáns egyenese,* s ezen vesszük fel az A_3, A_4 csúcsokat, akkor az (1) egyenletek közül a két első a következő módon egyszerűsödik:

$$x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2, \qquad x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2.$$

Az involutorius kollineációk kifejezése ezeknek a képleteknek alapján a következő:

$$\begin{array}{ll} \text{harmonikus perspektivitás:} & x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3,\ x_4' = -x_4; \\ \text{hiperbolikus involució:} & x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = -x_3,\ x_4' = -x_4; \\ \text{elliptikus involució:} & x_1' = -x_2,\ x_2' = x_1,\ x_3' = -x_4,\ x_4' = x_3. \end{array}$$

*A tér affin leképezései*nek kifejezésére egy olyan $A_1A_2A_3A_4$ alaptetraédert veszünk fel, melynek A_1, A_2, A_3 csúcsai a végtelen távoli síkban feküsznek; ebben az esetben az $x_4=0$ sík invarianciája folytán:

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0, \quad a_{44} \neq 0.$$

A homogén koordinátákat az

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

*párhuzamos koordinátákk*al helyettesítjük, melyekkel az affinitásokat a következő egyenletek fejezik ki:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_{14} \\ y' &= a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z + a_{24} \\ z' &= a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z + a_{34}. \end{aligned} \tag{10}$$

*A tér hasonlósági leképezései*nek kifejezésére az A_1, A_2, A_3 pontokat úgy vesszük fel (az $x_4=0$ végtelen távoli síkban), hogy az abszolut polaritás egy poláris háromszögének csúcsai legyenek; ebben az esetben, az egységpontot is alkalmasan véve fel, az abszolut polaritást az

$$u_1' = x_1, \quad u_2' = x_2, \quad u_3' = x_3$$

egyenletek fejezik ki (l. 43. §, (6)). Jelöljük az (1) egyenletrendszer A determinánsában az a_{44} elem algebrai adjungáltját $A_{44}=\alpha$-val, s ebben az a_{ik} elemhez tartozó algebrai adjungáltat α_{ik}-val. A kollineációnak az abszolut polaritással való felcserélhetőségét az

$$a_{ik} = \alpha_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

egyenletek fejezik ki (l. 41. § (1) és (3). Ha tehát a (10) képletekkel előállított affinitás a tér hasonlósági leképezése, akkor az a_{ik} együtthatók között a következő összefüggések állanak fenn:

$$\left.\begin{aligned} & a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2=a_{i1}a_{i1}+a_{i2}a_{i2}+a_{i3}a_{i3}=a \quad (i=1,2,3);\\ & a_{1k}^2+a_{2k}^2+a_{3k}^2=a_{1k}a_{1k}+a_{2k}a_{2k}+a_{3k}a_{3k}=a \quad (k=1,2,3);\\ & \left.\begin{aligned} a_{i1}a_{k1}+a_{i2}a_{k2}+a_{i3}a_{k3}=0\\ a_{1i}a_{1k}+a_{2i}a_{2k}+a_{3i}a_{3k}=0 \end{aligned}\right\} \text{(ha } i\neq k;\ i,k=1,2,3). \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Viszont, ha ezek az összefüggések fennállanak, akkor az affinitás felcserélhető az abszolut polaritással, tehát a térnek egy hasonlósági leképezése.

Jegyezzük meg végül, hogy *a tér korrelációit* az

$$u_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \quad (i=1,2,3,4) \tag{12}$$

egyenletek fejezik ki, melyek az (1) egyenletekből az x_i' transzformált pontkoordinátáknak az u_i' síkkoordinátákkal való helyettesítésével keletkeznek.

A (12) képletekkel kifejezett korreláció négyzete a következő (l. a síkra vonatkozó, hasonló tárgyalást a 43. §-ban):

$$\varrho(a_{1i}x_1' + a_{2i}x_2' + a_{3i}x_3' + a_{4i}x_4') = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4.$$

Polaritás, azaz *involutorius korreláció* esetében ezek az egyenletek az azonos leképezést fejezik ki, tehát

$$\varrho\, a_{ki} = a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Ha $\varrho=-1$, vagyis $a_{ik}+a_{ki}=0$, akkor a korreláció *szinguláris polaritás* (vagy *nulla-rendszer*). Ha pedig $\varrho=1$, vagyis az $\|a_{ik}\|$ mátrix szimmetrikus: $a_{ik}=a_{ki}$, akkor a (12) képletek *nem szinguláris polaritást* állítanak elő. Ebben az esetben felveszünk egy poláris tetraédert a koordináta alaptetraéderének, s a polaritást a következő képletekkel fejezzük ki:

$$u_1' = a_{11}x_1,\quad u_2' = a_{22}x_2,\quad u_3' = a_{33}x_3,\quad u_4' = a_{44}x_4. \tag{13}$$

Ha az a_{ii} együtthatók előjele megegyező, akkor ez *elliptikus polaritás,* ellenkező esetben *hiperbolikus polaritás* kifejezése. Az utóbbi esetben a polaritás *ellipszoid típusú,* ha az a_{ii} együtthatók közül háromnak előjele megegyező, és *hiperboloid típusú,* ha csak két a_{ii} együttható előjele megegyező.

V. Másodrendű görbék.

58. §. A kör projektív tulajdonságai.

Az euklidesi geometriában értelmezett *kör* fogalmának a projektív geometriára való átvitele vezet el a másodrendű görbék fogalmához. Az 1—5. § tárgyalásának megfelelően az euklidesi teret tekintjük megadottnak, s ezt végtelen távoli elemek bevezetésével projektív térré bővítjük ki. Egy közönséges α síkban felveszünk egy $\mathcal{K}$ kört, az α síkot egy másik, α' síkra vetítjük egy olyan O pontból, mely a két sík közül egyikhez sem tartozik, s a $\mathcal{K}$ körnek az α' síkra való $\mathcal{C}$ vetületét nevezzük *másodrendű görbé*nek. Az O pontot a $\mathcal{K}$ kör pontjaival összekötő egyenesek *kúpfelületet* alkotnak, amelynek az α' síkkal való metszete $\mathcal{C}$; ennek megfelelően a másodrendű görbéket *kúpszeleteknek* is nevezzük.

A másodrendű görbéknek a projektív geometria alapján való értelmezése céljából megállapítjuk a körnek néhány projektív, vagyis az egybevágóság fogalmától független tulajdonságát. Ezek közös tulajdonságai a körnek, és vetületeinek: a másodrendű görbéknek, s az utóbbiak projektív jellegű értelmezésére alkalmasak.

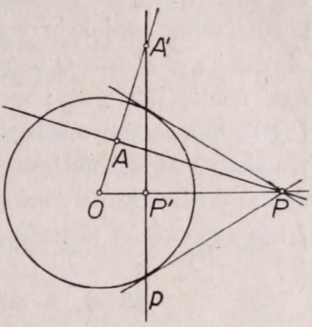
Vegyünk fel egy α síkot, melyben az euklidesi geometria **I. 1—3, II, III, IV,** és **III. k** axiómái érvényesek (l. első kötet). Legyen $\mathcal{K}$ egy kör az α síkban, középpontja O, sugara r; valamely, O-tól különböző *P pontnak a $\mathcal{K}$ körre vonatkozó tükörképén* értjük az $\overrightarrow{OP}$ félsugárnak azt a P' pontját, melyre nézve az OP és OP' szakaszok szorzata a $\mathcal{K}$ kör sugarának négyzetével egyenlő:

$$OP\,.\,OP' = r^2.$$

Ha a P pont a kör külsejében fekszik, akkor az a $\mathcal{K}'$ kör, melynek középpontja az OP szakasz Q középpontja, és sugara $QO=QP$, a $\mathcal{K}$ kört két L és L' pontban metszi; az LL' egyenesnek az $\overrightarrow{OP}$ félsugárral van egy P' közös pontja, s erre fennáll az $OP\,.\,OP'=r^2$ egyenlőség (l. első kötet, **191.** és **207.** tétel). Ha a P pont a $\mathcal{K}$ kör belsejében fekszik, a P pontban OP-re emelt merőlegesnek van a $\mathcal{K}$ körrel két

L és L' közös pontja (első kötet, 145. o.); az L és L' pontban a $\mathcal{K}$ körhöz húzott érintők metszik az $\overrightarrow{OP}$ félsugarat egy P' pontban, melyre az $OP.OP'=r^2$ egyenlőség áll fenn. Végül, ha P a $\mathcal{K}$ kör pontja, akkor egybeesik tükörképével, P'-vel.

Az O-tól különböző P *pontnak a* $\mathcal{K}$ *körre vonatkozó polárisán* értjük azt a p egyenest, mely a P pont P' tükörképén megy át, s merőleges az OP egyenesre. Valamely, az O ponton át nem menő p *egyenesnek a* $\mathcal{K}$ *körre vonatkozó pólusán* értjük azt a P pontot, mely az O-ból p-re bocsátott merőleges P' talppontjának a tükörképe. A P pólus és p poláris kölcsönösen egymásnak felel meg. Ha A' a p egyenes tetszőleges pontja, A' polárisa átmegy p pólusán, a P ponton; bocsássunk ugyanis P-ből merőlegest az OA' egyenesre, ennek talppontját jelöljük A-val; az OPA és $OA'P'$ háromszögek hasonlósága folytán (78. ábra)



78. ábra.

$$OP : OA = OA' : OP',$$

s ebből

$$OA.OA' = OP.OP' = r^2;$$

az értelmezés szerint tehát a PA egyenes az A' pont polárisa. Ebből az is következik, hogy minden, a P ponton átmenő, és OP-től különböző egyenes pólusa a p egyenesen, P polárisán fekszik. — A $\mathcal{K}$ kör O középpontjának a sík végtelen távoli egyenesét, s minden a egyenes végtelen távoli pontjának az a-ra merőleges, az O ponton átmenő egyenest feleltetjük meg mint polárist. A sík pontjai és egyenesei között ilyen módon létesített vonatkozás a 153. oldalon adott értelmezés szerint *a sík polaritása*; ez a polaritás *hiperbolikus*, mivel a $\mathcal{K}$ kör pontjai (és csakis ezek) önmagukhoz konjugáltak, azaz polárisukhoz: az illető pontban a körhöz húzott érintőhöz tartoznak. A fentiek szerint *a kör értelmezhető a sík egy hiperbolikus polaritásánál önmagukhoz konjugált pontok összességeként;* ez az értelmezés egyaránt vonatkozik a körre, s a sík projektív leképezéseinél származó képeire, vagyis a másodrendű görbékre. Ezt az értelmezést vesszük tárgyalásunk alapjául.

A körnek egy másik projektív tulajdonságát is megemlítjük, mely szintén alkalmazható a másodrendű görbék értelmezésére. Legyen A, B, C, D a $\mathcal{K}$ kör négy különböző pontja; az ezeket a kör két különböző P és Q pontjából vetítő (PA, PB, PC, PD) és (QA, QB, QC, QD) sugárnégyesek kettősviszonya egyenlő; ha a P, Q pontok közül valamelyik az A, B, C, D pontok közül az egyikkel, például ha P az A ponttal egybeesik, akkor PA egyenesen a $P{=}A$ pontban a körhöz húzott érintőt értjük. Az első kötet 192. és 194. tétele szerint az $\sphericalangle APC$ és $\sphericalangle AQC$ szögek egymással, vagy egymás mellékszögével egyenlők, hasonlóan $\sphericalangle BPD$ és $\sphericalangle BQD$ stb.; a sík önmagára való kongruens leképezésével átvihetjük a PA, PB, PC, PD egyeneseket a QA, QB, QC, QD egyenesekbe (ennél a lekepezésnél a $\mathcal{K}$ kör nem megy át önmagába). A P és a Q középpontú sugársorok között tehát projektív vonatkozást létesítünk, ha a $\mathcal{K}$ kör változó A pontját a P és a Q ponttal összekötő PA és QA egyenest egymásnak feleltetjük meg; ez a vonatkozás nem perspektív, mivel a PQ egyenes nem önmagának felel meg, hanem a P, illetve a Q pontban a $\mathcal{K}$ körhöz húzott érintőnek. *A másodrendű görbéket e szerint úgy is értelmezhetjük, mint két projektív, nem perspektív sugársor megfelelő sugarainak metszéspontjaiból álló alakzatot.* (l. **60**.9).

59. §. A másodrendű görbék értelmezése.

További tárgyalásunk alapjául a projektív geometria **P I, II** és **D** axiómái szolgálnak. Feltesszük, hogy az összes pontok és egyenesek egy α síkhoz tartoznak.

Értelmezés. Legyen Ω a síknak egy hiperbolikus polaritása. *Az Ω polaritáshoz tartozó $\mathcal{C}$ másodrendű görbén* értjük azoknak a pontoknak az összességét, melyek Ω-nál önmagukhoz konjugáltak; ezeket a pontokat a *másodrendű görbe pontjai*nak, s polárisaikat a *másodrendű görbe érintői*nek nevezzük. — Az Ω polaritáshoz tartozó *másodosztályú görbén* értjük azoknak az egyeneseknek az összességét, melyek Ω-nál önmagukhoz konjugáltak; ezeket az egyeneseket a *másodosztályú görbe vonalai*nak, s pólusaikat *érintési pontok*nak nevezzük. Az Ω-hoz tartozó másodosztályú görbe az Ω-hoz tartozó másodrendű görbe érintőiből, s a másodrendű görbe a másodosztályú görbe érintési pontjaiból áll. (A görbe pontjairól azt mondjuk, hogy a görbéhez tartoznak, vagy a görbén feküsznek.)

A másodrendű és másodosztályú görbe fogalma egymásnak felel meg a síkbeli dualitás elve szerint. Általában a másodrendű görbékkel fogunk foglalkozni, az ezekre vonatkozó tételeket a síkbeli dualitás elve szerint átalakítva megkapjuk a másodosztályú görbékre vonatkozó megfelelő tételeket.

A hiperbolikus polaritásokra vonatkozó tételekből közvetlenül adódnak a másodrendű görbék következő tulajdonságai.

59.1. *Ha P az Ω polaritáshoz tartozó $\mathcal{C}$ másodrendű görbe tetszőleges pontja, s p a P ponthoz tartozó érintő (azaz P polárisa), akkor a p egyenesen nincs a $\mathcal{C}$ görbének P-n kívül más pontja, s a P ponton nem megy át $\mathcal{C}$-nak más érintője, mint p* (**35**.2).

59.2. *Ha a p egyenes nem érintője a $\mathcal{C}$ görbének, akkor p-n vagy két különböző pontja van a $\mathcal{C}$ görbének, vagy egy sincs* (**35**.4). Ebből következik, hogy *ha egy p egyenesen a $\mathcal{C}$ görbének egy és csak egy P pontja van, akkor p érintője $\mathcal{C}$-nek, s az érintési pont P.*

Ennek a dualitás elve szerint a következő tétel felel meg:

59.3. *Ha a P pont nem tartozik a $\mathcal{C}$ görbéhez, akkor a P ponton a $\mathcal{C}$ görbének vagy két különböző érintője megy át, vagy egy sem* (**35**.5).

Bebizonyítjuk a következő tételt:

59.4. *A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe egyértelműen meghatározza az Ω polaritást, azaz $\mathcal{C}$ nem tartozhatik két különböző polaritáshoz.*

Legyen ugyanis A a $\mathcal{C}$ görbe tetszőleges pontja, s a a görbe érintője az A pontban. Minden, az A ponton átmenő, s a-tól különböző egyenesnek $\mathcal{C}$-vel két közös pontja van (melyek közül egyik A). Felveszünk az A ponton át három, egymástól és a-tól különböző egyenest; jelöljük B, C, D-vel ezeknek a $\mathcal{C}$ görbével közös, s A-tól különböző pontját. Az A, B, C, D pontok közül bármely három nem tartozik egy egyeneshez, mivel a $\mathcal{C}$ görbének bármely egyenessel legfeljebb két közös pontja van. Az A, B, C, D pontok a, b, c, d polárisa közül bármely háromnak nincs közös pontja. A **34**.3 tétel szerint a síknak egy és csak egy olyan korrelációja van, mely az A, B, C, D pontnak rendre az a, b, c, d egyenest felelteti meg; ez az Ω polaritással azonos.

Az Ω polaritást *a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozó polaritás*nak nevezzük. Két pontot, vagy két egyenest a $\mathcal{C}$ görbére nézve konjugáltnak nevezünk ha a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozó polaritásnál egymáshoz konjugáltak.

Értelmezés. Az a egyenest, mely nem érintője a $\mathcal{C}$ görbének, $\mathcal{C}$-t *metsző* vagy *nem metsző egyenes*nek nevezzük, a szerint, hogy $\mathcal{C}$-vel két közös pontja van, vagy egy sincs. Az A pontot, mely nem tartozik a $\mathcal{C}$ görbéhez, $\mathcal{C}$-re nézve *külső* vagy *belső pont*nak nevezzük, a szerint, hogy az A ponton a $\mathcal{C}$ görbének két érintője megy át, vagy egy sem.

59.5. *Az a sík minden a egyenese a $\mathcal{C}$ másodrendű görbének vagy érintője, vagy metszője, vagy nem metszője. Az a sík minden A pontja vagy a $\mathcal{C}$ görbéhez tartozik, vagy külső, vagy belső pont $\mathcal{C}$-re nézve.* (**35**.4, 5).

Az A középpontú sugársor, s az A polárisán : az a egyenesen fekvő pontsor elemei az Ω polaritásnál projektív vonatkozással egymásnak felelnek meg (**34**.4). Ennél a vonatkozásnál a sugársorban és a pontsorban a konjugált elemek involuciója egymással aequivalens, tehát mindkettő ugyanolyan típusú (elliptikus vagy hiperbolikus). E szerint :

59.6. *Minden, a $\mathcal{C}$ görbét metsző egyenes pólusa külső pont, a $\mathcal{C}$ görbét nem metsző egyenes pólusa belső pont ; a $\mathcal{C}$ görbe érintőinek pólusai a $\mathcal{C}$ görbe pontjai.*

A $\mathcal{C}$ görbe bármely pontján átmenő egyenesek, az érintőt kivéve, metszői a $\mathcal{C}$ görbének (**59**.2). Ennek a dualitás elve szerint a következő tétel felel meg :

59.7. *A $\mathcal{C}$ görbe bármely érintőjének összes pontjai, az érintési pontot kivéve, külső pontok.*

Az ABC háromszöget a $\mathcal{C}$ másodrendű görbére vonatkozó *poláris háromszög*nek nevezzük, ha minden csúcsának polárisa a háromszög átellenes oldala. A **36**.1 tételből következik :

59.8. *Ha ABC a $\mathcal{C}$ másodrendű görbére vonatkozó poláris háromszög, akkor két oldala $\mathcal{C}$-t metsző, s egy oldala $\mathcal{C}$-t nem metsző egyenes ; a poláris háromszög csúcsai közül kettő külső pont, s egy belső pont a $\mathcal{C}$ görbére nézve.*

Ebből levezetjük a következő tételt :

59.9. *Egy tetszőleges, a $\mathcal{C}$ görbét nem metsző egyenes összes pontja külső pont.*

Bizonyítás. Legyen a a $\mathcal{C}$ görbét nem metsző egyenes ; pólusa, A belső pont. Legyen B az a egyenes tetszőleges pontja, polárisa b, s legyen C az a és b egyenesek metszéspontja ; ennek polárisa a $c=AB$ egyenes. Az ABC poláris háromszögnek $a=BC$ oldala nem metsző, tehát az **59**.8 tétel szerint a másik két oldal, AB és AC a $\mathcal{C}$-t metsző egyenes ; a csúcsok közül A belső pont, tehát a másik két csúcs, B és C külső pont.

Ebből következik továbbá :

59.10. *Minden olyan egyenes, mely belső ponton megy át, metszője a $\mathcal{C}$ görbének.*

59.11. Jegyezzük meg, hogy *bármely, a $\mathcal{C}$ görbét metsző a egyenesen van belső és külső pont is;* ha B és C az a egyenes két tetszőleges konjugált pontja, közülük az egyik belső, a másik külső pont. Ugyanis a pólusa, A és a B, C pontok egy poláris háromszög csúcsai, s mivel A külső pont, ezért B és C közül az egyik belső, a másik külső pont. Hasonlóan, bármely A külső ponton átmegy a $\mathcal{C}$ görbét metsző, s a görbét nem metsző egyenes, s bármely két, az A ponton átmenő, konjugált egyenes közül az egyik metsző, a másik nem metsző.

59.12. Tétel. *Ha A külső pont a $\mathcal{C}$ görbére nézve, akkor A polárisa az A-ból $\mathcal{C}$-hez húzott két érintőnek érintési pontjait összekötő egyenes.*

Jelöljük ugyanis P-vel és Q-val az A-ból a $\mathcal{C}$ görbéhez húzott két érintő érintési pontját; az AP érintő minden pontja konjugált P-hez, tehát A is; hasonlóan A konjugált Q-hoz is; ebből következik, hogy P és Q az A pont a polárisán fekszik, tehát $a=PQ$.

Ha az a egyenes metszője a $\mathcal{C}$ görbének, a metszéspontokat jelöljük P-vel és Q-val. Az a egyenes konjugált pontjai hiperbolikus involuciót alkotnak, melynek fixpontjai P és Q (**35**.3). Ha B és C az a egyenes két tetszőleges, konjugált pontja, akkor a B, C és P, Q pontpárok harmonikusan választják el egymást (**14**.2). E szerint:

59.13. Tétel. *Minden, a $\mathcal{C}$ görbét metsző a egyenesen két tetszőleges, egymáshoz konjugált pont harmonikusan választja el az a egyenesnek a görbével való két metszéspontját.*

Ebből a dualitás elve szerint következik:

59.14. Tétel. *Ha A külső pont, bármely két, az A ponton átmenő, konjugált egyenes harmonikusan választja el egymástól az A pontból a görbéhez húzott két érintőt.*

59.15. Legyen a egy, a $\mathcal{C}$ görbét metsző egyenes, a metszéspontokat jelöljük P-vel és Q-val, s a pólusát A-val. Legyen B és C az a egyenes két konjugált pontja; a B pont polárisa az $AC=b$ egyenes. A síknak az a **T** harmonikus perspektivitása, melynek középpontja B, s tengelye b, felcserélhető a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozó polaritással (**37**.2), s ezért egymásba viszi át a polaritásnál önmagukhoz konjugált pontokat, vagyis a $\mathcal{C}$ görbe pontjait, s ugyancsak az önmagukhoz konjugált egyeneseket, vagyis a görbe érintőit. A $\mathcal{C}$ görbe érintőinek pontjai külső pontok, kivéve a görbe pontjait, s minden külső pont a görbe valamely érintőjének pontja. *Mivel* **T**-*nél a görbe érintői egymásba mennek át, ezért a külső pontok külső pontokba, s a belső pontok belső pontokba mennek át.* Legyen K és L az a egyenes két tetszőleges olyan pontja, melyeket P és Q nem választ el egymástól. A **10**.6 tétel szerint van az a egyenesen egy és csak egy olyan B, C pontpár, mely a P, Q pontpárt is, a s K, L pontpárt is harmonikusan választja el. A B, C pontpár konjugált a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozóan, mivel harmonikusan választja el a görbe P és Q pontjait; a B középpontú és AC tengelyű harmonikus perspektivitásnál a $\mathcal{C}$ görbe önmagába, a P és a Q pont egymásba, s hasonlóan a K és az L pont egymásba megy át; a fentiek szerint tehát K és L mindketten belső pontok, vagy mindketten külső pontok. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

59.16. Tétel. *Ha P és Q a $\mathcal{C}$ görbe két tetszőleges pontja, a $PQ=a$ egyenesnek a P, Q pontok által meghatározott két szakasza közül az egyiknek minden pontja belső pont, a másiknak minden pontja külső pont a $\mathcal{C}$ görbére nézve.*

Ebből következik, hogy bármely két belső pont összeköthető olyan egyenes szakasszal, melynek minden pontja belső pont, s bármely két külső pont olyan egyenes szakasszal, melynek minden pontja külső pont. Ha ugyanis K és L belső pontok, akkor a KL egyenes metsző (**59**.10), a $\mathcal{C}$ görbével való metszéspontjai legyenek P és Q. A P, Q pontok által meghatározott két szakasz közül az egyik belső pontokból áll; ennek a K, L pontok által meghatározott rész-szakasza a K, L pontokat összekötő, s belső pontokból álló szakasz. Ha pedig K és L külső pontok, akkor a KL egyenes vagy nem metsző, s ennek minden pontja külső pont, vagy KL metsző, s a $\mathcal{C}$-vel való P, Q metszéspontok által meghatározott PQ szakasz, mely K-t is L-t tartalmazza, külső pontokból áll; mindkét esetben van az egyenesnek egy, a K, L pontok által meghatározott, s külső pontokból álló rész-szakasza.

Ha a K és L pontok közül az egyik belső, a másik külső pont, akkor a KL egyenes metsző, mivel a K belső ponton megy át, s a görbével való P és Q metszéspontjai fenti eredményeink szerint elválasztják egymástól a KL egyenesen a K és L pontokat. Tehát minden olyan szakasznak, melynek végpontjai közül az egyik belső, a másik külső pont, van a $\mathcal{C}$ görbével egy közös pontja. Ebből következik, hogy minden olyan törtvonalnak, melynek egyik végpontja belső, másik végpontja külső pont, van a görbével legalább egy közös pontja. Eredményünket a következő tételben foglaljuk össze:

59.17. Tétel. *A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe a síkot két részre osztja fel, ezeket a görbe belsejének és külsejének nevezzük. Bármely két belső* (azaz a görbe belsejéhez tartozó) *pontot összeköthetünk egy, a görbe belsejéhez tartozó egyenes-szakasszal, s bármely két külső* (azaz a görbe külsejéhez tartozó) *pontot összeköthetünk egy, a görbe külsejéhez tartozó egyenes-szakasszal. Minden olyan, a görbe síkjában fekvő törtvonalnak, melynek egyik végpontja belső, másik végpontja külső pont, van a görbével legalább egy közös pontja.*

A fenti tételekből könnyen levezethető a következő :

59.18. Tétel. *A $\mathcal{C}$ másodrendű görbének az A külső ponton átmenő két érintője az A középpontú sugársorban elválasztja egymástól a görbét metsző s a görbét nem metsző egyeneseket.*

Legyen ugyanis a az A pont polárisa, s ennek a görbével való metszéspontjai P és Q ; az AP és AQ egyenesek a $\mathcal{C}$ görbe érintői. A P, Q pontok által meghatározott egyik PQ szakasz pontjai belső pontok ; ennek a szakasznak bármely pontját A-val összekötő egyenes metsző ; ugyane szakasz bármely pontjának polárisa nem metsző, s a-val közös pontja a másik PQ szakaszhoz tartozik.

Értelmezés. A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe valamely A pontjából való vetítésénél kölcsönösen egyértelmű módon megfelelnek egymásnak az A középpontú sugársor egyenesei s a $\mathcal{C}$ görbe pontjai ; az A pontnak a $\mathcal{C}$-hez A-ban húzott érintőt feleltetjük meg. A $\mathcal{C}$ görbe pontjai, s az A középpontú sugársor e megfelelése alapján értelmezhetjük *a $\mathcal{C}$ görbe pontjainak ciklikus rendezését,* oly módon, hogy a $\mathcal{C}$ görbe bármely négy pontjának ciklikus elrendezése értelmezés szerint megegyezik az őket az A pontból vetítő négy egyenesnek a sugársorban való ciklikus elrendezésével.

Ha B, C, D a $\mathcal{C}$ görbe három, egymástól, és A-tól különböző pontja, és a a görbe érintője az A pontban, s ha A és B elválasztja egymástól a $\mathcal{C}$ görbén a C és D pontot, akkor a CD egyenesnek a C, D pontok által meghatározott két szakasza közül az egyiknek van az AB egyenessel, a másiknak van a-val közös pontja. Mivel az a érintő pontjai, az érintési pontot kivéve, külső pontok, az a CD szakasz, mely a-t metszi, külső pontokból, a másik CD szakasz belső pontokból áll (**59**.16). E szerint :

59.19. Tétel. *Ha a $\mathcal{C}$ görbe A, B és C, D pontpárjai elválasztják egymást a $\mathcal{C}$ görbén, akkor az AB és CD egyenesek metszéspontja belső pont, és megfordítva ; ha tehát az A, B és C, D pontpárok nem választják* *el egymást a $\mathcal{C}$ görbén, akkor az AB és CD egyenesek metszéspontja külső pont.*

Ebből a megállapításból következik, hogy a görbe pontjainak ciklikus elrendezése független az A pont megválasztásától, amelynek segítségével eredetileg értelmeztük. Mint a sugársorra, a $\mathcal{C}$ másodrendű görbére megadott ciklikus rendezés is eleget tesz az **A 1, 2, 3** axiómáknak (l. 11. o.).

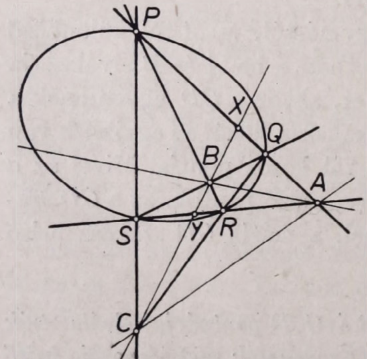
59.20. Az **59**.19 tételből következik, hogy *a $\mathcal{C}$ másodrendű görbe belsejét a görbe belsejében fekvő tetszőleges szakasz, amelynek A, B végpontjai a $\mathcal{C}$ görbéhez tartoznak, két részre osztja fel.*

Értelmezés. $\mathcal{C}$ görbének két különböző A és B pontja a ciklikus rendezés értelmében a görbét két részre osztja fel; ezeket *a görbe AB íveinek* nevezzük. Az értelmezés szerint a C és D pont akkor és csak akkor tartozik ugyanahhoz az AB ívhez, ha az A, B és C, D pontpárok nem választják el egymást a $\mathcal{C}$ görbén.

Hasonlóan, mint a projektív egyenesen, értelmezünk a $\mathcal{C}$ másodrendű görbén a ciklikus rendezés alapján egy *ciklikus irányítást* a görbe három pontjának egy permutációjával (l. **4**.5). Ennek alapján értelmezzük azt, hogy egy $\mathcal{C}$ másodrendű görbe önmagára való kölcsönösen egyértelmű, s a ciklikus rendezést megtartó *leképezése megtartja vagy megfordítja a $\mathcal{C}$ görbén bevezetett irányítást* (l. **4**.6).

60. §. A másodrendű görbék projektív tulajdonságai.

Értelmezés. A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe *húrnégyszögén* (vagy beírt négyszögén) olyan teljes négyszöget értünk, amelynek csúcsai a $\mathcal{C}$ görbén feküsznek. A $\mathcal{C}$ görbe *érintő-négyszögén* (vagy körülírt négyszögén) olyan teljes *négyoldalt* értünk, amelynek oldalai a $\mathcal{C}$ görbe érintői.



79. ábra.

60.1. Tétel. *A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe egy húrnégyszögének mindegyik átlóspontja a másik két átlóspontot összekötő egyenes pólusa; az átlóspontok tehát egy poláris háromszög csúcsai.*

Bizonyítás. (79. ábra.) Legyen P, Q, R, S a $\mathcal{C}$ görbe négy tetszőleges pontja. A $PQRS$ teljes négyszög átlóspontjai a PQ és RS, a PR és QS, s a PS és QR oldalak A, B, C metszéspontja, melyek a **7**.2 tétel szerint nem feküsznek egy egyenesen. A CA és CB átlók harmonikusan választják el egymástól a négyszögnek a C ponton átmenő PS és QR oldalait; tehát a BC egyenesnek a PQ és RS egyenessel való X és Y metszéspontja az A pont harmonikus konjugáltja a P, Q, illetve az R, S pontpárra vonatkozóan. Mivel P, Q, R, S a $\mathcal{C}$ görbe pontjai, az **59**.13 tétel szerint az X és Y pontok konjugáltak A-hoz a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozóan is, tehát a $BC=XY$ egyenes az A pont polárisa.

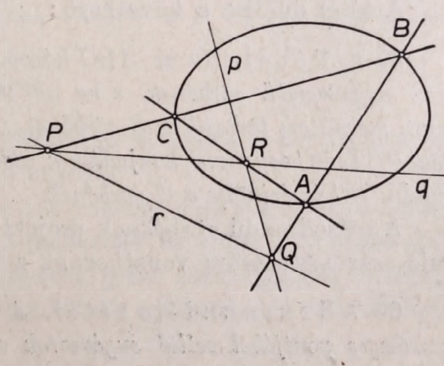
Ugyanilyen módon adódik a tétel duálisa:

60.2. Tétel. *A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe egy érintő-négyszögének bármelyik átlója a másik két átló metszéspontjának a görbére vonatkozó polárisa.*

Értelmezés. $A_1A_2 \ldots A_n$ *n-szög*ön értjük az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontokból és az $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ egyenesekből álló idomot; az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontokat az *n-szög csúcsai*nak, az $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ egyeneseket az *n-szög oldalai*nak nevezzük. — Ha a sokszög csúcsai a $\mathcal{C}$ másodrendű görbén feküsznek, akkor a sokszöget *húr n-szög*nek, ha pedig oldalai a $\mathcal{C}$ görbe érintői, akkor *érintő n-szög*nek nevezzük.

60.3. Staudt-féle tétel. *Ha ABC a $\mathcal{C}$ másodrendű görbe húrháromszöge, s ha a p egyenes az AB és AC oldalt két különböző, egymáshoz konjugált pontban metszi, akkor p átmegy a BC oldal pólusán (azaz konjugált a BC oldalhoz). Megfordítva, minden olyan p egyenes, mely a BC oldal pólusán megy át, az AB és AC oldalt két egymáshoz konjugált pontban metszi.*

Bizonyítás. (80. ábra.) Jelöljük az AB és AC oldalnak a p egyenessel való metszéspontját Q-val és R-rel, ezeknek polárisát q-val és r-rel. A Q középpontú, q tengelyű $\mathbf{T}_1$ harmonikus perspektivitásnál a **37**.2 tétel szerint a $\mathcal{C}$ görbe önmagába, ennek A és B pontja egymásba megy át; az R középpontú, r tengelyű $\mathbf{T}_2$ harmonikus perspektivitásnál $\mathcal{C}$ önmagába s az A és C pont egymásba megy át.



Mivel feltevésünk szerint Q és R konjugált pontok, azaz Q az r, és R a q egyenesen fekszik, azért a $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ szorzat is harmonikus perspektivitás, melynek tengelye a $p=QR$ egyenes, s középpontja a $P=(q, r)$ pont, vagyis a p tengely pólusa (**30**.10). A fentiek szerint a $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ leképezésnél a B pont C-be megy át, s ezért a $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ perspektivitás P középpontja a BC egyenesen fekszik; ez azt jelenti, hogy a BC és p egyenesek konjugáltak egymáshoz. — A tétel megfordítása ebből indirekt meggondolással adódik.

A **60**.3 tételnek a síkbeli dualitás elve szerint megfelel a következő:

60.4. Tétel. *Ha ABC a $\mathcal{C}$ másodrendű görbe érintő-háromszöge, s ha a BP és CP egyenesek konjugáltak egymáshoz, akkor a P pont konjugált A-hoz. Megfordítva, ha a P pont konjugált A-hoz, akkor a BP és CP egyenesek konjugáltak egymáshoz.*

A **60**.3 tételből közvetlenül adódik a tétel következő megfordítása:

60.5. Tétel. *Ha az ABC háromszög B és C csúcsa a $\mathcal{C}$ másodrendű görbének pontja, s ha a p egyenes a BC oldal O pólusán megy át, de különbözik OB-től és OC-től, s az AB és AC oldalt két egymáshoz konjugált pontban metszi, akkor az A csúcs is a $\mathcal{C}$ görbén fekszik, s így ABC húrháromszög.*

Bizonyítás. Jelöljük A_1-gyel az AB egyenesnek a $\mathcal{C}$ görbével való másik (azaz B-től különböző) metszéspontját. A p egyenesnek az AB, AC és A_1C egyenessel való metszéspontja legyen Q, R és R_1; Q és R konjugáltak feltevésünk szerint, Q és R_1 is konjugáltak a **60**.3 tétel szerint. Mivel a p egyenes feltevésünk értelmében nem konjugált önmagához, a Q pontnak a p egyenesen egy és csak egy konjugált pont felel meg, s ezért az R pont R_1-gyel, az A pont A_1-gyel azonos, vagyis A a $\mathcal{C}$ görbén fekszik.

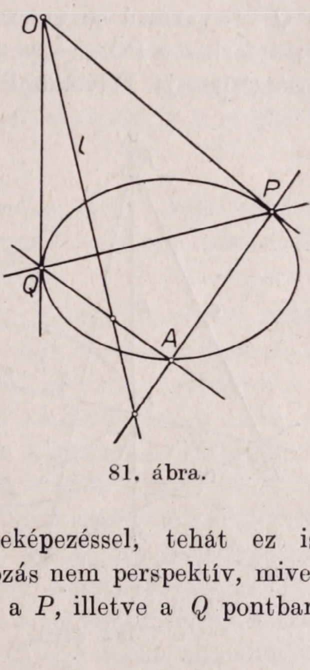
A tétel duálisa a következő:

60.6. Tétel. *Ha az ABC háromszög AB és AC oldala érintője a $\mathcal{C}$ másodrendű görbének, s ha az A csúcs polárisán van olyan P pont, mely nem tartozik a $\mathcal{C}$ görbéhez, s melyet a B és C csúccsal összekötő PB és PC egyenesek konjugáltak, akkor az ABC háromszög harmadik oldala, BC is érintője a $\mathcal{C}$ görbének.*

A másodrendű görbéknek projektív sugár-, illetve pontsorokkal való származtatására vonatkoznak a következő tételek.

60.7. Steiner-féle tétel. *A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe pontjait két tetszőleges pontjából vetítő sugársorok vonatkozása projektív, ha a két* *sugársornak azok az egyenesei felelnek meg egymásnak, melyek a $\mathcal{C}$ görbének ugyanazt a pontját vetítik.* — Ezt rövidebben úgy fogjuk kifejezni, hogy *a $\mathcal{C}$ másodrendű görbe pontjait bármely két pontjából projektív sugársorok vetítik.*

Bizonyítás. Legyen P és Q a $\mathcal{C}$ görbe két tetszőleges, egymástól különböző pontja ; jelentse A a $\mathcal{C}$ görbe változó pontját. A PA és QA egyenest egymásnak feleltetjük meg ; ha A a P ponttal azonos, akkor PA jelenti a P pontban a $\mathcal{C}$ görbéhez húzott érintőt ; hasonlóan, ha A egybeesik Q-val, QA a $\mathcal{C}$ görbe érintője a Q pontban. A P és a Q középpontú sugársorok közti vonatkozásról, melyet ilyen módon kaptunk, azt mondjuk, hogy azt *a $\mathcal{C}$ másodrendű görbével való metszés származtatja.* — A PQ egyenes pólusát jelöljük O-val, s legyen l egy, az O ponton átmenő egyenes, mely nem megy át sem a P, sem a Q ponton (81. ábra). Az l egyenesnek a PA és a QA egyenessel való metszéspontja egymáshoz konjugált $\mathcal{C}$-re vonatkozóan, bármely pontja is A a $\mathcal{C}$ görbének (**60**.3). Ha a P középpontú sugársort az l egyenessel metszük, majd az l egyenest önmagára képezzük le úgy, hogy minden pontja a $\mathcal{C}$-re vonatkozó konjugáltjába megy át, végül l pontjait a Q pontból vetítjük, ennek a három projektív leképezésnek az összetétele megegyezik a P és Q középpontú sugársorok között $\mathcal{C}$ által származtatott leképezéssel, tehát ez is projektív. A két sugársor közti vonatkozás nem perspektív, mivel a PQ egyenes nem önmagának (hanem a P, illetve a Q pontban húzott érintőnek) felel meg.



81. ábra.

A tétel duálisa a következő :

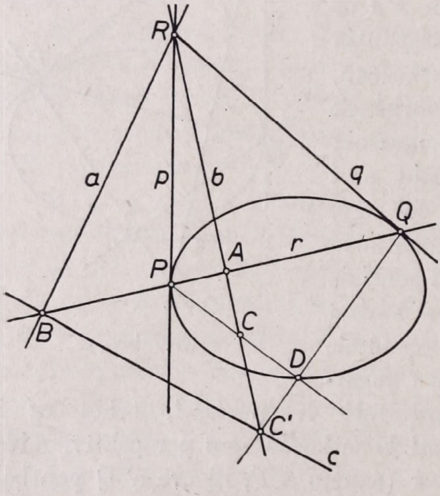
60.8. Tétel. *A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe érintői $\mathcal{C}$-nek két tetszőleges érintőjét projektív pontsorokban metszik.*

Ha tehát p és q a $\mathcal{C}$ görbe két érintője, s ha a p egyenes minden, az érintési ponttól különböző pontjának az ebből a pontból $\mathcal{C}$-hez húzott, s p-től különböző érintőnek q-val közös pontját feleltetjük meg, a p és a q egyenes pontjai között egy projektív vonatkozáshoz jutunk. A p és q egyenes metszéspontjának a p, illetve a q egyenes érintési pontja felel meg; a p és q közti projektív vonatkozás nem perspektív.

A **60**.7 és 8 tétel megfordítása a következő:

60.9. Tétel. *Két projektív, nem perspektív sugársor megfelelő egyeneseinek metszéspontjai másodrendű görbét alkotnak. Két projektív, nem perspektív pontsor megfelelő pontjait összekötő egyenesek egy másodrendű görbének az érintői.*

Bizonyítás. A tétel első állítását bizonyítjuk be, melyből a második állítás a síkbeli dualitás elve szerint következik. — Jelöljük P-vel és Q-val a két sugársor középpontját, p-vel és q-val a P, illetve a Q középpontú sugársornak azt az egyenesét, melynek a másik sugársorban a $PQ=r$ egyenes felel meg; legyen R a p és q egyenes metszéspontja. Felveszünk az R ponton át egy b egyenest, mely nem megy át sem a P, sem a Q ponton. Jelöljük A-val b és r metszéspontját, B-vel az A pontnak a P, Q pontokra vonatkozó harmonikus konjugáltját (82. ábra). Legyen PC és QC' a P és a Q középpontú sugársor két egymásnak megfelelő egyenese, mely különbözik p, q és r-től, s jelöljük C-vel és C'-vel ezeknek a b egyenessel való metszéspontját, továbbá c-vel a BC' egyenest. A B, C, P, R pontok közül bármely három nem fekszik egy egyenesen, s a b, c, p, r egyenesek közül bármely háromnak nincs közös pontja. A **34**.3 tétel szerint van a síknak egy és csak egy olyan Ω korrelatív leképezése önmagára, melynél a B, C, P, R pontnak rendre a b, c, p, r egyenes felel meg. A $BP=r$ egyenesnek Ω-nál a b és p egyenes R metszéspontja, az $RC=b$ egyenesnek az r és c egyenes B metszéspontja, továbbá a b és r egyenes A metszéspontjának az $a=BR$ egyenes felel meg. E szerint az ABR háromszög mindegyik csúcsának Ω-nál az átellenes oldal felel



82. ábra.

meg; a **35**.1 tétel szerint tehát Ω egy poláritás. A P pont polárisa, p a P ponton megy át, s ezért Ω hiperbolikus poláritás; jelöljük $\mathcal{C}$-vel az Ω-hoz tartozó másodrendű görbét. A Q pont a $\mathcal{C}$ görbén fekszik, mivel a $\mathcal{C}$ görbe P pontjának az A, B konjugált pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltja (**59**.13). A PC és QC' egyenesek D metszéspontja is a $\mathcal{C}$ görbéhez tartozik, a **60**.5 tétel szerint, mivel a PQ-hoz konjugált b egyenes a PQD háromszög PD és QD oldalát két konjugált C és C' pontban metszi (C' a C pont polárisán, c-n fekszik). Tehát a P és a Q középpontú sugársorok között megadott projektív vonatkozás a PR, PQ és PD egyeneseknek ugyanúgy a QP, QR és QD egyeneseket felelteti meg, mint az a projektív vonatkozás, melyet a két sugársor között a $\mathcal{C}$ másodrendű görbével való metszés származtat; ebből következik, hogy a két projektív vonatkozás megegyezik egymással. E szerint a két sugársornak bármely két olyan egyenese, mely a megadott projektív vonatkozásnál egymásnak felel meg, a $\mathcal{C}$ görbén metszi egymást, s a metszéspontok összessége a $\mathcal{C}$ görbével azonos.

60.10. T é t e l. *A sík tetszőleges öt pontján, melyek közül bármely három nem fekszik egy egyenesen, átmegy egy és csak egy másodrendű görbe.*

B i z o n y í t á s. Legyen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 öt olyan pont, mely közül bármely három nem fekszik egy egyenesen; az A_iA_j és A_kA_l egyenesek csak akkor megegyezők, ha az i, j indexek a k, l indexekkel megegyeznek (a sorrendet nem tekintve). Az A_1 és az A_2 középpontú sugársorok között projektív vonatkozást határoznak meg az A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, és az ezeknek sorban megfelelő A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5 egyenesek. Ez a projektív vonatkozás nem perspektív, mivel a három-három megfelelő egyenes A_3, A_4, A_5 metszéspontja nem fekszik egy egyenesen. A két sugársor megfelelő egyeneseinek metszéspontjai egy $\mathcal{C}$ másodrendű görbét alkotnak, melyhez hozzátartozik az öt megadott pont (**60**.9). Ha $\mathcal{C}'$ egy másik másodrendű görbe volna, mely átmegy ezen az öt ponton, akkor az A_1 és az A_2 középpontú sugársornak az a két projektív vonatkozása, melyet a **60**.7 tétel értelmében a $\mathcal{C}$ és a $\mathcal{C}'$ görbével való metszés származtat, megegyezik egymással az A_3, A_4, A_5 ponton átmenő három-három egyenesre nézve; tehát a két projektív vonatkozás azonos egymással, s a $\mathcal{C}'$ görbe azonos $\mathcal{C}$-vel.

Ugyanezzel a meggondolással bizonyíthatjuk be a következő állításokat, melyekre mint a **60**.10 tétel korolláriumaira fogunk hivatkozni:

60.11. Tétel. *Ha az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok közül bármely három nem fekszik egy egyenesen, s ha a_1 az A_1 ponton átmenő egyenes, mely nem megy át az A_2, A_3, A_4 pontok közül egyiken sem, akkor van egy és csak egy olyan másodrendű görbe, melynek pontjai az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok, s érintője az a_1 egyenes.*

60.12. Tétel. *Ha az A_1, A_2, A_3 pontok nem feküsznek egy egyenesen, s ha a_1 és a_2 az A_1, illetve az A_2 ponton átmenő, s az $A_1A_2A_3$ háromszög oldalaitól különböző egyenesek, akkor van egy és csak egy olyan másodrendű görbe, melynek pontjai A_1, A_2, A_3, s érintői a_1 és a_2.*

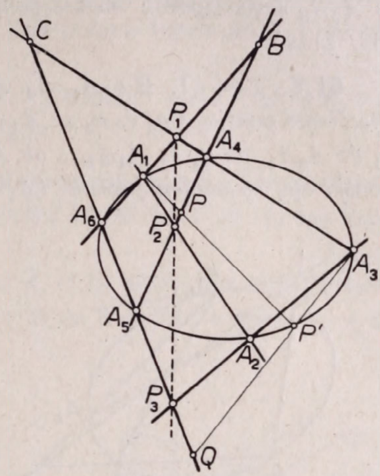
A fenti tételek duálisa szerint öt érintő, vagy négy érintő s egyiken az érintési pont, vagy három érintő s kettőn az érintési pont meghatározza a másodrendű görbét. A duális tételek pontos megfogalmazását s bebizonyítását az olvasóra bízzuk.

61. §. A PASCAL-féle tétel.

A **60**.10 tétel szerint egy másodrendű görbe hat tetszőleges pontja között fennáll egy összefüggés; ezt határozza meg a következő

61.1. PASCAL-féle tétel. *Ha A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 a $\mathcal{C}$ másodrendű görbe hat tetszőleges pontja, akkor az A_1A_2 és A_4A_5, az A_2A_3 és A_5A_6, s az A_3A_4 és A_6A_1 egyenesek P_2, P_3, P_1 metszéspontja egy egyeneshez tartozik.* Más megfogalmazásban: *egy másodrendű görbe bármely húrhatszögének átellenes oldalai egy egyenesen metszik egymást.*

Bizonyítás. Nem zárjuk ki azt az esetet, hogy a hatszög két szomszédos csúcsa, A_i és A_{i+1} egybeesik; ebben az esetben a hatszög A_iA_{i+1} oldalán az A_i pontban $\mathcal{C}$-hez húzott érintőt értjük (s ha $i=6$, akkor A_{i+1} az A_1 pontot jelenti). Ha a hatszög két, nem szomszédos csúcsa egybeesik, a tétel állítása magától értetődik, s ezért ezt az esetet kizárjuk. Az A_4A_5 és A_5A_6 egyenesek pontjai között egy leképezést értelmezünk a következő módon: az A_4A_5 egyenes bármely P pontjának megfeleltetjük az A_1P egyenesnek a $\mathcal{C}$ görbével közös P' pontját, mely különbözik A_1-től (kivéve, ha P az A_1 pontban húzott érintőn fekszik), s a P' pontnak megfeleltetjük az A_5A_6 egyenesnek az A_3P' egyenessel való Q metszéspontját (83. ábra). Mivel az A_1 és az A_3 középpontú sugársorok között a $\mathcal{C}$ másodrendű görbével való metszés projektív vonatkozást létesít (**60**.7), ezért az A_4A_5 egyenesnek az A_5A_6 egyenesre való leképezése, mely minden P pontnak a fenti előírással meghatározott Q pontot felelteti meg, projektív leképezés. A két egyenes metszéspontja, A_5 a leképezésnél önmagának felel meg, tehát a leképezés perspektív (**6**.4). Jelöljük B-vel az A_4A_5 és A_6A_1, és C-vel az A_5A_6 és A_3A_4 egyenesek metszéspontját. Az A_4A_5 egyenes P_2, A_4 és B pontjának az A_5A_6 egyenes P_3, C és A_6 pontja felel meg; a megfelelő pontokat összekötő P_2P_3, A_4C és BA_6 egyenesek a perspektivitás középpontján mennek át. Mivel A_4C az A_3A_4 egyenessel, és BA_6 az A_6A_1 egyenessel azonos, metszéspontjuk P_1; tehát a P_2P_3 egyenes átmegy a P_1 ponton, vagyis a P_1, P_2, P_3 pont egy egyenesen fekszik.



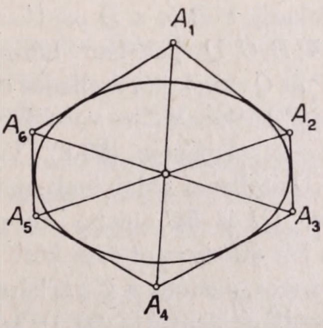
83. ábra.

A Pascal-féle tételből indirekt meggondolással könnyen adódik a tétel megfordítása:

61.2. Tétel. *Ha az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ hatszög átellenes oldalainak metszéspontjai egy egyenesen feküsznek, akkor a hatszög csúcsai egy másodrendű görbéhez tartoznak, feltéve, hogy közülök bármely három nem fekszik egy egyenesen.*

A Pascal-féle tétel duálisa a

61.3. Brianchon-féle tétel. *Ha az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ hatszög oldalai a $\mathcal{C}$ másodrendű görbének érintői, akkor az átellenes csúcsokat összekötő A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 egyenesek egy ponton mennek át* (84. ábra).

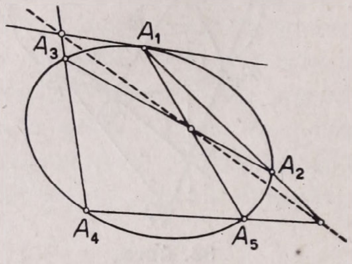


84. ábra.

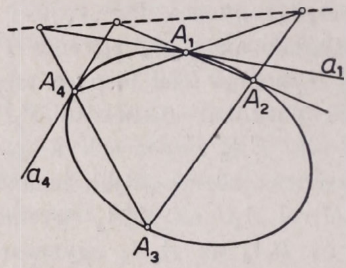
A Pascal-féle tétel következő speciális esetei úgy adódnak, hogy két-két szomszédos csúcsot egybeesőnek veszünk fel.

61.4. Tétel. *Ha A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 a $\mathcal{C}$ másodrendű görbe öt* *különböző pontja, akkor az A_1 pontban húzott érintőnek az A_3A_4 egyenessel közös pontja, továbbá az A_1A_2 és A_4A_5, s az A_1A_5 és A_2A_3 egyenespárok metszéspontja egy egyenesen fekszik.* $(A_1=A_6)$ (85. ábra).

61.5. Tétel. *Ha A_1, A_2, A_3, A_4 a $\mathcal{C}$ másodrendű görbe négy tetszőleges pontja, s a_1 és a_4 az A_1 és A_4 pontban húzott érintő, akkor az a_1 és A_3A_4, az a_4 és A_1A_2, s az A_1A_4 és A_2A_3 egyenespárok metszéspontja egy egyenesen fekszik.* $(A_1=A_6,\ A_4=A_5)$ (86. ábra).



85. ábra.



86. ábra.

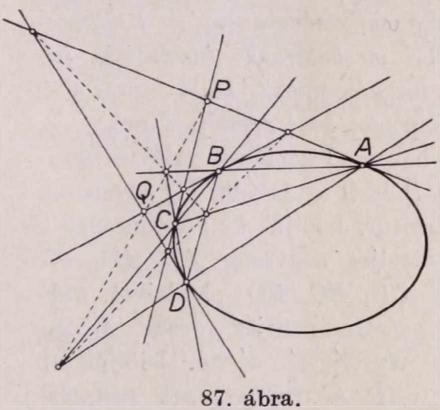
Ha A, B, C, D a $\mathcal{C}$ másodrendű görbe négy különböző pontja, akkor az A és a C pontban a $\mathcal{C}$ görbéhez húzott érintők P metszéspontja, továbbá az $ABCD$ teljes négyszög AB és CD, valamint AD es BC átellenes oldalainak metszéspontja egy egyenesen fekszik $(A_1=A_2=A,\ A_3=B,\ A_4=A_5=C,\ A_6=D)$ (87. ábra). Ebből A és B, valamint C és D felcserélésével adódik, hogy ugyanazon az egyenesen fekszik a B és a D pontban húzott érintőknek Q metszéspontja. Az A, B, C, D pontban húzott érintők teljes négyoldalt alkotnak; P és Q ennek két átellenes csúcspontja, s PQ a négyoldal egyik átlója. A PQ átlónak $\mathcal{C}$-re vonatkozó pólusa a négyoldal másik két átlójának a metszéspontja (**60**.2). Viszont az $ABCD$ teljes négyszög AB és CD átellenes oldalainak metszéspontja a négyszög egyik átlóspontja, az AD és BC oldalak metszéspontja a négyszög másik átlóspontja, a két átlóspontot összekötő egyenes a fentiek szerint a PQ egyenessel azonos, s ennek a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozó pólusa a teljes négyszög harmadik átlóspontja (**60**.1). Teljes négyoldal és teljes négyszög esetében egyképpen *átlósháromszög*nek nevezzük a három átló, illetve a három átlóspont által meghatározott háromszöget; így eredményünket a következő tételben mondhatjuk ki (mely magában foglalja a **60**.1 és 2 tételt is):

61.6. Tétel. *A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe bármely húrnégyszögének, s annak az érintő-négyszögnek, melynek érintési pontjai a húrnégyszög csúcsai, ugyanaz az átlósháromszöge, s ez poláris háromszög a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozóan* (87. ábra).

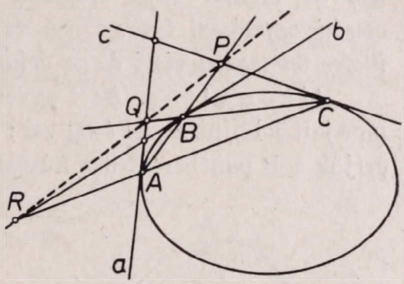
A Pascal-féle tétel további speciális esete ($A_1=A_2=A$, $A_3=A_4=B$, $A_5=A_6=C$) a következő:

61.7. Tétel. *A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe valamely húrháromszögének oldalai az átellenes csúcsban a $\mathcal{C}$ görbéhez húzott érintőket egy egyenesen metszik.*

Jelöljük az ABC húrháromszög A, B, C, csúcsában $\mathcal{C}$-hez húzott érintőt a, b, c,-vel; a fenti tétel szerint az a és BC, a b és AC, s a c



87. ábra.



88. ábra.

és AB egyenesek metszéspontja egy egyenesen fekszik; tehát *az ABC és az abc háromszög perspektív* (88. ábra).

A **61**.7 tételből levezetjük a következőt:

61.8. Tétel. *Ha A, B, C, a $\mathcal{C}$ másodrendű görbe három tetszőleges pontja, és a, b, c az ezekben húzott érintők, akkor a-nak b-vel és c-vel való metszéspontja harmonikusan választja el az A pontot s BC-nek a-val közös pontját.*

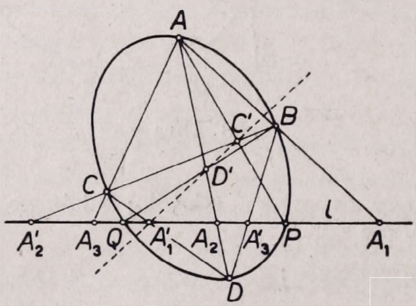
Bizonyítás. (88. ábra) Legyen P, Q, R rendre az AB egyenesnek c-vel, BC-nek a-val és CA-nak b-vel való metszéspontja; a **61**.7 tétel szerint a P, Q, R pontok egy egyenesen feküsznek. Az $ABQR$ teljes négyszög A, Q csúcsait harmonikusan választja el a $BR=b$ és $CP=c$ egyenessel való metszéspontja (az előbbi átlóspont, és $c=CP$ átló).

62. §. A DESARGUES-féle tétel.

Legyen $ABCD$ egy teljes négyszög, és l olyan egyenes, mely nem megy át a négyszög egyik csúcsán sem. A **14**.6 tétel szerint *az $ABCD$ teljes négyszög meghatároz az l egyenesen egy involuciót* abban az értelemben, hogy van az l egyenesnek egy és csak egy olyan involuciója, mely felcseréli egymással a teljes négyszög átellenes oldalaival való metszéspontokat; ha l átmegy a teljes négyszög valamely átlóspontján, ez fixpontja az involuciónak. Egy másodrendű görbébe beírt teljes négyszögekre érvényes a következő

62.1. DESARGUES-féle tétel. *Legyen $ABCD$ egy teljes négyszög, amelynek csúcsai a $\mathcal{C}$ másodrendű görbén feküsznek, s legyen l olyan egyenes, amely nem megy át a négyszög egyik csúcsán sem. Az l egyenesnek az $ABCD$ teljes négyszög által meghatározott involuciója felcseréli egymással l-nek $\mathcal{C}$-vel való metszéspontjait, ha l metszi $\mathcal{C}$-t, illetve önmagába viszi át az érintési pontot, ha l érintője $\mathcal{C}$-nek.*

Bizonyítás. Az l egyenesnek a $\mathcal{C}$ görbével való metszéspontjait jelöljük P-vel és Q-val; ha P és Q egybeesik, PQ egyenesen értjük a P pontban $\mathcal{C}$-hez húzott érintőt. Jelöljük az l egyenesnek a teljes négyszög AB, AD, AC, CD, BC, BD oldalaival való metszéspontját sorban A_1, A_2, A_3, A_1', A_2', A_3'-vel. Jelöljük az AP és BC egyenes metszéspontját C'-vel, s a BQ és AD egyenes metszéspontját D'-vel (89. ábra). A PASCAL-féle tételt alkalmazzuk az $APQBCD$ húrhatszögre: az átellenes oldalak metszéspontjai, C', A_1', D' egy egyenesen feküsznek. E szerint



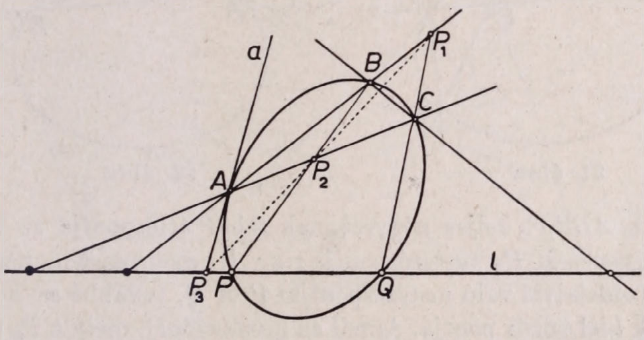
89. ábra.

az $ABC'D'$ teljes négyszög AB, AD', $C'D'$, BC' oldalainak az l egyenessel való metszéspontja A_1, A_2, A_1', A_2'. Az l egyenesnek az $ABCD$ és az $ABC'D'$ teljes négyszög által meghatározott involuciója megegyezik egymással, mivel mindkettő az A_1 pontot A_1'-vel, s az A_2 pontot A_2'-vel cseréli fel. A **14**.6 tétel szerint ennél az involuciónál az $ABCD$ teljes négyszög AC és BD oldalának l-lel közös A_3 és A_3' pontja egymásba, s az $ABC'D'$ teljes négyszög AC' és BD' oldalának l-lel közös pontja: P és Q egymásba megy át, vagy ha P egybeesik Q-val, akkor fixpont. A fenti bizonyítás VEBLEN-től származik.

Megemlítjük a DESARGUES-féle tétel következő határeseteit, melyek a PASCAL-féle tétel speciális eseteinek felelnek meg, s úgy származnak, hogy a teljes négyszög csúcsai közül kettőt, vagy kettő-kettőt egybeesőnek veszünk fel.

62.2. Tétel. *Ha az ABC háromszög csúcsai a $\mathcal{C}$ másodrendű görbén feküsznek, s ha az l egyenes a $\mathcal{C}$ görbét két, P és Q pontban metszi, s nem megy át az ABC háromszög egyik csúcsán sem, akkor az l egyenesnek annál az involuciójánál, mely az AB és AC oldalakkal való metszéspontokat egymással, s a BC oldallal és az A-ban húzott érintővel való metszéspontokat egymással cseréli fel, a P és Q pont egymásba megy át. Ha pedig l érintője a P pontban a $\mathcal{C}$ görbének, akkor ennél az involuciónál P fixpont.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a PASCAL-féle tétel speciális esetét (**61**.4) az $ABPQC$ húr-ötszögre, s az A pontban $\mathcal{C}$-hez húzott

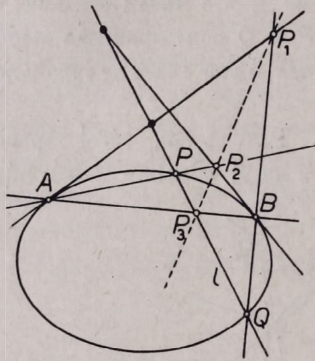


90. ábra.

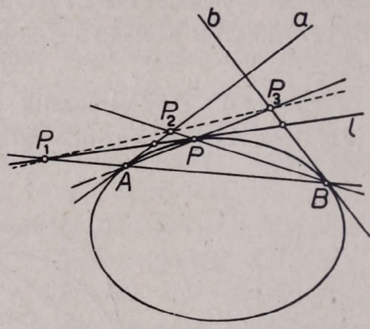
a érintőre; e szerint az AB és QC, az AC és BP, s az a és PQ egyenesek metszéspontja, amelyet P_1, P_2, P_3-mal jelölünk, egy egyenesen fekszik (90. ábra). A P_1P_2BC teljes négyszög átellenes oldalainak az l egyenessel való metszéspontjai a P, Q pontok, továbbá az a és BC, illetve az AC és AB egyeneseknek l-lel való metszéspontjai ; a **14**.6 tétel szerint van az l egyenesnek egy olyan involuciója, mely a három pontpár közül mindegyiknek két pontját egymással cseréli fel. Ha l érintője $\mathcal{C}$-nek, a $P{=}Q$ pont fixpontja az involuciónak.

62.3. Tétel. *Ha A és B a $\mathcal{C}$ másodrendű görbe két tetszőleges pontja és l olyan egyenes, mely nem megy át sem A-n, sem B-n,* *s mely a $\mathcal{C}$ görbét a P és Q pontban metszi (vagy P-ben érinti), akkor az l egyenesnek annál az involuciójánál, melynek fixpontja az AB egyenessel közös pontja, s mely felcseréli egymással az A-ban és B-ben húzott érintőkkel való metszéspontokat, a P, Q pontok egymásba mennek át (illetve, ha l érintő, akkor P a másik fixpont).*

Bizonyítás. A **61**.5 tételt alkalmazzuk az $APQB$ húrnégyszögre, feltéve, hogy l a $\mathcal{C}$ görbét két különböző P és Q pontban metszi. E szerint az A pontban húzott a érintőnek QB-vel közös P_1 pontja, a B-ben húzott b érintőnek AP-vel közös P_2 pontja, s az AB és PQ egyenesek P_3 metszéspontja egy egyenesen fekszik (91.



91. ábra.



92. ábra.

ábra). Az ABP_1P_2 teljes négyszögnek tehát átlóspontja az AB és $l=PQ$ egyenesek P_3 metszéspontja; az l egyenesnek a négyszög átellenes oldalaival való metszéspontjai P és Q, továbbá az a és a b érintőnek l-lel közös pontja. Annál az involuciónál, mely a P_3 pontot önmagába, s l-nek a-val és b-vel való metszéspontját egymásba viszi át, a **14**.6 tétel szerint P és Q egymásba megy át. — Ha pedig l érintője $\mathcal{C}$-nek a P pontban (92. ábra), akkor a **61**.7 tétel szerint az l és AB, az a és BP, s a b és AP egyenesek P_1, P_2, P_3 metszéspontja egy egyenesen fekszik; az ABP_2P_3 teljes négyszögnek két átlóspontja P és P_1, ezek harmonikusan választják el egymástól az $l=PP_1$ egyenesnek az a és b oldalakkal való metszéspontját.

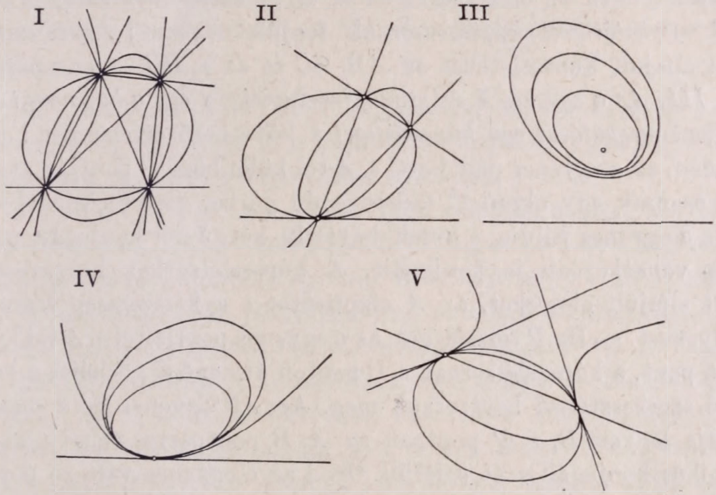
63. §. Kúpszeletsorok.

Értelmezés. *Elfajult kúpszeleten* értünk egy pontot, továbbá egy tetszőleges egyenespárt, mely állhat két különböző, vagy egymással egybeeső egyenesből.

Az elnevezés indokolásaként utalunk arra, hogy a kúpfelületet minden, a csúcsán átmenő sík vagy a csúcspontban, vagy egy egyenespárban metszi, vagy egy egyenes mentén érinti, melyek a kúpfelületnek alkotói; az utóbbi esetben azt az alkotót, melyen a sík a kúpfelületet érinti, a sík és a kúpfelület két egybeeső metszésvonalának tekintjük (l. erről még a 70. §-t).

A másodrendű görbéket s az elfajult kúpszeleteket közös néven *kúpszeleteknek* fogjuk nevezni.

Értelmezés. Egy síkban fekvő kúpszeleteknek olyan összességét, melyben legfeljebb véges sok elfajult kúpszelet van, *kúpszeletsor*-



93. ábra.

nak nevezzük, ha a sík minden pontján, véges sok pontot kivéve, átmegy az összességnek egy és csak egy eleme.

A nélkül, hogy megvizsgálnók, mennyiben teljes az alábbi felsorolás, a kúpszeletsorok következő típusaival foglalkozunk (93. ábra).

I. Ha A, B, C, D a sík négy tetszőleges olyan pontja, melyek közül bármely három nem fekszik egy egyenesen, akkor a síknak minden, ezektől különböző P pontján s az A, B, C, D pontokon átmegy egy és csak egy kúpszelet. Ha a P pont nem tartozik az $ABCD$ teljes négyszög egyik oldalához sem, akkor az A, B, C, D, P pontokon átmegy egy és csak egy nem elfajult kúpszelet (azaz másodrendű görbe) a **60**.10 tétel szerint; ha pedig P a teljes négyszög valamelyik oldalához, például AB-hez tartozik, akkor az AB és CD egyenesekből, vagyis a teljes négyszög két átellenes oldalából álló elfajult kúpszelet az egyetlen, mely az öt ponton átmegy. Ezeknek a kúpszeleteknek az összességét *az* A, B, C, D *alappontok által meghatározott kúpszeletsor*nak fogjuk nevezni.

II. Ha A, B, C három, nem egy egyenesen fekvő pont, s a az A ponton átmenő egyenes, mely nem megy át a B, C pontok közül egyiken sem, akkor a síknak minden, az A, B, C alappontoktól s a pontjaitól különböző P pontján egy és csak egy olyan kúpszelet megy át, melynek pontjai A, B, C s érintője a (**60**.11). Ezeknek a kúpszeleteknek az összességét *az* A, B, C *alappontok és az* a *érintő által meghatározott kúpszeletsor*nak fogjuk nevezni; hozzávesszük, mint elfajult kúpszeleteket az AB, AC és az a, BC egyenespárokat.

III. Az a *egyenes* **J** *elliptikus involuciója, s egy* a *hoz nem tartozó* A *pont meghatároz egy kúpszeletsort* a következő értelemben: a sík minden, az a egyenes pontjaitól s A-tól különböző P pontján átmegy egy és csak egy olyan $\mathcal{C}$ másodrendű görbe, melyre vonatkozóan A az a egyenes pólusa, s a-nak bármely két, **J**-nél konjugált pontja $\mathcal{C}$-re vonatkozóan is konjugált. A kúpszeletsorhoz hozzávesszük, mint elfajult elemeket, az A alappontot s a kétszeresen számított a egyenest. — Ha P tetszőleges, az a egyenes pontjaitól s A-tól különböző pont, a kúpszeletsornak a P ponton átmenő $\mathcal{C}$ görbéjét a következő szerkesztéssel határozzuk meg. Az AP egyenes és a metszéspontja legyen B, a P pontnak az A, B pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltja Q. Jelöljük C-vel az a egyenes változó pontját, és C'-vel **J**-nél származó képét. A C pontsort P-ből s a C' pontsort Q-ból vetítve a P és a Q középpontú sugársor között projektív vonatkozást létesítünk, mely nem perspektív, mivel **J**-nek nincs fixpontja. A megfelelő egyenesek metszéspontjai egy $\mathcal{C}$ másodrendű görbét alkotnak, mely átmegy a P ponton (**60**.9). Az A pont az a egyenesnek $\mathcal{C}$-re vonatkozó pólusa, s az a egyenesnek $\mathcal{C}$-re vonatkozó involuciója megegyezik **J**-vel (**60**.3).

IV. A $\mathcal{C}$ *másodrendű görbe s ennek* A *pontjához tartozó* a *érintője által meghatározott kúpszeletsor* értelmezés szerint azokból a $\mathcal{C}'$ másodrendű görbékből áll, melyekbe $\mathcal{C}$ az A középpontú és a tengelyű speciális perspektivitásoknál megy át; ezeknek közös érintője az a egyenes s közös érintési pontjuk A (l. erre vonatkozóan a **64**.4 tételt). A kúpszeletsorhoz hozzávesszük a kétszeresen számított a egyenest is. Ha a sereg két $\mathcal{C}'$ és $\mathcal{C}''$ görbéjének a-tól különböző érintői az a egyenesen metszik egymást, akkor az érintési pontok egy, az A ponton átmenő egyenesen feküsznek ; ez a tulajdonság jellemzi a kúpszeletsort.

V. Ha A, B két különböző pont, s a és b két az A, illetve a B ponton átmenő, AB-től különböző egyenes, akkor a sík minden olyan P pontján, mely az a, b, AB egyenesek közül egyikhez sem tartozik, átmegy egy és csak egy olyan kúpszelet, melynek pontjai A és B s érintői a és b (**60**.12). Ezeknek összességét *az A, B alappontok s az a, b érintők által meghatározott kúpszeletsor*nak fogjuk nevezni ; hozzávesszük mint elfajult kúpszeleteket az a, b egyenespárt s a kétszeresen számított AB egyenest.

A kúpszeletsorok fenti öt típusára bebizonyítjuk a következő tételt :

63.1. Sturm-féle tétel. *Egy kúpszeletsor elemei bármely olyan egyenest, mely nem megy át a kúpszeletsor egyik alappontján sem, egy involuciónál megfelelő pontpárokban metszenek.*

Bizonyítás. Az *I, II, V* típus esetében a tétel közvetlenül következik a **62**.1, 2, 3 tételből. — A *III* típus esetében legyen l egy tetszőleges, a-tól különböző egyenes, mely nem megy át az A ponton ; l és a metszéspontját jelöljük B-vel, ennek **J**-nél származó képét B'-vel, s a $B'A$ egyenesnek l-lel való metszéspontját P-vel. Az l egyenes a P pontban érintője a kúpszeletsor ezen a ponton átmenő $\mathcal{C}$ görbéjének. Ha $\mathcal{C}'$ a kúpszeletsornak egy másik görbéje, melynek az l egyenessel két közös pontja van, akkor B-nek $\mathcal{C}'$-re vonatkozó polárisa a $B'P$ egyenes, s ennek l-lel közös P pontját B-től harmonikusan választják el l-nek $\mathcal{C}'$-vel való metszéspontjai (**59**.13). Tehát az l egyenesnek annál a hiperbolikus involuciójánál, melynek fixpontjai B és P, a $\mathcal{C}'$ görbével való két metszéspont egymásnak felel meg.

A *IV* típus esetében legyen l egy a-tól különböző egyenes, mely nem megy át az A ponton ; l és a közös pontját jelöljük B-vel. A kúpszeletsor minden $\mathcal{C}'$ görbéjére vonatkozóan a B pont polárisa ugyanaz az AP egyenes, ahol P-vel jelöljük ennek az egyenesnek l-lel közös pontját ; tehát $\mathcal{C}'$-nek l-lel való metszéspontjai egymásnak felelnek meg a B, P fixpontokra vonatkozó hiperbolikus involuciónál.

63.2. Legyen $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ egy kúpszeletsor két, nem elfajult görbéje, s jelöljük Ω-val és Ω'-vel az ezekre vonatkozó polaritást. Az $\Omega\Omega'=\mathbf{T}$ szorzat a síknak önmagára való kollineációja.

Ha $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ egy I típusú kúpszeletsorhoz tartozik, akkor az alappontok által meghatározott $ABCD$ teljes négyszög mindkét görbének húrnégyszöge, s ennek átlósháromszöge poláris háromszög mind a $\mathcal{C}$, mind a $\mathcal{C}'$ görbére vonatkozóan. Ebben az esetben a **T** kollineációnak fixpontjai és invariáns egyenesei a közös poláris háromszög csúcsai és oldalai. Könnyen belátható, hogy ezeken kívül **T**-nek nincs más invariáns eleme, tehát **T** a 30. § I típusához tartozó, nem perspektív leképezés.

Ha $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ egy II típusú kúpszeletsor elemei, akkor a **T** leképezés fixpontjai A, és a BC egyenesnek a-val közös D pontja ; invariáns egyenesei a, továbbá az az egyenes, mely az A pontot D-nek a B, C pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltjával köti össze. A **T** leképezés a 30. § II típusához tartozik.

Ha $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ egy III, vagy V típusú kúpszeletsor elemei, akkor **T** általános perspektivitás, végül, ha $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ egy IV típusú kúpszeletsorhoz tartozik, akkor **T** speciális perspektivitás.

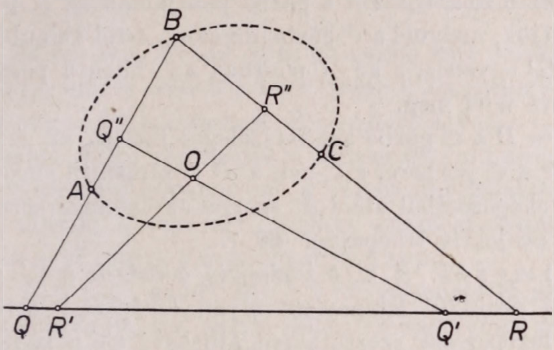
63.3. Jegyezzük meg, hogy a IV típus értelmezésére szolgáló tulajdonsága megvan a III és V típusú kúpszeletsoroknak is ; a III típus esetében azok az általános perspektivitások, melyeknek középpontja A és tengelye a, s az V típus esetében azok, melyeknek középpontja az a és b egyenesek C metszéspontja, s tengelye AB, egymásba viszik át a kúpszeletsor elemeit. Egyébként az V típus esetében a kúpszeletsor elemeit az ABC fixpontokkal bíró összes kollineációk is egymásba viszik át.

A fenti állítások igazolását az olvasóra bízzuk.

63.4. Tétel. *Ha* **J** *az u egyenes elliptikus involuciója, s A, B, C három, nem egy egyenesen fekvő pont, melyek közül egyik sem tartozik az u egyeneshez, akkor a három ponton átmegy egy és csak egy olyan másodrendű görbe, melyre vonatkozóan az u egyenes* **J**-*nél megfelelő pontjai konjugáltak egymáshoz.*

Bizonyítás. Az AB egyenes és u metszéspontja legyen Q, ennek az A, B pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltja Q'', s Q-nak **J**-nél származó képe Q'. A BC egyenes és u metszéspontja legyen R, ennek a B, C pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltja R'', s R-nek **J**-nél származó képe R'. A $Q'Q''$ és $R'R''$ egyenesek metszéspontját jelöljük O-val (94. ábra). Az O pont, az u egyenes, s ennek **J** involuciója meghatároznak egy III típusú kúpszeletsort, melynek egy és csak egy $\mathcal{C}$ görbéje megy át az A ponton. Az O pontnak a $\mathcal{C}$

görbére vonatkozó polárisa u, ezen konjugált pontok Q és Q', tehát Q polárisa a $Q'Q''$ egyenes; ennek az AQ egyenessel való Q'' metszéspontja és Q harmonikusan választja el egymástól az AQ egyenesnek a $\mathcal{C}$ görbével való két metszéspontját. A két metszéspont közül az egyik A, tehát a másik B, mivel a szerkesztés szerint A, B, Q, Q'' harmonikus pontnégyes. E szerint B, s hasonlóan a C pont is a $\mathcal{C}$ görbén fekszik.



94. ábra.

M e g j e g y z é s. A fenti tételnek az euklidesi síkra alkalmazott speciális esete arra az ismert szerkesztésre vezet, mellyel *három, nem egy egyenesen fekvő ponton át kört* rajzolunk (u a végtelen távoli egyenes és **J** az abszolut involució). — Ha a fenti tételben a **J** elliptikus involució helyett egy hiperbolikus involuciót veszünk fel az u egyenesen, a tétel állítása közvetlenül következik a **60**.10 tételből.

63.5. Vizsgáljuk meg, mennyiben határoz meg egy poláris háromszög egy másodrendű görbét. Ha a PQR háromszög oldalait p, q, r-rel jelöljük ($p=QR$, stb.), s ha A olyan pont, amely nem tartozik a háromszög egyik oldalához sem, s a egy, az A ponton átmenő egyenes, mely nem megy át a háromszög egyik csúcsán sem, akkor van a síknak egy és csak egy olyan korrelációja, mely a P, Q, R, A pontnak rendre a p, q, r, a egyenest felelteti meg (**34**.3), s ez egy polaritás (**35**.1). Mivel az a egyenes átmegy pólusán, az A ponton, a polaritás hiperbolikus; az önmagához konjugált pontok egy $\mathcal{C}$ másodrendű görbét alkotnak, melynek pontja A, érintője a, s poláris háromszöge PQR.

Ha tehát a PQR poláris háromszögön kívül a $\mathcal{C}$ másodrendű görbének egy A pontját s az ebben húzott érintőjét megadjuk, ezáltal a $\mathcal{C}$ görbe egyértelműen meg van határozva.

64. §. A másodrendű görbék projektív leképezései.

A STEINER-féle tétel (**60**.7) módot ad arra, hogy a másodrendű görbéknek önmagukra s egymásra való projektív leképezéseit hasonlóan értelmezzük, mint az egyenesekét (3. §).

Értelmezés. Legyen $\mathcal{C}$ egy másodrendű görbe, és A ennek valamely pontja; *az A középpontú sugársor és a $\mathcal{C}$ másodrendű görbe közti perspektív vonatkozás*on a görbe pontjainak az A pontból való vetítését értjük, melynél a $\mathcal{C}$ görbe minden, A-tól különböző P pontjának az AP egyenes, s az A pontnak az ebben a pontban $\mathcal{C}$-hez húzott érintő felel meg.

Ha A és B a $\mathcal{C}$ görbe két tetszőleges pontja, az A középpontú sugársornak a $\mathcal{C}$ görbére, s $\mathcal{C}$-nek a B középpontú sugársorra való perspektív leképezéséből alkotott szorzat az első sugársornak a másodikra való projektív leképezése (**60**.7).

Értelmezés. *A $\mathcal{C}$ másodrendű görbének a $\mathcal{C}'$ másodrendű görbére való projektív leképezésén* olyan leképezést értünk, amely perspektív leképezések szorzataként állítható elő a következő értelemben. Legyen A és A' a $\mathcal{C}$ és a $\mathcal{C}'$ görbe egy-egy tetszőleges pontja; a $\mathcal{C}$ görbének az A középpontú sugársorra való vetítése, ennek az A' középpontú sugársorra való valamely projektív leképezése (mely perspektív leképezésekből tehető össze az értelmezés szerint), s az A' középpontú sugársornak $\mathcal{C}'$-re való perspektív leképezése (azaz $\mathcal{C}'$-vel való metszése) ebben a sorrendben egymás után alkalmazva, a $\mathcal{C}$ görbének a $\mathcal{C}'$ görbére való projektív leképezését szolgáltatja.

64.1. *Ha két másodrendű görbe között adva van egy projektív vonatkozás, a két görbe megfelelő pontjait a két görbe egy-egy tetszőleges pontjából vetítő sugársorok is projektív vonatkozásban vannak.*

Tegyük fel, hogy a $\mathcal{C}$ görbének a $\mathcal{C}'$ görbére való projektív leképezését a fenti értelmezésnek megfelelően az A és az A' középpontú sugársorok $\mathbf{T}$ projektív leképezése által származtattuk, ahol A a $\mathcal{C}$, és A' a $\mathcal{C}'$ görbe egy-egy pontját jelenti. Legyen B a $\mathcal{C}$, és B' a $\mathcal{C}'$ görbe egy-egy tetszőleges pontja. A B középpontú sugársornak a $\mathcal{C}$ görbével való metszés által megfeleltetjük az A középpontú sugársort, ennek a megadott $\mathbf{T}$ projektív leképezéssel az A' középpontú, s az utóbbinak a $\mathcal{C}'$ görbével való metszés által a B' középpontú sugársort. Ezeknek a projektív leképezéseknek a szorzata projektív vonatkozás a B és a B' középpontú sugársorok között, s megegyezik azzal, melyet a két görbe megfelelő pontjainak a B, illetve a B' pontból való vetítése származtat.

Az értelmezésből közvetlenül következik, hogy ha $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ másodrendű görbék, és $\mathbf{T}$ a $\mathcal{C}$ görbének $\mathcal{C}'$-re, $\mathbf{T}'$ pedig $\mathcal{C}'$-nek $\mathcal{C}''$-re való projektív leképezése, akkor a $\mathcal{C}$ görbének a $\mathcal{C}''$ görbére való $\mathbf{TT}'$ leképezése ugyancsak projektív. Ebből speciális esetként adódik: *Egy másodrendű görbe önmagára való projektív leképezései csoportot alkotnak.*

64.2. *Ha egy másodrendű görbe önmagára való projektív leképezésének a görbén három fixpontja van, akkor a leképezés az azonosság.* A $\mathcal{C}$ görbe megadott leképezésének megfelel ugyanis a görbét valamely pontjából vetítő sugársornak önmagára való projektív leképezése, s mivel ennek a sugársornak a három fixponton átmenő egyenesei invariánsak, a sugársor minden egyenese önmagának felel meg; tehát a $\mathcal{C}$ görbe minden pontja fixpont.

Ha A, B, C a $\mathcal{C}$, és A', B', C' a $\mathcal{C}'$ másodrendű görbe háromhárom tetszőleges pontja, akkor előbbi eredményünk szerint legfeljebb egy olyan projektív leképezése van a $\mathcal{C}$ görbének a $\mathcal{C}'$ görbére, melynél az A, B, C pontnak az A', B', C' pont felel meg. Bebizonyítjuk, hogy van egy ilyen leképezés, s hogy az a $\mathcal{C}$ görbe α síkjának a $\mathcal{C}'$ görbe α' síkjára való kollineáris leképezésével állítható elő. Legyen ugyanis D az AB egyenes pólusa a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozóan, és D' az $A'B'$ egyenes pólusa a $\mathcal{C}'$ görbére vonatkozóan. Az A, B, C, D és az A', B', C', D' általános helyzetű pontnégyesek egyértelműen meghatározzák az α síknak az α' síkra való $\mathbf{T}$ kollineációját, melynél az A, B, C, D pontnak rendre az A', B', C', D' pont felel meg. A $\mathcal{C}$ görbére vonatkozó Ω polaritásnak $\mathbf{T}$-vel való transzformáltja: $\mathbf{T}^{-1}\Omega\mathbf{T} = \Omega'$ az α' síknak polaritása, mivel négyzete az azonosság. Az Ω-nál konjugált elemeknek $\mathbf{T}$-nél olyan elemek felelnek meg, melyek Ω' szerint konjugáltak. Ezért az Ω-nál önmagukhoz konjugált pontoknak és egyeneseknek, azaz a $\mathcal{C}$ görbe pontjainak és érintőinek $\mathbf{T}$-nél az α' síkban az Ω' polaritásra nézve önmagukhoz konjugált pontok és egyenesek, vagyis egy $\mathcal{C}''$ másodrendű görbe pontjai és érintői felelnek meg. A $\mathcal{C}''$ görbének pontjai az A', B', C' pontok s érintői az $A'D'$ és $B'D'$ egyenesek s ezért a **60**.12 tétel szerint $\mathcal{C}''$ a megadott $\mathcal{C}'$ görbével azonos. A $\mathbf{T}$ kollineáció tehát a $\mathcal{C}$ görbét a $\mathcal{C}'$ görbébe viszi át, s a két görbe között projektív vonatkozást létesít, melynél az A, B, C pontnak rendre az A', B', C' pont felel meg. Eredményünket a következő két tételben mondjuk ki:

64.3. T é t e l. *Ha A, B, C a $\mathcal{C}$ és A', B', C' a $\mathcal{C}'$ másodrendű görbe három-három tetszőleges pontja, akkor van a $\mathcal{C}$ görbének a $\mathcal{C}'$ görbére egy és csak egy olyan projektív leképezése, mely az A, B, C pontot rendre az A', B', C' pontba viszi át, s ez a leképezés megvalósítható a $\mathcal{C}$ görbe síkjának a $\mathcal{C}'$ görbe síkjára való kollineáris leképezésével.*

64.4. T é t e l. *Az α síknak az α' síkra való* **T** *kollineáris leképezésénél az α síkban fekvő minden $\mathcal{C}$ másodrendű görbének az α' síkban egy $\mathcal{C}'$ másodrendű görbe, s az α síknak $\mathcal{C}$-re vonatkozóan konjugált elemeinek az α' síknak $\mathcal{C}'$-re vonatkozóan konjugált elemei felelnek meg. Nevezetesen a $\mathcal{C}$ görbének valamely A pontjában húzott a érintője a $\mathcal{C}'$ görbének megfelelő A' pontjában húzott a' érintőjébe megy át.*

Az utóbbi tétel lehetővé teszi a síkbeli dualitás elvének alkalmazását eddigi eredményeinkre. Így például annak a tételnek, hogy két másodrendű görbe projektív vonatkozásánál az egymásnak megfelelő pontokat a két görbe egy-egy tetszőleges pontjából vetítő sugársorok vonatkozása is projektív (**64**.1), a fenti tételek folytán a következő duális tétel felel meg:

64.5. T é t e l. *Ha a $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ másodrendű görbék pontjai között meg van adva egy projektív vonatkozás, akkor a két görbe megfelelő pontjaiban húzott érintők a két görbe egy-egy fix érintőjét projektív pontsorokban metszik.*

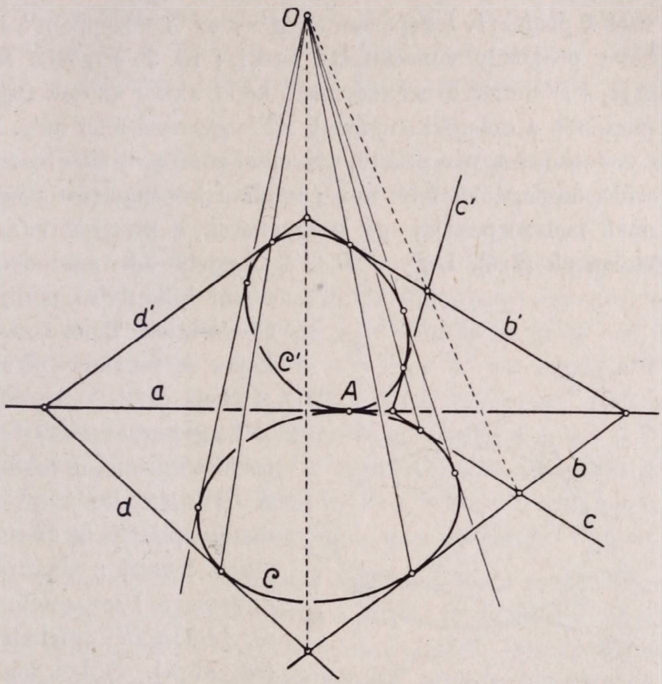
Ennek megfordítása:

64.6. T é t e l. *Legyen a és b' a $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ görbe egy-egy érintője, és* **T** *egy projektív vonatkozás az a és b' pontsor között. Ha a $\mathcal{C}$ görbének P pontjában húzott érintője az a egyenest a P_1 pontban metszi, a P_1-nek a b' egyenesen megfelelő P_1' pontból a $\mathcal{C}'$ görbéhez érintőt húzunk, s ennek érintési pontját, P'-t feleltetjük meg a P pontnak. A két görbe között ilyen módon származó vonatkozás projektív.*

Ennek a tételnek alkalmazásaként bebizonyítjuk a következő tételt:

64.7. T é t e l. *Ha a $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ másodrendű görbe két különböző α és α' síkban fekszik, s ha a két sík metszésvonala közös érintője a két görbének ugyanabban az A érintési pontban, akkor a két görbe perspektív, azaz egymásnak vetülete egy O pontból, mely nem tartozik sem az α, sem az α' síkhoz.*

B i z o n y í t á s. Legyen P a $\mathcal{C}$ görbe tetszőleges, A-tól különböző pontja, p a $\mathcal{C}$ görbe érintője a P pontban; p és a metszéspontján átmegy $\mathcal{C}'$-nek egy, a-tól különböző p' érintője, ennek P' érintési pontját feleltetjük meg a P pontnak (s A-t önmagának). A $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ görbe vonatkozása projektív a **64**.6 tétel szerint. Legyen b, c, d a $\mathcal{C}$ görbe három, a-tól s egymástól különböző érintője, b', c', d' a $\mathcal{C}'$ görbe megfelelő érintői (95. ábra); a bb', cc', dd' síkoknak nincs közös egyenesük, van egy O közös pontjuk. Az O pontból való vetí-



95. ábra.

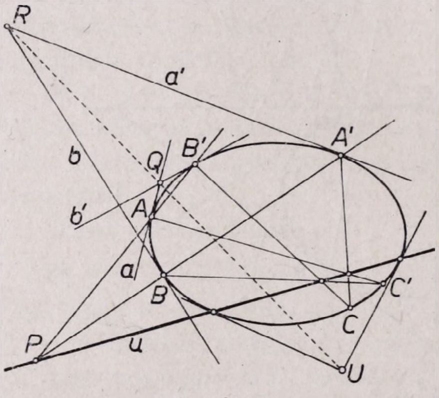
tésnél a $\mathcal{C}$ görbének az α' síkon olyan másodrendű görbe felel meg, melynek a, b', c', d' érintői, s az ezeken fekvő érintési pontjai közösek a $\mathcal{C}'$ görbével; a **60**.11 tétel szerint tehát a két görbe azonos egymással. E szerint $\mathcal{C}$-nek O-ból való vetülete a $\mathcal{C}'$ görbe.

65. §. Másodrendű görbék önmagukra való projektív leképezései.

65.1. Tétel. *A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe minden önmagára való* **T** *projektív leképezésének van egy u kollineációs tengelye és egy U kollineációs középpontja, a következő értelemben. Ha A és B a görbe két tetszőleges pontja, s A', B' ezeknek a képe, akkor az AB' és $A'B$ egye-*

nesek metszéspontja az u egyeneshez tartozik. Továbbá, ha a, b, a', b' az A, B, A', B' pontban a görbéhez húzott érintő, akkor az a és b' egyenesek metszéspontját az a' és b egyenesek metszéspontjával összekötő egyenes átmegy az U ponton.

Bizonyítás. Legyen A a $\mathcal{C}$ görbe tetszőleges olyan pontja, mely különbözik a **T** leképezésnél származó A' képétől. A görbe önmagára való **T** projektív leképezése az A' és az A középpontú sugársorok között projektív vonatkozást létesít; ha P a görbe tetszőleges pontja, s P' ennek **T**-nél származó képe, akkor az első sugársor $A'P$ egyenesének a második sugársor AP' egyenese felel meg. A két sugársor vonatkozása perspektív, mivel a középpontokat összekötő AA' egyenes önmagának felel meg; tehát a két sugársor megfelelő egyeneseinek metszéspontjai egy u egyenesen, a perspektivitás tengelyén feküsznek (**6**.6). Legyen B, C a $\mathcal{C}$ görbe két, egymástól, és A-tól különböző pontja, B', C' ezeknek **T**-nél származó képe. A fentiek szerint az $A'B$ és AB', s az $A'C$ és AC' egyenesek metszéspontjai az u egyenesen feküsznek. A $B'C$ és BC' egyenesek metszéspontja is az u egyenesen fekszik; alkalmazzuk ugyanis a Pascal-féle tételt az $AB'CA'BC'$ húrhatszögre (96. ábra). Ebből következik, hogy az u egyenes független az A pont megválasztásától, vagyis, hogy az u kollineációs tengelyt a **T** leképezés egyértelműen meghatározza. — A tétel második, a kollineációs középpontra vonatkozó állítása a fenti meggondolásból a síkbeli dualitás elve szerint következik, a **64**.4 tétel alapján.



96. ábra.

65.2. *A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe önmagára való* **T** *projektív leképezésének kollineációs tengelye a kollineáció középpontjának a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozó polárisa.*

Bizonyítás. (96. ábra). Legyen P az u kollineációs tengely tetszőleges olyan pontja, mely nem tartozik a $\mathcal{C}$ görbéhez; P-n átfektetünk egy, u-tól különböző egyenest, mely a $\mathcal{C}$ görbét két

A és B' pontban metszi. Jelöljük A'-vel az A pontnak **T**-nél, s B-vel a B' pontnak $\mathbf{T}^{-1}$-nél származó képét; az $A'B$ egyenes a **65**.1 tétel szerint átmegy a P ponton. Jelöljük a, b, a', b'-vel a görbének az A, B, A', B' pontban húzott érintőjét. Az a és b' egyenesek Q metszéspontja az AB' egyenes pólusa; az a' és b egyenesek R metszéspontja az $A'B$ egyenes pólusa; a QR egyenes, mely a **65**.1 tétel szerint átmegy az U ponton, az AB' és $A'B$ egyenesek P metszéspontjának a polárisa. E szerint az u egyenes bármely P pontjának a polárisa átmegy az U ponton, tehát U az u egyenes pólusa.

65.3. *A $\mathcal{C}$ görbe önmagára való projektív leképezésének kollineációs középpontja és tengelye a sík megfelelő* **T** *kollineációjánál invariáns elemek.*

Bizonyítás. Legyen P az u kollineációs tengely valamely pontja, AB' a P ponton átmenő, u-tól különböző egyenes, mely a görbét az A és B' pontban metszi, s jelöljük B-vel és B''-vel B'-nek a $\mathbf{T}^{-1}$ és **T** leképezésnél, továbbá A'-vel és A''-vel A-nak a **T** és $\mathbf{T}^2$ leképezésnél származó képét. A **65**.1 tétel szerint az AB' és $A'B$ egyenesek metszéspontja az u egyenesen fekszik, ez tehát a P pont. A P pont képe, P' az $A'B''$ és $A''B'$ egyenesek metszéspontja, szintén az u kollineációs tengelyen fekszik. Ebből következik, hogy a sík **T** kollineációjánál u invariáns egyenes, és u pólusa: U fixpont.

65.4. *A kollineációs tengelynek a görbével közös pontjai fixpontok, de a leképezésnek nincs más fixpontja a görbén.* Ez az állítás közvetlenül következik a kollineációs tengely értelmezéséből. Hasonlóan, a kollineációs középpontból a görbéhez húzott érintők invariánsak, más invariáns érintője nincs a görbének.

65.5. *A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe önmagára való projektív leképezését egyértelműen meghatározza a kollineáció tengelye (vagy középpontja) s a görbe egy tetszőleges, a tengelyhez nem tartozó A pontjának A' képe.*

A görbe tetszőleges B pontjának B' képét a következő szerkesztéssel határozzuk meg. Az $A'B$ egyenesnek u-val való P metszéspontját összekötjük A-val; az AP egyenesnek a görbével való másik (azaz A-tól különböző) metszéspontja a B' pont, ha AP metsző, és $B'=A$, ha AP érintő.

Értelmezés. A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe önmagára való projektív leképezését *hiperbolikus*nak nevezzük, ha két fixpontja van, vagyis ha a kollineációs tengely metszője a görbének; *parabolikus*nak, ha egy fixpontja van, s ekkor a kollineációs tengely érintője a görbének; ha a leképezésnek nincs a görbén fixpontja, akkor *elliptikus*nak nevezzük, ebben az esetben a kollineációs tengelynek nincs a görbével közös pontja.

A görbe önmagára való projektív leképezését *involuciónak* nevezzük, ha négyzete a görbén (s ezért az egész síkon is) az azonosság.

A 38. §-ban meghatároztuk a síknak azokat a kollineációit, melyek felcserélhetők egy Ω hiperbolikus polaritással. Ha Ω jelenti a $\mathcal{C}$ másodrendű görbére vonatkozó polaritást, akkor a síknak az Ω-val felcserélhető kollineációi, és csak ezek, származtatják a $\mathcal{C}$ görbe önmagára való projektív leképezéseit. Megállapítjuk ott levezetett eredményeinknek a másodrendű görbékre vonatkozó jelentését.

A **38**.1 tételből adódik:

65.6. *A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe önmagára való projektív leképezéseinek a sík következő kollineációi felelnek meg:*

a) Harmonikus perspektivitás, melynek U középpontja a görbe belsejében fekszik, s tengelye, u nem metszője a görbének (u az U pont polárisa). A $\mathcal{C}$ görbe önmagára való, megfelelő leképezését *elliptikus involuciónak*, vagy az *U pontra vonatkozó tükrözés*nek nevezzük.

a') Harmonikus perspektivitás, melynek U középpontja a görbe külsejében fekszik s tengelye u (az U pont polárisa) metszője a görbének. A görbe önmagára való, megfelelő leképezését *hiperbolikus involuciónak*, vagy az *u egyenesre vonatkozó tükrözés*nek nevezzük.

b) A leképezésnek egy U fixpontja van, ez a görbén fekszik, s egy u invariáns egyenese, mely az U pontban húzott érintő. A görbe leképezése *parabolikus.*

c) A leképezésnek két A és B fixpontja van a görbén, s a síkon egy harmadik fixpontja: U, mely az $AB=u$ egyenes pólusa. A görbe leképezése *hiperbolikus.*

d) A leképezésnek egy U fixpontja van a görbe belsejében, s ennek polárisa, u az egyedüli invariáns egyenes. A görbe leképezése *elliptikus.*

Mindegyik esetben u jelenti a kollineációs tengelyt és U a középpontot.

Ha a leképezés nem perspektív, akkor U és u a sík leképezésének egymáshoz asszociált invariáns elemei (**29**.5).

A **38**.3 tételből következik:

65.7. Tétel. *A $\mathcal{C}$ görbe önmagára való bármely nem involutorius, projektív leképezése előállítható a $\mathcal{C}$ görbe két involuciójának szorzataként.*

Bebizonyítjuk a következő tételt:

65.8. Tétel. *Ha a $\mathcal{C}$ görbe önmagára való* **T** *projektív leképezése a* $\mathbf{T}_1$ *és* $\mathbf{T}_2$ *involuciók szorzata, akkor a* $\mathbf{T}_1$ *és* $\mathbf{T}_2$ *harmonikus perspektivitások középpontját összekötő egyenes a* **T** *leképezés kollineációs tengelye; a két harmonikus perspektivitás tengelyének metszéspontja a kollineáció kö.éppontja.*

Bizonyítás. A $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ harmonikus perspektivitások O_1 és O_2 középpontját összekötő O_1O_2 egyenes invariáns a $\mathbf{T}=\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ leképezésnél. Ha O_1O_2 metszője, vagy nem metszője a $\mathcal{C}$ görbének, akkor **T** vagy perspektív s a **65**.6 a') vagy a) tipushoz tartozik, vagy nem perspektív s a **65**.6 c) vagy d) típushoz tartozik; mindegyik esetben kollineációs tengelye $u=O_1O_2$. Ha pedig O_1O_2 érintője $\mathcal{C}$-nek az A érintési pontban, akkor $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ az O_1O_2 egyenesen olyan hiperbolikus involuciókat származtatnak, melyeknek egyik fixpontja, A közös, tehát szorzatuk az O_1O_2 egyenes parabolikus leképezése (**16**.2); **T** a **65**.6 b) típushoz tartozik; egyetlen invariáns egyenese, O_1O_2 a kollineációs tengely. A tétel második állítása hasonló meggondolással adódik.

65.9. Tétel. *Ha a* $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ *involuciók közül legalább az egyik elliptikus, akkor* $\mathbf{T}=\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ *a* $\mathcal{C}$ *görbe hiperbolikus leképezése,* mivel ez esetben az O_1, O_2 középpontok közül legalább az egyik a görbe belsejében fekszik, s az $u=O_1O_2$ kollineációs tengely metszője a görbének (**59**.10; l. az egyenesre vonatkozó megfelelő **16**.5 tételt is).

Mivel a $\mathcal{C}$ görbe elliptikus involuciói megtartják, hiperbolikus involuciói megfordítják a görbe irányítását, a **65**.7 és 9 tételből következik, hogy a *$\mathcal{C}$ görbének minden olyan projektív leképezése önmagára, mely megfordítja $\mathcal{C}$ irányítását, hiperbolikus* (l. **15**.1).

65.10. Tétel. *Ha a $\mathcal{C}$ másodrendű görbe* $\mathbf{T}_1$ *és* $\mathbf{T}_2$ *hiperbolikus involucióinak egyik fixpontja közös, akkor* $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ *a $\mathcal{C}$ görbe parabolikus leképezése. Ha a* $\mathbf{T}_1$ *és* $\mathbf{T}_2$ *hiperbolikus involuciók fixpontjai különbözők, akkor* $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ *a $\mathcal{C}$ görbe elliptikus, vagy hiperbolikus leképezése, a szerint, hogy* $\mathbf{T}_1$ *és* $\mathbf{T}_2$ *fixpontjai elválasztják, vagy nem választják el egymást a $\mathcal{C}$ görbén.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ involuciók egyik fixpontja, A közös; A nyilván fixpontja $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$-nek is. Ha $\mathcal{C}$-nek egy A-tól különböző P pontja is fixpont volna $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$-nél, jelöljük P'-vel

P-nek $\mathbf{T}_1$-nél származó képét ; P' a $\mathbf{T}_2$ involuciónál P-be megy át. Továbbá P'-nek $\mathbf{T}_1$-nél a P pont, s ennek $\mathbf{T}_2$-nél a P' pont a képe, s ezért P' is fixpontja $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$-nek. E szerint a $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ leképezésnek a görbén három fixpontja van : A, P, P', tehát $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2=\mathbf{I}$, és $\mathbf{T}_1=\mathbf{T}_2$. Ha $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ egymástól különböző hiperbolikus involuciók, melyeknek A fixpontja közös, akkor tehát $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$-nek $\mathcal{C}$-n nincs más fixpontja, mint A, azaz $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ *parabolikus* leképezés. — Ha $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ fixpontjai különbözők, s elválasztják egymást a $\mathcal{C}$ görbén, akkor a $\mathbf{T}_1$-nek és $\mathbf{T}_2$-nek a síkban megfelelő harmonikus perspektivitások tengelyei egy, a $\mathcal{C}$ görbe belsejében fekvő pontban metszik egymást, s mivel ez a pont a $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ leképezés kollineációs középpontja (**65**.8), tehát $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ a $\mathcal{C}$ görbe *elliptikus* leképezése. — Ha $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ fixpontjai különbözők, s nem választják el egymást a $\mathcal{C}$ görbén, akkor a $\mathbf{T}_1$-nek és $\mathbf{T}_2$-nek megfelelő harmonikus perspektivitások tengelyei $\mathcal{C}$ külsejében metszik egymást, s ezért $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ a $\mathcal{C}$ görbe *hiperbolikus* leképezése.

65.11. Tétel. *A $\mathcal{C}$ másodrendű görbének mindazok a projektív leképezései önmagára, melyeknek kollineációs tengelye ugyanaz az u egyenes, kommutatív, s a $\mathcal{C}$ görbén az esetleges fixpontok kivételével egyszeresen tranzitív $\mathbf{G}_u$ csoportot alkotnak.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ a $\mathcal{C}$ görbének két olyan projektív leképezése önmagára, melynek kollineációs tengelye u. A $\mathcal{C}$ görbe tetszőleges A pontjának, mely nem tartozik u-hoz, $\mathbf{T}_1$-nél és $\mathbf{T}_2$-nél egy-egy A-tól különböző B és C pont felel meg :

$$B=\mathbf{T}_1(A), \qquad C=\mathbf{T}_2(A).$$

A kollineációs tengely tulajdonságából következik, hogy a BC és u egyenes metszéspontján átmegy az A és $\mathbf{T}_2(B)$ pontokat, valamint az A és $\mathbf{T}_1(C)$ pontokat összekötő egyenes, tehát ez a két egyenes azonos egymással, s a $\mathcal{C}$ görbével való $\mathbf{T}_2(B)$ és $\mathbf{T}_1(C)$ metszéspontjuk egybeesik. E szerint :

$$\mathbf{T}_2(B)=\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2(A)=\mathbf{T}_1(C)=\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1(A),$$

tehát $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ felcserélhető egymással, vagyis a $\mathbf{G}_u$ csoport kommutatív. A **65**.4 és 5 tétel folytán a $\mathbf{G}_u$ csoport a $\mathcal{C}$ görbén egyszeresen tranzitív, az u egyenessel való metszéspontokat kivéve.

Értelmezés. A $\mathbf{G}_u$ *csoport pályavonalán* értjük azoknak a pontoknak az összességét, melyekbe a sík valamely P pontja a $\mathbf{G}_u$ csoport leképezéseinél átmegy.

65.12. Tétel. *A $\mathcal{C}$ görbének az u kollineációs tengelyhez tartozó projektív leképezéseiből álló* $\mathbf{G}_u$ *csoport pályavonalai kúpszeletsort alkotnak.*

Ha u nem metszi a $\mathcal{C}$ görbét, akkor $\mathbf{G}_u$ pályavonalai annak a *III* típusú kúpszeletsornak az elemei, melyet az u egyenes, ennek $\mathcal{C}$-re vonatkozó U pólusa, s az u egyenesen a $\mathcal{C}$-re nézve konjugált pontok (elliptikus) involuciója határoz meg.

Ha u érintője a $\mathcal{C}$ görbének az U pontban, akkor $\mathbf{G}_u$ pályavonalai annak a *IV* típusú kúpszeletsornak az elemei, melyekbe a $\mathcal{C}$ görbét az U középpontú és u tengelyű speciális perspektivitások viszik át.

Ha u metszi a $\mathcal{C}$ görbét az A és B pontokban, s u pólusa U, akkor $\mathbf{G}_u$ pályavonalai az A, B alappontok s az AU, BU érintők által meghatározott *V* típusú kúpszeletsor elemei.

Bizonyítás. A tétel bebizonyítására elegendő azt igazolni, hogy a nevezett kúpszeletsor elemei invariánsak a $\mathbf{G}_u$ csoport leképezéseinél. Ha u érintője, vagy nem metszője a $\mathcal{C}$ görbének, akkor az U középpontú és u tengelyű perspektivitások a kúpszeletsor elemeit egymásba viszik át (**63**.3) ; viszont a kúpszeletsor bármely elemét bármely más elemébe, melyek különböznek az elfajult elemektől, átviszi egy és csak egy U középpontú és u tengelyű perspektivitás. Ezek a perspektivitások felcserélhetők a $\mathbf{G}_u$ csoport elemeivel (**30**.7) ; ebből következik, hogy a $\mathbf{G}_u$ csoport leképezései, miként a $\mathcal{C}$ görbét, a kúpszeletsor minden elemét önmagába viszik át. Ha pedig az u egyenes metszője a $\mathcal{C}$ görbének, akkor a síknak az A, B, U fixpontokkal bíró kollineációi a kúpszeletsor elemeit egymásba viszik át (**63**.3), s mivel ezeknek a kollineációknak csoportja kommutatív (**30**.4), tehát a $\mathbf{G}_u$ csoport a kúpszeletsor minden elemét önmagába viszi át.

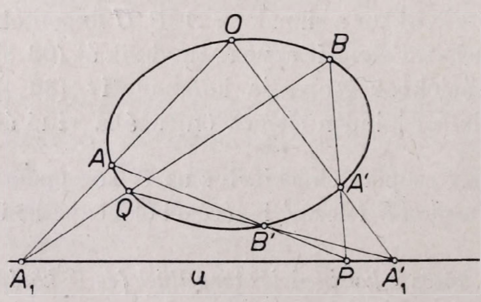
65.13. A $\mathbf{G}_u$ kommutatív csoport elemeinek s az U középpontú és u tengelyű perspektivitásoknak felcserélhetőségéből közvetlenül adódik a következő tétel :

A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe közös u kollineációs tengellyel (és U középponttal) bíró leképezéseinek, mint síkbeli kollineációknak, s az u tengelyű és U középpontú perspektivitásoknak a szorzatai kommutatív csoportot alkotnak, mely a síkon egyszeresen tranzitív, az U pontot és u pontjait kivéve, ha u érintője, vagy nem metszője $\mathcal{C}$-nek. Ha pedig u metszője $\mathcal{C}$-nek, akkor a csoport egyszeresen tranzitív abban, a $\mathcal{C}$-t tartalmazó szögtartományban, amelyet az U-ból $\mathcal{C}$-hez húzott érintők határoznak meg.

65.14. A $\mathbf{G}_u$ csoport elemei s az általuk az u egyenesen származtatott leképezések abban az esetben, ha u érintője a $\mathcal{C}$ görbének, kölcsönösen egyértelmű módon felelnek meg egymásnak; ha pedig u metszője, vagy nem metszője a $\mathcal{C}$ görbének, akkor a $\mathbf{G}_u$ csoportnak két eleme ugyanazt a leképezést származtatja az u egyenesen; a két leképezés közül az egyik a másiknak az U középpontú és u tengelyű harmonikus perspektivitással való szorzata.

65.15. *A $\mathbf{G}_u$ csoportnak, mely a $\mathcal{C}$ másodrendű görbének az u kollineációs tengelyhez tartozó leképezéseiből áll, a $\mathcal{C}$ görbe tetszőleges, u-hoz nem tartozó O pontjából való vetítéssel kölcsönösen egyértelmű és izomorf módon megfelel az u egyenes önmagára való projektív leképezéseinek egy $\mathbf{G}'_u$ csoportja, függetlenül az O pont megválasztásától.*

Legyen ugyanis $\mathbf{T}$ a $\mathcal{C}$ görbe önmagára való projektív leképezése, melynek kollineációs tengelye u, s jelöljük Σ_O-val a $\mathcal{C}$ görbének egy tetszőleges, u-hoz nem tartozó O pontjából való perspektív leképezését az u egyenesre. $\mathbf{T}$-nek Σ_O-val való transzformáltja: $\mathbf{T}'=\Sigma_O^{-1}\mathbf{T}\Sigma_O$ az u egyenes önmagára való projektív leképezése. Ha Q a $\mathcal{C}$ görbe tetszőleges másik, u-hoz nem tartozó pontja, és Σ_Q a $\mathcal{C}$ görbének a Q pontból u-ra való vetítése, akkor $\Sigma_Q^{-1}\mathbf{T}\Sigma_Q=\Sigma_O^{-1}\mathbf{T}\Sigma_O$. Ennek igazolására, jelöljük A_1-gyel u valamely pontját, A-val és B-vel A_1-nek O-ból és Q-ból $\mathcal{C}$-re való vetületét, továbbá A'-vel és B'-vel A-nak és B-nek $\mathbf{T}$-nél származó képét (97. ábra). Az A_1 pontnak a $\Sigma_O^{-1}\mathbf{T}\Sigma_O$, illetve a $\Sigma_Q^{-1}\mathbf{T}\Sigma_Q$ leképezésnél származó képe az OA' és a QB' egyenesnek u-val való metszéspontja. A PASCAL-féle tételt az $AB'QBA'O$ húrhatszögre alkalmazva azt kapjuk, hogy az OA és QB oldalak A_1 metszéspontját az AB' és BA' oldalak P metszéspontjával összekötő u egyenes tartalmazza az OA' és QB' egyenesek metszéspontját; ez az utóbbi pont az A_1 pont A'_1 képe mind a $\Sigma_O^{-1}\mathbf{T}\Sigma_O$, mind a $\Sigma_Q^{-1}\mathbf{T}\Sigma_Q$ leképezésnél. — Jegyezzük meg, hogy a $\mathbf{T}'=\Sigma_O^{-1}\mathbf{T}\Sigma_O$ leképezésnek a négyzete, vagyis a $\mathcal{C}$ görbe $\mathbf{T}^2$ leképezésének Σ_O-val való transzformáltja az u egyenesnek az a leképezése, melyet a sík $\mathbf{T}$ kollineációja származtat az u

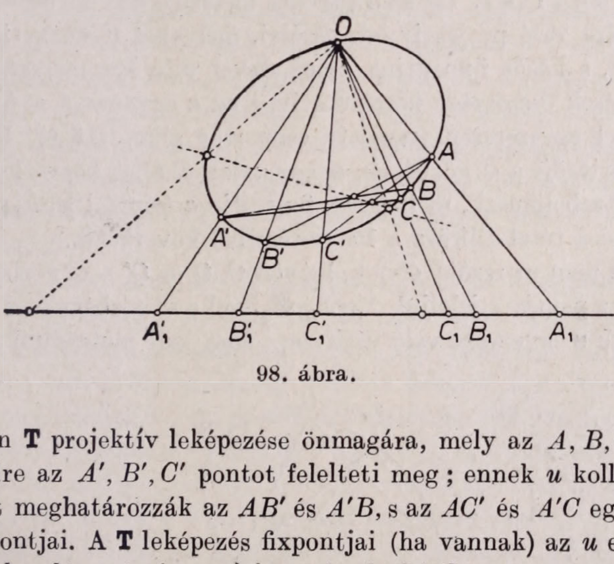


97. ábra.

egyenesen. Jelöljük ugyanis O'-vel O-nak **T**-nél származó képét; az OA egyenes képe $O'A'$, s ennek u-val közös pontja megegyezik u és OA'' metszéspontjával, vagyis az $A''=\mathbf{T}^2(A)$ pontnak O-ból u-ra való területével.

Az egyenes és a másodrendű görbék önmagukra való projektív leképezéseinek ez a kapcsolata új megvilágításban mutatja meg az egyenes önmagára való projektív leképezéseinek elméletét; erre vonatkoznak a következő megjegyzések.

65.16. Ha A_1, B_1, C_1 és A_1', B_1', C_1' az a egyenes három-három különböző pontja, *az a egyenes ama $\mathbf{T}_1$ projektív leképezésének fixpontjait, mely az A_1, B_1, C_1 pontot az A_1', B_1', C_1' pontba viszi át,* a következő szerkesztéssel határozhatjuk meg. Felveszünk egy tetszőleges $\mathcal{C}$ másodrendű görbét, s ennek egy, a-hoz nem tartozó O pontjából vetítjük az a egyenest $\mathcal{C}$-re; a megadott pontok vetülete legyen A, B, C és A', B', C' (98. ábra). A $\mathcal{C}$ görbének van egy és csak



98. ábra.

egy olyan **T** projektív leképezése önmagára, mely az A, B, C pontnak rendre az A', B', C' pontot felelteti meg; ennek u kollineációs tengelyét meghatározzák az AB' és $A'B$, s az AC' és $A'C$ egyenesek metszéspontjai. A **T** leképezés fixpontjai (ha vannak) az u egyenesnek $\mathcal{C}$-val való metszéspontjai; ezeknek O-ból az a egyenesre való vetülete adja a $\mathbf{T}_1$ leképezés fixpontjait.

65.17. Az egyenes önmagára való projektív leképezéseit a **13**.1 tétel értelmében előállíthatjuk egy síkban fekvő egyenesek közti három perspektív leképezés szorzataként. Tekintettel a **60**.9 tételre, mely szerint két projektív, nem perspektív sugársor megfelelő egyeneseinek metszéspontjai másodrendű görbét alkotnak, a **13**.1 tételből adódik a következő tétel:

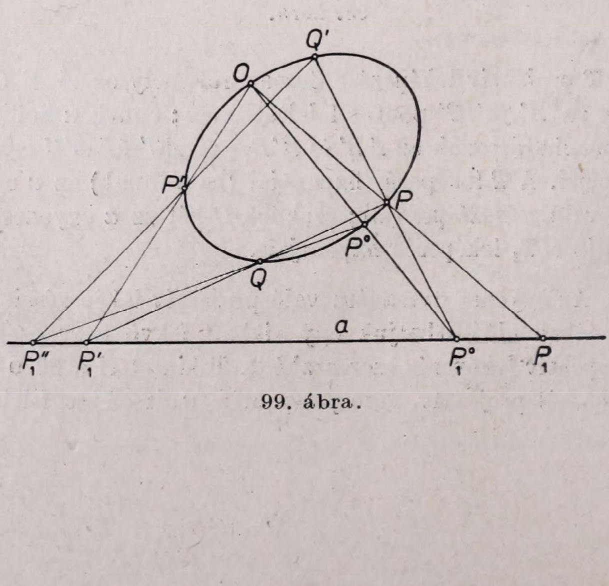
Az a egyenes minden önmagára való projektív leképezését előállíthatjuk egy $\mathcal{C}$ másodrendű görbe közvetítésével úgy, hogy az a egyenest a $\mathcal{C}$ görbe valamely O pontjából $\mathcal{C}$-re, s $\mathcal{C}$-t egy másik, alkalmasan választott Q pontjából a-ra vetítjük (feltesszük, hogy O és Q nem tartozik az a egyeneshez).

Az a egyenes önmagára való leképezése, melyet a fenti értelemben a $\mathcal{C}$ másodrendű görbe közvetít, hiperbolikus, parabolikus, vagy elliptikus, a szerint, hogy az a egyenes metszője, érintője, vagy nem metszője a $\mathcal{C}$ görbének.

65.18. *Az a egyenesnek mindazok a projektív leképezései önmagára, melyeket ugyanaz a $\mathcal{C}$ másodrendű görbe közvetít, kommutatív csoportot alkotnak, mely (az esetleges fixpontok kivételével) az egyenesen egyszeresen tranzitív.*

Bizonyítás. Ha az a egyenes metszője a $\mathcal{C}$ görbének, akkor a önmagára való projektív leképezései, melyeket $\mathcal{C}$ közvetít, hiperbolikusak, s közös fixpontjuk a-nak $\mathcal{C}$-vel való két metszéspontja; e leképezések összessége kommutatív, s az a egyenesen a fixpontok kivételével egyszeresen tranzitív csoportot alkot (**15**.6). Ha az a egyenes érintője a $\mathcal{C}$ görbének, akkor a-nak $\mathcal{C}$ által közvetített leképezései parabolikusak, melyeknek fixpontja a érintési pontja; ebben az esetben a tétel állítása a **15**.11 tételből következik.

Ha a nem metszője $\mathcal{C}$-nek, legyen O, Q és Q' a $\mathcal{C}$ görbe három tetszőleges pontja, s jelöljük Σ_O, Σ_Q, $\Sigma_{Q'}$-vel a $\mathcal{C}$ görbének az O, Q, Q' pontból az a egyenesre való vetítését. Meg kell mutatnunk, hogy a



99. ábra.

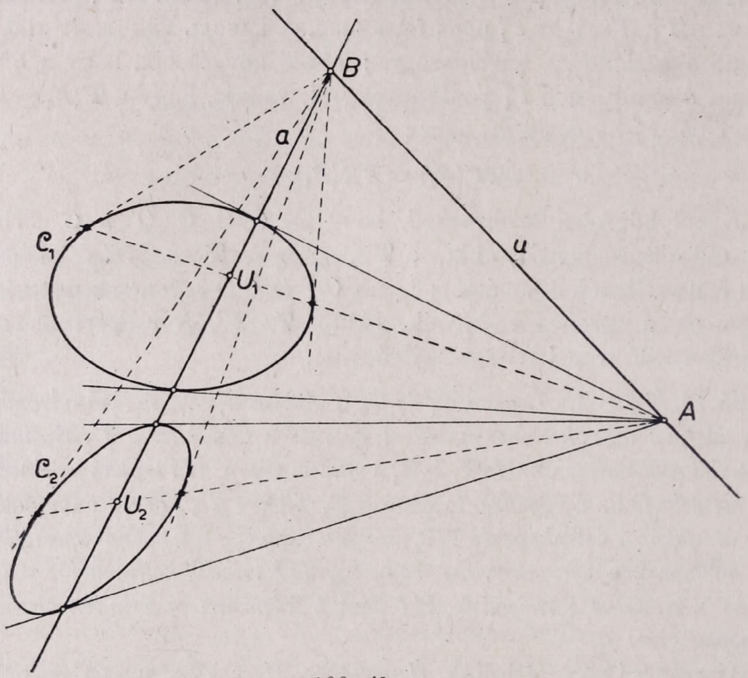
$\mathbf{T}=\Sigma_O^{-1}\Sigma_Q$ és $\mathbf{T}'=\Sigma_O^{-1}\Sigma_{Q'}$ leképezések felcserélhetők egymással. Legyen P_1 az a egyenes tetszőleges pontja, ennek O-ból $\mathcal{C}$-re való vetülete P, P-nek Q-ból a-ra való vetülete P_1^*; a P_1 pont képe $\mathbf{T}$-nél a P_1' pont. Jelöljük továbbá P'-vel OP_1' és $\mathcal{C}$, P_1''-vel $P'Q'$ és a, P_1^0-val $Q'P$ és a, s P^0-val OP_1^0 és $\mathcal{C}$ metszéspontját (99. ábra). A P_1 pontnak $\mathbf{TT}'$-nél a P_1'', $\mathbf{T}'$-nél a P_1^0 pont felel meg. A Pascal-féle tételt alkalmazzuk a $PQP^0OP'Q'$ húrhatszögre; ebből következik, hogy a P^0Q egyenes a-t szintén a P_1'' pontban metszi, vagyis, hogy a $\mathbf{T}'(P_1)=P_1^0$ pont $\mathbf{T}$-nél P_1''-be megy át, azaz:

$$\mathbf{TT}'(P_1)=\mathbf{T}'\mathbf{T}(P_1).$$

Ebből könnyen levezethető, hogy ha O, Q, O', Q' a $\mathcal{C}$ görbe négy tetszőleges pontja, akkor a $\mathbf{T}=\Sigma_O^{-1}\Sigma_Q$ és $\mathbf{T}''=\Sigma_{O'}^{-1}\Sigma_{Q'}$ leképezések felcserélhetők egymással; ha az OQ' és $O'Q$ egyenesek metszéspontja az a egyenesen fekszik, akkor $\mathbf{T}=\mathbf{T}''$. A csoportnak az egyenesen való tranzitivitása nyilvánvaló.

65.19. Tétel. *Legyen $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ a síkban két olyan másodrendű görbe, melyek egy, őket nem metsző u egyenesen ugyanazt a* $\mathbf{J}$ *elliptikus involuciót származtatják. Ha* $\mathbf{T}_1$ *és* $\mathbf{T}_2$ *a síknak olyan, III típusú kollineációi, melyeknél az u egyenes, továbbá a $\mathcal{C}_1$, illetve a $\mathcal{C}_2$ görbe önmagába megy át, akkor a két leképezés* $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ *szorzata vagy egy u tengelyű speciális, vagy harmonikus perspektivitás, vagy egy III típusú kollineáció, mely egy, az u egyenest tartalmazó, III típusú kúpszeletsor minden elemét önmagaba viszi át.*

Bizonyítás. Jelöljük U_1-gyel és U_2-vel az u egyenesnek $\mathcal{C}_1$-re és $\mathcal{C}_2$-re vonatkozó pólusát. Ha U_1 egybeesik U_2-vel, akkor $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ egy *III* típusú kúpszeletsor elemei, melyet az $U_1=U_2$ pont, az u egyenes, s ennek $\mathbf{J}$ elliptikus involuciója határoz meg; mindkét görbe invariáns mind a $\mathbf{T}_1$, mind a $\mathbf{T}_2$ leképezésnél (**65.**12), tehát a két leképezés szorzatánál is. — Tegyük fel, hogy U_1 és U_2 különbözők; jelöljük a-val az U_1U_2 egyenest, B-vel az a és u egyenes metszéspontját, és A-val B-nek a $\mathbf{J}$ involuciónál származó képét; A az a egyenes pólusa mind a $\mathcal{C}_1$, mind a $\mathcal{C}_2$ görbére vonatkozóan (100. ábra). A $\mathbf{T}_1$ leképezésnek az A középpontú és a tengelyű $\mathbf{T}_0$ harmonikus perspektivitással való $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_0=\mathbf{T}_1'$ szorzata az u egyenesen felcserélhető $\mathbf{J}$-vel, s megfordítja az u egyenes irányítását, tehát $\mathbf{T}_1'$ az u egyenes hiperbolikus involuciója, melynek fixpontjai, A_1 és B_1, a $\mathbf{J}$ involuciónál egymásnak felelnek meg (**17**.8). A sík $\mathbf{T}_1'$ kollineációjánál fixpontok A_1, B_1, U_1; ebből a **65**.6 felsorolás szerint következik, hogy $\mathbf{T}_1'$ a $\mathcal{C}_1$ görbén hiperbolikus leképezést származtat, amelynek fixpontjai vagy az A_1U_1, vagy a B_1U_1 egyenesnek $\mathcal{C}_1$-gyel való metszéspontjai. Tegyük fel például, hogy B_1U_1-nek $\mathcal{C}_1$-gyel való metszéspontjai fixpontok $\mathbf{T}_1'$-nél; ebben az esetben $\mathbf{T}_1'$-nek a B_1U_1



100. ábra.

egyenesen négy fixpontja van, tehát $\mathbf{T}_1'$ ezen az egyenesen az azonosság, s a síkban harmonikus perspektivitás, melynek középpontja A_1, és tengelye B_1U_1. A $\mathbf{T}_1$ leképezés a $\mathbf{T}_1'$ és $\mathbf{T}_0$ harmonikus perspektivitások szorzata:

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1'\mathbf{T}_0.$$

Hasonlóan, $\mathbf{T}_2'=\mathbf{T}_0\mathbf{T}_2$ egy harmonikus perspektivitás, melynek középpontja az u egyenes valamely A_2 pontja, s tengelye A_2-nek $\mathcal{C}_2$-re vonatkozó B_2U_2 polárisa, hol B_2-vel jelöljük A_2-nek a $\mathbf{J}$ involuciónál származó képét. Ebből következik, hogy

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_0\mathbf{T}_2'.$$

A $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ leképezések szorzata:

$$\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1'\mathbf{T}_0.\mathbf{T}_0\mathbf{T}_2' = \mathbf{T}_1'\mathbf{T}_2'$$

előállítható tehát a $\mathbf{T}_1'$ és $\mathbf{T}_2'$ harmonikus perspektivitások szorzataként; mivel ezek az u egyenesen a $\mathbf{J}$ elliptikus involucióval felcserélhető hiperbolikus involuciókat származtatnak, szorzatuk az u egyenesen vagy az azonosság, vagy egy, $\mathbf{J}$-vel felcserélhető elliptikus leképezés (**17**.8). Ha a $\mathbf{T}_1'$ és $\mathbf{T}_2'$ harmonikus perspektivitások középpontja egybeesik, akkor tengelyüknek u-val való metszéspontja is közös, mivel ez a középpontnak $\mathbf{J}$-nél származó képe; ebben az esetben $\mathbf{T}_1'\mathbf{T}_2'$ az u egyenesen az azonosság, s a síkban olyan perspektivitás, melynek tengelye u. Mivel a két perspektivitásnál, tehát ezek szorzatánál is invariánsak a közös középponton átmenő egyenesek, ez a pont a $\mathbf{T}_1'\mathbf{T}_2'$ perspektivitás középpontja; tehát $\mathbf{T}_1'\mathbf{T}_2'$ egy u tengelyű, speciális perspektivitás.

Ha azonban $\mathbf{T}_1'$ és $\mathbf{T}_2'$ középpontja különböző, tengelyüknek u-val való metszéspontja is különböző; $\mathbf{T}_1'$ és $\mathbf{T}_2'$ tengelyének O metszéspontja tehát nem tartozik az u egyeneshez. Az O pont, az u egyenes és ennek $\mathbf{J}$ involuciója meghatároz egy *III* típusú kúpszeletsort, melynek minden eleme invariáns mind a $\mathbf{T}_1'$, mind a $\mathbf{T}_2'$ harmonikus perspektivitásnál, tehát ezeknek $\mathbf{T}_1'\mathbf{T}_2'$ szorzatánál is. Ebben az esetben $\mathbf{T}_1'\mathbf{T}_2'$ vagy az O középpontú, u tengelyű harmonikus perspektivitás, vagy olyan *III* típusú kollineáció, melynek fixpontja O s invariáns egyenese u (**65**.6).

A fenti bizonyításból adódik a következő tétel is:

65.20. T é t e l. *A síknak azok a speciális, és harmonikus perspektivitásai, melyeknek tengelye az u egyenes, továbbá azok a III típusú kollineációi, melyek az u egyenesnek egy megadott* $\mathbf{J}$ *elliptikus involuciójával felcserélhetők, s melyek közül mindegyiknél invariánsak valamely, az u egyenest tartalmazó, III típusú kúpszeletsor elemei, együtt csoportot alkotnak. A csoport minden eleme előállítható két olyan harmonikus perspektivitás szorzataként, melynek középpontja a perspektivitási tengely és u metszéspontjának* $\mathbf{J}$*-nél származó képe.*

Ha u jelenti a sík végtelen távoli egyenesét és $\mathbf{J}$ az abszolut involuciót, akkor az utóbbi tétel jelentése a következő:

Az euklidesi sík eltolásai és forgásai csoportot alkotnak; ezt az euklidesi sík mozgáscsoportjának nevezzük. A csoport minden eleme előállítható két merőleges tükrözés szorzataként. (Lásd első kötet, 211. tétel. 255. o.).

66. §. Harmonikus pontnégyesek és projektív koordináta a másodrendű görbén.

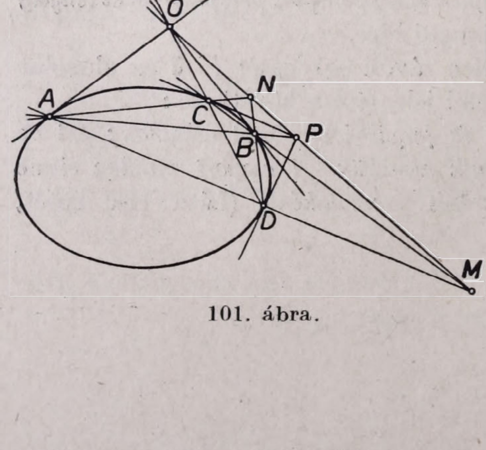
Értelmezés. A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe A, B, C, D pontjai értelmezés szerint *harmonikus pontnégyest* alkotnak, ha az őket $\mathcal{C}$ valamely P pontjából vetítő PA, PB, PC, PD egyenesek harmonikus négyest alkotnak. A **60**.7 tétel szerint a négy pontnak ez a tulajdonsága független a P pontnak a $\mathcal{C}$ görbén való speciális megválasztásától.

66.1. Tétel. *A $\mathcal{C}$ és a $\mathcal{C}'$ másodrendű görbék kölcsönösen egyértelmű vonatkozása akkor és csak akkor projektív, ha az egyik görbe bármely harmonikus pontnégyesének a másik görbén is harmonikus pontnégyes felel meg.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{T}$ egy projektív vonatkozás $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ között ; legyen O a $\mathcal{C}$ görbe egy pontja, s A, B, C, D egy harmonikus pontnégyes a $\mathcal{C}$ görbén. A $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ görbék közti projektív vonatkozás az O középpontú sugársornak az O' középpontú sugársorra való projektív leképezését származtatja, hol O' jelenti az O pont képét ; ennél az OA, OB, OC, OD harmonikus sugárnégyesnek egy harmonikus sugárnégyes felel meg. Az utóbbi négy sugárnak a $\mathcal{C}'$ görbével való, O'-től különböző metszéspontja legyen A', B', C', D' ; ezek az A, B, C, D pontoknak felelnek meg a két görbe megadott $\mathbf{T}$ projektív vonatkozásánál s harmonikus pontnégyest alkotnak a $\mathcal{C}'$ görbén.

Megfordítva, ha a $\mathbf{T}$ leképezésnél $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ harmonikus pontnégyesei egymásnak felelnek meg, akkor az O és az O' középpontú sugársorok harmonikus négyesei is egymásnak felelnek meg, s ezért a **12**.3 tétel szerint a vonatkozás projektív a két sugársor, s a két görbe között is.

66.2. Tétel. *A $\mathcal{C}$ másodrendű görbe A, B, C, D pontjai akkor és csak akkor alkotnak harmonikus pontnégyest, ha az AB és CD egyenesek konjugáltak a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozóan.*



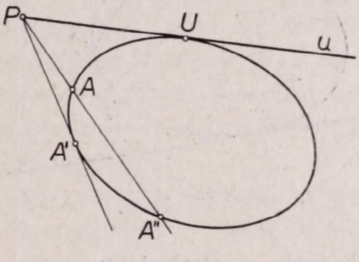
101. ábra.

Bizonyítás. Az $ABCD$ teljes négyszög AD és BC, illetve AC és BD oldalainak metszéspontját jelöljük M-mel és N-nel ;

legyen O és P a CD és az AB oldalnak az MN átlóval való metszéspontja (101. ábra). A **61**.6 tétel szerint az A és a B pontban húzott érintők metszéspontja, vagyis az AB egyenes pólusa, valamint a CD egyenes pólusa is az MN egyenesen fekszik. Ha AB és CD konjugáltak, akkor mindegyik átmegy a másiknak a pólusán, tehát pólusuk az O és a P pont. Tekintettel az $ABCD$ teljes négyszögre, az M, N, O, P pontnégyes harmonikus ; az ezeket a pontokat D-ből vetítő egyenesek, továbbá a $\mathcal{C}$ görbére való A, B, C, D vetületek szintén harmonikus négyest alkotnak. — A tétel megfordítása ugyanebből a meggondolásból következik.

66.3. Tétel. *Ha a $\mathcal{C}$ másodrendű görbe önmagára való* **T** *parabolikus leképezésénél az U pont önmagába, az A pont A'-be, s ez A''-be megy át, akkor A, A'', A', U a $\mathcal{C}$ görbén harmonikus pontnégyes.*

Bizonyítás. A **T** parabolikus leképezés kollineációs tengelye a görbének U-ban húzott u érintője. Ha A és B a $\mathcal{C}$ görbe két tetszőleges pontja, s A' és B' ezeknek a képe, akkor az AB' és $A'B$ egyenesek metszéspontja az u egyeneshez tartozik (**65**.1). Legyen $B = A'$; $A'B$ jelenti ekkor az A' pontban $\mathcal{C}$-hez húzott a' érintőt (102. ábra). E szerint az AA'' egyenes a'-t az u egyenesen fekvő P pontban metszi, tehát az $A'U$ egyenes az AA'' egyenesen fekvő P pont polárisa. Az AA'' és az $A'U$ egyenesek konjugáltak, s a **66**.2 tétel szerint az A, A'', A', U pontnégyes harmonikus.

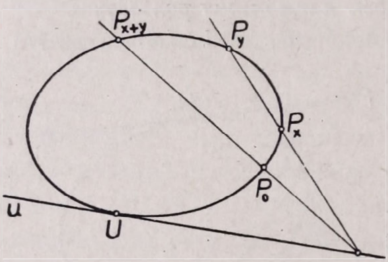


102. ábra.

66.4. Ugyanúgy, mint az egyenesen, a $\mathcal{C}$ másodrendű görbén is értelmezhetünk három különböző P_0, P_1, U pont alapján egy *harmonikus pontsorozatot* (l. 11. §) s ennek segítségével egy x *projektív koordinátát,* melynek $0, 1, \infty$ értéke felel meg a P_0, P_1, U alappontoknak. Ha a $\mathcal{C}$ görbét egy tetszőleges pontjából egy, ezen a ponton át nem menő a egyenesre vetítjük, *a görbén bevezetett projektív koordináta a vetítésnél az egyenesnek abba a projektív koordinátájába megy át, melynek alappontjai a P_0, P_1, U pontok vetületei.* Ez közvetlenül következik abból, hogy a vetítésnél a $\mathcal{C}$ görbe és az a egyenes harmonikus pontnégyesei egymásnak felelnek meg. Ugyanez a vetítés kölcsönösen egyértelmű és izomorf vonatkozást létesít a $\mathcal{C}$ görbe és az a egyenes önmagára való projektív leképezései között. Ebből következik, hogy *a $\mathcal{C}$ görbe önmagára való projektív leképezéseit a görbén bevezetett x projektív koordinátának ugyanazok a lineáris transzformációi fejezik ki, mint az egyenes megfelelő projektív leképezéseit.*

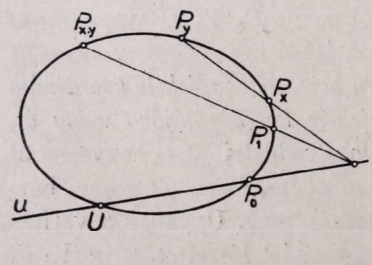
A 21. §-ban megismertük azokat a szerkesztéseket, melyekkel az egyenes két pontjának összegét és szorzatát meghatározhatjuk, vagyis azt a pontot, melynek koordinátája a két megadott pont koordinátájának összege, illetve szorzata (**21**.11 és 12). A másodrendű görbére vonatkozó megfelelő szerkesztések, amint várható, azoknál sokkal egyszerűbbek.

66.5. Legyenek P_0, P_1, U a $\mathcal{C}$ másodrendű görbén bevezetett x projektív koordináta alappontjai. Jelöljük P_x-szel $\mathcal{C}$-nek azt a pontját, melynek koordinátája x. A *P_x és P_y pontok összege* a P_x pont P_{x+y} képe $\mathcal{C}$-nek annál a parabolikus leképezésénél, mely az U pontot önmagába, és P_0-t P_y-ba viszi át. Ennek a leképezésnek kollineációs tengelye az U pontban $\mathcal{C}$-hez húzott u érintő. A P_xP_y és P_0P_{x+y} egyenesek metszéspontja az u egyenesen fekszik; tehát P_{x+y} a P_xP_y és u egyenesek metszéspontját P_0-val összekötő egyenesnek $\mathcal{C}$-vel való másik metszéspontja (103. ábra).

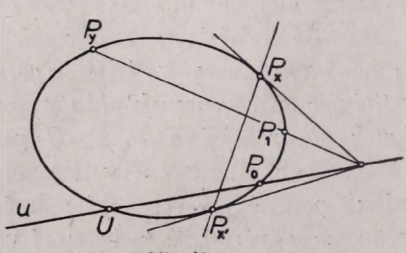


103. ábra.

66.6. A *P_x és P_y pontok szorzata* a P_x pont $P_{x.y}$ képe annál a hiperbolikus leképezésnél, melynek fixpontjai P_0 és U, s mely a P_1 pontot P_y-ba viszi át. Ennek a leképezésnek kollineációs tengelye a $P_0U=u$ egyenes. A $P_{x.y}$ pont a P_xP_y és u egyenesek metszéspontját P_1-gyel összekötő egyenesnek $\mathcal{C}$-vel való másik metszéspontja (104. ábra).



104. ábra.



105. ábra.

66.7. Ha a P_1 és P_y pontokat a $\mathcal{C}$ görbén nem választják el egymástól a P_0 és U pontok (vagyis, ha $y>0$), akkor van a $\mathcal{C}$ görbének két P_x és $P_{x'}$ pontja, melyekre $P_{x.x}$ és $P_{x'.x'}$ a P_y ponttal azonos. P_x és $P_{x'}$ azok a pontok, melyekben a P_1P_y és P_0U egyenesek metszéspontjának polárisa metszi $\mathcal{C}$-t ; ezeket P_y *négyzetgyökei*nek nevezzük. Mivel a $P_xP_{x'}$ és P_0U egyenesek konjugáltak, a P_x és $P_{x'}$ pontok összege P_0, vagyis $x+x'=0$, tehát $x'=-x$ (105. ábra).

A másodrendű görbék analitikus tárgyalása során tovább foglalkozunk a görbén bevezetett projektív koordinátával (l. 68. §)

67. §. Másodrendű görbék az affin és az euklidesi síkban.

Bármely két másodrendű görbe aequivalens egymással a sík projektív csoportjánál, azaz átvihető egymásba a sík valamely projektív leképezésével (**64**.3). Ha a sík egy u egyenesét mint *végtelen távoli egyenest* kitüntetjük, s az u egyenest változatlanul hagyó leképezések, vagyis az *affin leképezések csoportja* szempontjából osztályozzuk a másodrendű görbéket, ezeknek három osztályát kapjuk a végtelen távoli egyeneshez való helyzetüknek megfelelően.

Értelmezés. Egy másodrendű görbét *hiperbolá*nak, *parabolá*nak, vagy *ellipszis*nek nevezünk, a szerint, hogy az u végtelen távoli egyenes metszője, érintője, vagy nem metszője a görbének. A hiperbolát és ellipszist középponti vagy *centrális másodrendű görbé*nek nevezzük, s a *görbe középpontján* értjük a végtelen távoli egyenesnek a görbére vonatkozó pólusát.

Az ellipszis középpontja belső pont, a hiperbola középpontja külső pont, mivel a görbét nem metsző, illetve metsző egyenesnek a pólusa.

Egy *centrális másodrendű görbe átmérői*nek nevezzük a végtelen távoli pontok polárisát, azaz minden, a görbe középpontján átmenő egyenest. Ha a $\mathcal{C}$ görbét egy átmérője az A és A' pontokban metszi s ha U az AA' egyenes végtelen távoli pontja és O a görbe középpontja, akkor az A, A' pontok harmonikusan választják el egymástól az O és U pontokat, mivel ezek $\mathcal{C}$-re vonatkozóan konjugáltak. Ez azt jelenti, hogy *az átmérő AA' szakaszának középpontja a görbe O középpontjával egybeesik.*

Ha A és B a görbe két tetszőleges pontja, akkor a végesben fekvő AB szakaszt *a görbe húrjá*nak nevezzük.

Egy centrális másodrendű görbe két olyan átmérőjét, melyek a görbére vonatkozóan konjugált egyenesek, a görbe *konjugált átmérői-*

nek nevezzük. Két konjugált átmérő végtelen távoli pontjai egymáshoz konjugált pontok, közülök mindegyik a másik átmérőnek a pólusa. *A görbe két konjugált átmérője s a végtelen távoli egyenes poláris háromszöget alkot a görbére vonatkozóan.*

Ha a és b a $\mathcal{C}$ centrális másodrendű görbe két konjugált átmérője, akkor mindegyik felezi a másikkal párhuzamos húrokat, vagyis az egyikkel párhuzamos húrok középpontjai a másik átmérőn feküsznek. Ha ugyanis AA' az a átmérővel párhuzamos húr, s Q ennek középpontja, továbbá U az AA' egyenesnek (a-val közös) végtelen távoli pontja, akkor az A, A' és Q, U pontpárok harmonikusan választják el egymást. A b egyenes V végtelen távoli pontjából a görbéhez húzott érintők érintési pontjai a V pont polárisán, vagyis az a átmérőn feküsznek ; ez azt jelenti, hogy *az a átmérőnek a görbével való metszéspontjaiban húzott érintők párhuzamosak az a-hoz konjugált b átmérővel.*

Mivel a, b és u egy poláris háromszög oldalai, ennek két oldala metszője, a harmadik oldala nem metszője a görbének (**59**.8). Ellipszis esetében u nem metsző, tehát *minden átmérője metszője az ellipszisnek.* Hiperbola esetében u metsző, tehát *a hiperbola két konjugált a és b átmérője közül az egyik metsző, a másik nem metsző.* Ha például a metsző, akkor b nem metsző, s b pólusa, vagyis az a egyenes végtelen távoli pontja a görbének belső pontja ; minden ezen a ponton átmenő, azaz a-val párhuzamos egyenes metszője a görbének.

A hiperbolának a középpontján átmenő érintőit (melyeknek érintési pontja a hiperbola két végtelen távoli pontja) a *hiperbola aszimptotái*nak nevezzük. Ezek a hiperbolának önmagukhoz konjugált átmérői, vagyis annak az involuciónak invariáns egyenesei, melyet a hiperbola átmérőinek sorában a konjugált átmérők alkotnak.

67.1. *A sík bármely affin leképezésénél minden másodrendű görbe ugyanolyan típusú másodrendű görbébe megy át* (ellipszis ellipszisbe stb.). Az u végtelen távoli egyenes ugyanis a leképezésnél önmagába, s ennek a $\mathcal{C}$ másodrendű görbével közös pontjai $\mathcal{C}$ képének $\mathcal{C}'$-nek u-val közös pontjaiba mennek át. Ha $\mathcal{C}$ centrális görbe, középpontja, O az affin leképezésnél $\mathcal{C}$ képének, $\mathcal{C}'$-nek O' középpontjába megy át ; az u invariáns egyenesnek $\mathcal{C}$-re vonatkozó O pólusa ugyanis u-nak $\mathcal{C}'$-re vonatkozó O' pólusába megy át.

67.2. *Bármely két, ugyanolyan típusú másodrendű görbe átvihető egymásba a sík valamely affin leképezésével.*

B i z o n y í t á s. Ezt az állítást a **64**.3 tételből specializálással kapjuk. Ha $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ két tetszőleges parabola, végtelen távoli pontjuk legyen U és U' ; mindegyik görbén felveszünk két végesben fekvő A, B és A', B' pontot ; jelöljük V-vel az A pontban $\mathcal{C}$-hez, és V'-vel az A' pontban $\mathcal{C}'$-höz húzott érintő végtelen távoli pontját. Az A, B, U, V és A', B', U', V' általános helyzetű pontnégyeseknek a **26**.7 tétel szerint megfelel a síknak egy és csak egy olyan projektív leképezése, mely az első pontnégyest a másodikba viszi át. A **64**.4 és **60**.12 tétel szerint ennél a leképezésnél $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ görbébe megy át ; az u végtelen távoli egyenes invariáns, tehát a leképezés affinitás.

Ha $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ két hiperbola, végtelen távoli pontjuk legyen U, V és U', V', középpontjuk O és O' ; legyen továbbá A és A' egy-egy végesben fekvő pontjuk. Az A, O, U, V és A', O', U', V' általános helyzetű pontnégyeseknek megfelel a síknak egy és csak egy olyan affinitása, mely az első pontnégyest a másikba s ezért a $\mathcal{C}$ görbét a $\mathcal{C}'$ görbébe viszi át.

Végül, ha $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ két ellipszis, középpontjukat jelöljük O-val és O'-vel ; legyen A, B a $\mathcal{C}$ görbének, és A', B' a $\mathcal{C}'$ görbének két-két olyan pontja, hogy OA és OB, s ugyancsak $O'A'$ és $O'B'$ konjugált átmérők. Van a síknak egy és csak egy olyan affin leképezése, mely az O, A, B pontnak az O', A', B' pontot felelteti meg (**32**.1) ; ennél a leképezésnél az AB egyenes C pólusának az $A'B'$ egyenes C' pólusa felel meg, mivel az $OACB$ parallelogramma képe az $O'A'C'B'$ parallelogramma. A $\mathcal{C}$ görbe ennél az affinitásnál a $\mathcal{C}'$ görbébe megy át.

A fenti levezetésből még a következőket állapítjuk meg.

67.3. *Ha a $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ megegyező típusú centrális másodrendű görbéknek a és b, illetve a' és b' két-két tetszőleges konjugált átmérője, melyek közül a és a' metszők, s ha ezek közül mindegyiken megadunk egy-egy tetszőleges irányítást, akkor van $\mathcal{C}$-nek $\mathcal{C}'$-re egy és csak egy olyan affin leképezése, mely az a és b irányított egyeneseket az a' és b' irányított egyenesekbe viszi át.*

Ebből következik, hogy *egy centrális másodrendű görbe önmagára való affin leképezését egyértelműen meghatározza egy A pontjának A' képe, s az a feltétel, hogy a leképezés megtartja vagy megfordítja az irányítást.* A centrális másodrendű görbék önmagukra való nem perspektív, affin leképezéseinek megfelelő kollineációs tengely az u végtelen távoli egyenes, s a kollineáció középpontja a görbe középpontja.

67.4. Ezzel szemben : *a parabola két-két tetszőleges, egymástól* *különböző A, B és A', B' pontja meghatározza a parabola egy és csak egy olyan önmagára való affin leképezését, melynél A és B az A' és B' pontba megy át.* A megfelelő kollineációs középpont végtelen távoli pont, s a kollineációs tengely átmegy a parabola végtelen távoli pontján.

67.5. *A végtelen távoli egyenesnek egy tetszőleges $\mathcal{C}$ másodrendű görbe által a* **65**.18 *tétel értelmében származtatott leképezése hiperbolikus, parabolikus vagy elliptikus, a szerint, hogy $\mathcal{C}$ hiperbola, parabola vagy ellipszis.*

Ha a $\mathcal{C}$ görbe centrális, akkor a végtelen távoli egyenesnek $\mathcal{C}$-re vonatkozóan konjugált pontjai *hiperbolikus vagy elliptikus involuciót* alkotnak, a szerint, hogy $\mathcal{C}$ *hiperbola vagy ellipszis.*

A másodrendű görbéknek az *euklidesi geometria* szempontjából való osztályozása végett felveszünk az u végtelen távoli egyenesen egy elliptikus involuciót, melyet *abszolut (vagy merőleges) involuciónak* nevezünk. *A sík hasonlósági csoportja* azokból az affinitásokból áll, melyek felcserélhetők a végtelen távoli egyenesen az abszolut involucióval; ennek a csoportnak megfelelően tovább osztályozzuk a másodrendű görbéket.

Kör.

Értelmezés. *Körön* olyan másodrendű görbét értünk, melyre vonatkozóan konjugált pontok az u egyenesen az abszolut involuciót alkotják, vagy másként: melynek *bármely két konjugált átmérője merőleges egymásra.* Az affin osztályozás szempontjából a kör az ellipszisek osztályához tartozik, mivel a végtelen távoli egyenesen elliptikus involuciót létesít, vagyis a végtelen távoli egyenes nem metszője a körnek.

A kört középpontja s egy tetszőleges pontja egyértelműen meghatározza. Az O középpontú körök ugyanis egy *III* típusú kúpszeletsort alkotnak, amelyet az O pont, az u végtelen távoli egyenes, s ennek abszolut involuciója határoz meg (l. 63. §). A sík minden P pontján, mely különbözik O-tól és u pontjaitól, a seregnek egy és csak egy görbéje megy át.

67.6. *Egy kör a sík minden hasonlósági leképezésénél körbe megy át.* Ha ugyanis $\mathbf{T}$ egy tetszőleges hasonlósági leképezés, és Ω jelenti a síknak a $\mathcal{K}$ körre vonatkozó polaritását, akkor $\mathbf{T}$ is, Ω is, tehát $\mathbf{T}^{-1}\Omega\mathbf{T}=\Omega'$ is felcserélhető az u végtelen távoli egyenesen az abszolut involucióval; az Ω' polaritásnál önmagukhoz konjugált pontok összessége, vagyis a $\mathcal{K}$ körnek **T**-nél származó képe szintén kör. Megfordítva, minden kör átvihető bármely más körbe hasonlósági leképezéssel; ha O és O' a $\mathcal{K}$ és a $\mathcal{K}'$ kör középpontja, s P és P' egy-egy tetszőleges pontjuk, akkor van a síknak egy és csak egy olyan hasonlósági leképezése, mely O-t O'-be, P-t P'-be, s ezért a $\mathcal{K}$ kört $\mathcal{K}'$-be viszi át.

Ha P és P' a $\mathcal{K}$ kör két tetszőleges pontja, akkor van a síknak egy és csak egy olyan, az irányítást megtartó hasonlósági leképezése, mely a $\mathcal{K}$ kör középpontját önmagába, s a P pontot P'-be viszi át; ennél a leképezésnél a $\mathcal{K}$ kör önmagába megy át. A síknak ezt a leképezését *az O középpont körül való forgás*nak nevezzük; előállíthatjuk két olyan tükrözés szorzataként, melyeknek tengelyei az O középponton átmenő egyenesek (l. **32**.3, 33. § és **65**.7).

A *$\mathcal{K}$ kör sugarán* értünk minden olyan OP szakaszt, melynek végpontjai a kör O középpontja s egy tetszőleges P pontja.

Az affin csoportban a hasonlósági leképezéseket a következő tulajdonság jellemzi:

67.7. *Ha a sík affin leképezésénél egy kör körbe megy át, akkor a leképezés a síknak egy hasonlósága.*

Az ellipszis konjugált átmérőire vonatkozó tételekből adódik a következő:

67.8 *A kör minden átmérője felezi a rá merőleges húrokat. A kör átmérője merőleges a körrel való metszéspontjaiban húzott érintőkre.*

Ellipszis, hiperbola és parabola.

Legyen $\mathcal{C}$ egy *centrális* másodrendű görbe, de nem kör. Az u végtelen távoli egyenesen a $\mathcal{C}$-re vonatkozóan konjugált pontok az abszolut involuciótól különböző involuciót alkotnak; ennek az abszolut involucióval való szorzata hiperbolikus leképezés (**16**.5), fixpontjait jelöljük U-val és V-vel, s a $\mathcal{C}$ görbe középpontját O-val. Az OU és OV egyenesek, meghatározásuk szerint, a $\mathcal{C}$ görbe egymásra merőleges, konjugált átmérői: a *$\mathcal{C}$ görbe tengelyei.*

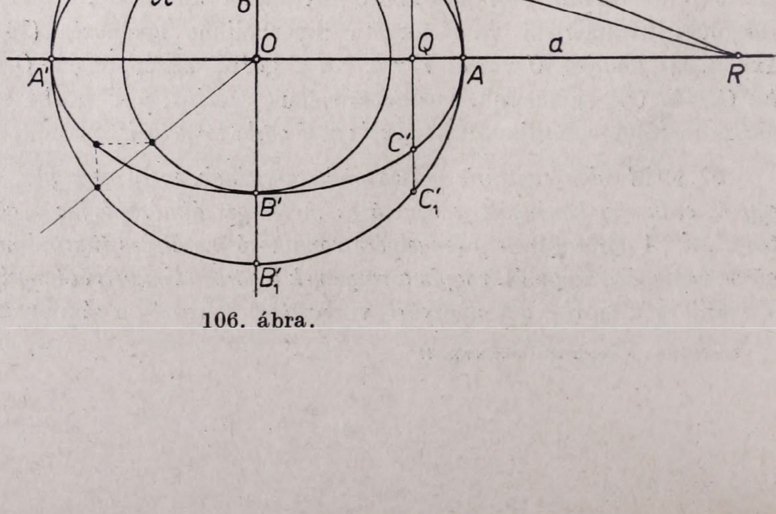
67.9. *Minden centrális másodrendű görbének, mely nem kör, van egy és csak egy konjugált, s egymásra merőleges átmérőpárja: a görbe tengelyei. A görbe bármely tengelyére vonatkozó merőleges tükrözésnél a görbe önmagába megy át, vagyis a tengelyek a görbe szimmetria-tengelyei.*
Ugyanis a $\mathcal{C}$ görbe a tengelyére vonatkozó tükrözés a síknak affin

harmonikus perspektivitása, melynek tengelye a, s középpontja a másik tengelynek, b-nek végtelen távoli pontja, azaz a pólusa. Ez a harmonikus perspektivitás önmagába viszi át a görbét (l. **65**.6).

Legyen $\mathcal{C}$ *ellipszis*, de nem kör; tengelyeinek a görbével való metszéspontjait a *tengelyek végpontjainak*, vagy az *ellipszis csúcspontjai*nak nevezzük; jelöljük ezeket A, A', B, B'-vel. Az O középpontú, OA sugarú $\mathcal{K}$ kör átmegy az a tengely másik végpontján, A'-n is. $\mathcal{K}$-nak és $\mathcal{C}$-nek az A és az A' pontban húzott érintői megegyezők, ezek az a-ra merőleges, az illető pontokon átmenő egyenesek. Jelöljük $\mathcal{K}'$-vel az O középpontú, OB sugarú kört; ez átmegy a b tengely B' végpontján is. $\mathcal{K}'$ és $\mathcal{C}$ érintői a B és a B' pontban szintén megegyezők, s merőlegesek b-re. A $\mathcal{K}$ és a $\mathcal{K}'$ körnek nincs közös pontja, közülök egyik a másiknak a belsejében fekszik; tegyük fel például, hogy $\mathcal{K}'$ fekszik $\mathcal{K}$ belsejében. Ebben az esetben AA'-t az *ellipszis nagytengelyé*nek, és BB'-t az *ellipszis kistengelyé*nek nevezzük.

67.10. *A $\mathcal{C}$ ellipszist a $\mathcal{K}$, illetve a $\mathcal{K}'$ körbe átviszi egy-egy olyan affin perspektivitás, melynek tengelye a, illetve b, s középpontja a másik tengely végtelen távoli pontja.*

Annál a **T** affin perspektivitásnál ugyanis, melynek középpontja b végtelen távoli pontja, s tengelye a, s mely a B pontot a $\mathcal{K}$ körnek a b tengellyel való egyik metszéspontjába, B_1-be viszi át, az ellipszis



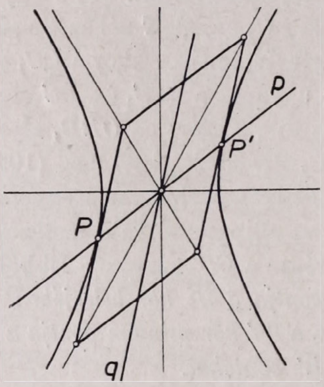
106. ábra.

képe egy olyan másodrendű görbe, melynek A, A', B_1 pontjai, s az A és az A' pontban húzott érintői közösek a $\mathcal{K}$ körrel; tehát az ellipszis képe a $\mathcal{K}$ kör (**60**.12). Ennél a leképezésnél az ellipszis kistengelyének BB' szakasza a b tengelynek abba a B_1B_1' szakaszába megy át, melyet b-nek $\mathcal{K}$-val való B_1, B_1' metszéspontjai határoznak meg; a BB' szakasz a B_1B_1' szakasznak belsejében fekszik. Ha C egy tetszőleges pont, mely nem tartozik b-hez, s C_1 ennek **T**-nél származó képe, továbbá Q a CC_1 és a egyenesek metszéspontja, akkor a QC_1 szakasznak belsejében fekszik a C pont; ugyanis a B_1C_1 és BC egyenesek R metszéspontja az a tengelyen fekszik, s ezért az OBB_1 elrendezésnek az R-ből való vetítésnél a QCC_1 elrendezés felel meg (106. ábra). Ha tehát egy tetszőleges, a b tengellyel párhuzamos egyenesnek a $\mathcal{K}$ körrel közös pontjai C_1 és C_1', s az ellipszissel való metszéspontjai C és C', akkor a C_1C_1' szakasznak része a CC' szakasz. Ebből következik, hogy *a $\mathcal{E}$ ellipszis minden pontja a $\mathcal{K}$ kör belsejében fekszik, kivéve az A, A' pontokat.* Hasonlóan *a $\mathcal{K}'$ kör minden pontja a $\mathcal{E}$ ellipszis belsejében fekszik, kivéve a B, B' pontokat.*

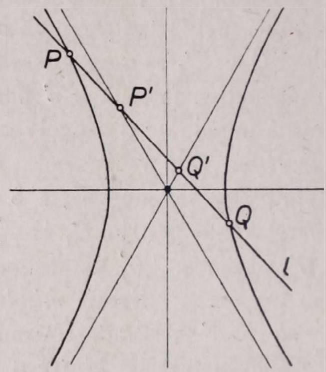
A $\mathcal{K}$ kör és a $\mathcal{E}$ ellipszis közti affin perspektivitásnál a $\mathcal{K}$ kör bármely két merőleges átmérőjének a $\mathcal{E}$ ellipszis két konjugált átmérője felel meg; hasonlóan a $\mathcal{K}'$ kör és a $\mathcal{E}$ ellipszis közti affin perspektivitásnál is. Mindkét perspektivitásnál az ellipszisnek az a két konjugált átmérője, mely az a tengelyre szimmetrikus (vagyis az a tengelyen való tükrözésnél egymásnak felel meg), két olyan, merőleges körátmérőbe megy át, melyek szintén szimmetrikusak az a tengelyre. Ebből következik, hogy mind a $\mathcal{K}$, mind a $\mathcal{K}'$ körrel való affin perspektivitásnál egy tetszőleges körátmérő képe az ellipszisnek ugyanaz az átmérője (**5**.5). Ennek az eredménynek felel meg az ellipszis pontjainak következő, ismert szerkesztése (106. ábra): egy tetszőleges, az O középponton átmenő egyenesnek $\mathcal{K}$-val való metszéspontjain át b-vel, s $\mathcal{K}'$-vel való metszéspontjain át a-val párhuzamosakat húzunk, ezeknek metszéspontjai az ellipszishez tartoznak.

A *hiperbolá*ról a következőket jegyezzük meg. Ha p és q a hiperbola két konjugált átmérője, közülök egyik, például p metszi a hiperbolát két P és P' pontban; az ezekben húzott érintők párhuzamosak a q átmérővel, s az aszimptotákat négy olyan pontban metszik, melyek egy parallelogrammának a csúcsai; a parallelogramma oldalai párhuzamosak p-vel és q-val (**60**.2) (107. ábra).

Legyen l egy olyan, a hiperbolát metsző egyenes, mely nem megy át a hiperbola középpontján, s nem párhuzamos egyik aszimptotával sem; l-nek a hiperbolával való metszéspontjai legyenek P és Q, s az aszimptotákkal való metszéspontjai P' és Q'; *a PP' szakasz egyenlő a QQ' szakasszal* (108. ábra). Alkalmazzuk ugyanis a Desargues-féle tétel **62**.3 speciális esetét az a, b aszimptotákra,



107. ábra.

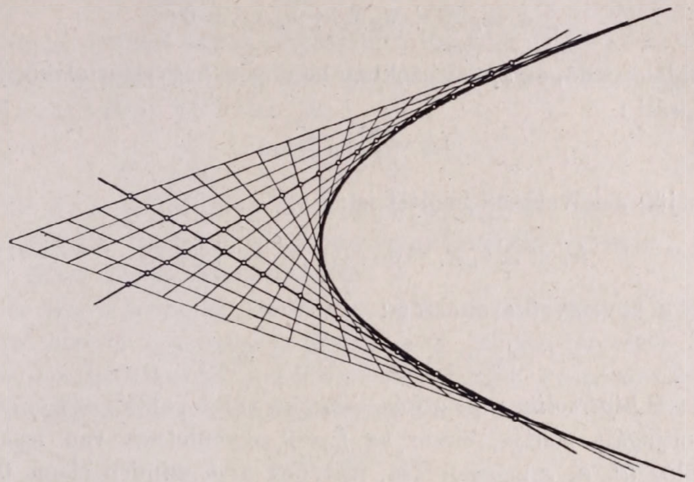


108. ábra.

s az ezeken fekvő A, B végtelen távoli érintési pontokra; adódik, hogy az l egyenesnek egy involuciójánál, melynek fixpontja l végtelen távoli pontja, a P és Q pont egymásba, s a P' és Q' pont is egymásba megy át; ez másszóval azt jelenti, hogy $PP' = QQ'$. A hiperbolának ez a tulajdonsága alkalmazható a hiperbola pontjainak és érintőinek megszerkesztésére, ha ismerjük aszimptotáit és egy pontját.

A hiperbola tengelyei s a végtelen távoli egyenes a hiperbolára vonatkozó poláris háromszög oldalai. Mivel a végtelen távoli egyenes metsző, a két tengely közül az egyik metsző, a másik nem metsző. A hiperbolát metsző tengelyt a *hiperbola főtengelyé*nek, a nem metszőt a *hiperbola melléktengelyé*nek nevezzük. A hiperbolának főtengelyével közös pontjait a *hiperbola csúcspontjai*nak nevezzük.

A *parabola* végtelen távoli pontja legyen U; ennek konjugáltja az u végtelen távoli egyenes abszolut involuciójánál legyen U'. Az U' pont polárisát a *parabola tengelyé*nek, s a tengelynek a parabolával való metszéspontját a *parabola csúcsá*nak nevezzük. A parabolának az euklidesi geometria szempontjából jellemző tulajdonsága, hogy két fix érintőjét egy változó érintője olyan projektív pontsorokban metszi (**60**.8), melyeknek végtelen távoli pontjai egymásnak felelnek meg ; a két pontsor vonatkozása tehát hasonlóság. Megfordítva, ha két különböző egyenes között megadunk egy hasonlósági leképezést, melynél a két egyenes közös pontja nem önmagának felel meg, akkor a megfelelő pontokat összekötő egyenesek egy parabolának az érintői. (109. ábra).



109. ábra.

Megemlítjük még, hogy mindhárom típusú másodrendű görbe esetében a *gyujtópontok*at a következő tulajdonság jellemzi: abban a sugársorban, melynek középpontja egy gyujtópont, bármely két, a görbére vonatkozóan konjugált egyenes merőleges egymásra.

68. §. A másodrendű görbék kifejezése homogén koordinátákkal.

Legyenek (x_1, x_2, x_3) és (u_1, u_2, u_3) a síkban pontok és egyenesek koordinátái ugyanarra az alapháromszögre vonatkozóan, s legyen az egységpont az egységvonalnak az alapháromszögre vonatkozó pólusa (l. 8.2 és 40. §).

A sík bármely Ω polaritását kifejezhetjük az

$$u'_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

egyenletekkel, melyeknek a_{ik} valós együtthatóiból alkotott mátrix szimmetrikus, azaz: $a_{ik} = a_{ki}$, s determinánsa 0-tól különbözik (43.§). Az Ω polaritásnál valamely x pont akkor és csak akkor konjugált önmagához, ha ennek (x_1, x_2, x_3) koordinátái s polárisának (u_1', u_2', u_3') koordinátái kielégítik az egyesített helyzet feltételét, azaz:

$$u_1' x_1 + u_2' x_2 + u_3' x_3 = 0\,; \tag{2}$$

ez az (1) kifejezések figyelembevételével a következő alakban is írható:

$$\sum_i x_i\,(a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3) = 0\,; \tag{3}$$

A baloldalon álló, az x_i változókban homogén négyzetes alakot jelöljük f_{xx}-szel:

$$f_{xx} = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k\,; \tag{4}$$

bevezetjük a következő jelölést is:

$$f_{x_k} = \sum_i a_{ik} x_i = a_{1k} x_1 + a_{2k} x_2 + a_{3k} x_3 \quad (k = 1, 2, 3)\,; \tag{5}$$

fennáll a következő azonosság:

$$f_{xx} = x_1 f_{x_1} + x_2 f_{x_2} + x_3 f_{x_3}. \tag{6}$$

Ha Ω *hiperbolikus polaritás*, azaz, ha van legalább egy önmagához konjugált pontja, akkor az $f_{xx}=0$ egyenletnek van legalább egy valós (x_1, x_2, x_3) megoldása, melynek nem minden eleme 0. Az Ω-nál önmagukhoz konjugált pontok összessége egy $\mathcal{C}$ *másodrendű görbe*, ennek *egyenlete*

$$f_{xx} = 0. \tag{7}$$

Megfordítva, minden másodfokú egyenlet együtthatóit jelölhetjük a fenti módon, s ha az együtthatókból alkotott $|\,a_{ik}\,|$ determináns nem 0, s ha van az egyenletnek a (0, 0, 0) számhármastól különböző (x_1, x_2, x_3) valós megoldása, akkor az $f_{xx}=0$ egyenletnek eleget tevő (x_1, x_2, x_3) számhármasok olyan x pontoknak a koordinátái, melyek az (1) képletekkel kifejezett hiperbolikus polaritásnál önmagukhoz konjugáltak, azaz egy másodrendű görbének a pontjai.

Az x és y pontok a $\mathcal{C}$ másodrendű görbére vonatkozóan *konjugáltak*, ha az y pont x polárisához tartozik, azaz koordinátái, (y_1, y_2, y_3) kielégítik az

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3 = 0$$

egyenletet, melyben (u_1', u_2', u_3') jelenti x polárisának vonalkoordinátáit; ez az egyenlet az (1) és (5) képletek szerint a következő alakban írható:

$$y_1 f_{x_1} + y_2 f_{x_2} + y_3 f_{x_3} = 0. \tag{8}$$

A baloldalon álló, az x_i és y_i változókban homogén lineáris kifejezést az f_{xx} négyzetes alakhoz tartozó *bilineáris* vagy *poláris alaknak* nevezzük, s f_{xy}-nal jelöljük. Tekintettel az $\| a_{ik} \|$ mátrix szimmetrikus voltára:

$$f_{xy} = \sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k = \sum_{i,k} a_{ik} y_i x_k = \sum_k x_k f_{y_k} = f_{yx}; \tag{9}$$

az $f_{xy} = f_{yx}$ egyenlet annak analitikus kifejezése, hogy ha az y pont x polárisán, akkor x az y pont polárisán fekszik, mivel $f_{xy}=0$ és $f_{yx}=0$ aequivalens feltételek. Az

$$f_{xy} = 0 \tag{10}$$

egyenlet fix x és változó y értékeknél egy egyenes egyenlete, ez az *x pont polárisa.* Ha x a $\mathcal{C}$ görbe pontja, akkor a (10) egyenlet a görbe x pontjában húzott *érintő egyenlete.*

Az x és y konjugált pontok harmonikusan választják el egymástól a rajtuk átmenő egyenesnek a görbével való két metszéspontját, z-t és z'-t; ennek analitikus kifejezése a következő. Az x, y pontokon átmenő egyenes pontjainak z_i koordinátáit kifejezzük a

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{11}$$

egyenletekkel. Az egyenes és a $\mathcal{C}$ görbe z és z' metszéspontjainak koordinátái kielégítik az $f_{zz}=0$, és az $f_{z'z'}=0$ egyenletet, azaz:

$$\begin{aligned} \Sigma a_{ik} z_i z_k &= \Sigma a_{ik} (\lambda x_i + \mu y_i)(\lambda x_k + \mu y_k) = \\ &= \lambda^2 \Sigma a_{ik} x_i x_k + 2\lambda\mu \Sigma a_{ik} x_i y_k + \mu^2 \Sigma a_{ik} y_i y_k = \\ &= \lambda^2 f_{xx} + 2\lambda\mu f_{xy} + \mu^2 f_{yy} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Ha van két olyan λ, μ és λ', μ' valós számpár, mely kielégíti ezt az egyenletet, s mely lényegesen, azaz nem csak egy arányossági tényezőben különbözik egymástól, akkor ezeket a (11) képletekbe helyettesítve, megkapjuk az x és y pontokat összekötő egyenes és a $\mathcal{C}$ görbe metszéspontjainak koordinátáit. A másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói között fennálló összefüggések szerint:

$$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{-2 f_{xy}}{f_{xx}},$$

s mivel feltevésünk szerint x és y konjugált pontok, tehát $f_{xy}=0$, azaz

$$\frac{\lambda'}{\mu'} = -\frac{\lambda}{\mu}.$$

Az x és y pontokat összekötő egyenes x, y, z, z' pontjának a (11) képletek szerint megfelelő (λ, μ) paraméter értékek rendre: $(1, 0)$. $(0, 1)$, (λ, μ), $(-\lambda, \mu)$; a négy pont kettősviszonya tehát:

$$\frac{\lambda}{\mu} : \frac{-\lambda}{\mu} = -1,$$

vagyis a négy pont harmonikus pontnégyest alkot.

Ha x és y a sík két olyan pontja, melyekre nézve a (12) egyenletnek lényegében csak egy megoldása van, vagyis ha az összes, annak eleget tevő λ, μ számpárok csak arányossági tényezőben különböznek egymástól, akkor az egyenlet diszkriminánsa 0, azaz:

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 ; \tag{13}$$

ez a feltétele annak, hogy *a sík x és y pontját összekötő egyenes a $\mathcal{C}$ görbe érintője* legyen.

Ha a (13) képlet baloldalán álló kifejezés pozitív, illetve negatív, akkor az x és y pontokat összekötő egyenes a $\mathcal{C}$ görbének *nem metsz ője* illetve *metszője.*

Ha az u egyenes a $\mathcal{C}$ görbének érintője, s az érintési pont x, akkor ezeknek koordinátáira teljesül az egyesített helyzet feltétele:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \tag{14}$$

s az (1) képletek érvényesek, ha a baloldalon u_i' helyett az u egyenes u_i koordinátáit helyettesítjük be; ezekből kifejezzük az x_k értékeket:

$$x_k = A_{1k} u_1 + A_{2k} u_2 + A_{3k} u_3 \quad (k = 1, 2, 3) \tag{15}$$

s behelyettesítjük a (14) egyenletbe; így a következőt kapjuk:

$$\sum_k u_k (A_{1k} u_1 + A_{2k} u_2 + A_{3k} u_3) = 0. \tag{16}$$

A baloldalon álló kifejezést F_{uu}-val jelöljük, s az f_{xx}-hez *adjungált négyzetes alak*nak nevezzük. Az

$$F_{uu} = 0$$

egyenlet annak feltételét fejezi ki, hogy az u egyenes a $\mathcal{C}$ másodrendű görbének érintője, vagyis az Ω polaritás által származtatott *másodosztályú görbé*nek eleme legyen.

Az $F_{uu} = 0$ egyenletet *a $\mathcal{C}$ görbe vonalkoordinátás egyenleté*nek nevezzük.

Az F_{uu} négyzetes alakhoz tartozó bilineáris alak:

$$F_{uv} = \Sigma A_{ik} u_i v_k.$$

Az

$$F_{uv} = 0$$

egyenlet annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az u és v egyenesek a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozóan konjugáltak legyenek, továbbá

$$F_{uu} F_{vv} - F_{uv}^2 = 0$$

annak a feltétele, hogy az u és v egyenesek metszéspontja a $\mathcal{C}$ görbéhez tartozzék. Ha $F_{uu} F_{vv} - F_{uv}^2 > 0$, illetve < 0, akkor az u és v egyenesek metszéspontja a $\mathcal{C}$ görbének belső, illetve külső pontja. — Ezeket az állításokat ugyanolyan módon igazoljuk, mint ezeknek duálisát, vagyis az $f_{xx} \cdot f_{xy}$ alakokra vonatkozó fenti állításokat.

Egy megadott másodrendű görbe analitikus kifejezését azáltal egyszerűsíthetjük, hogy a koordinátarendszer alapháromszögét s egységpontját a görbéhez képest alkalmasan választjuk meg. A 43. §-ban megmutattuk, hogy ha a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozó poláris háromszöget veszünk fel alapháromszögnek, s az egységpontot is alkalmasan választjuk meg, akkor a $\mathcal{C}$-re vonatkozó (hiperbolikus) polaritást az

$$u_1' = x_1, \quad u_2' = x_2, \quad u_3' = -x_3 \tag{17}$$

egyenletek állítják elő. Ebben a koordinátarendszerben a $\mathcal{C}$ görbe egyenlete:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \tag{18}$$

Ha pedig az $x_1=0$ és az $x_3=0$ egyenesek a $\mathcal{C}$ görbe érintői, s $x_2=0$ a két érintési pontot összekötő egyenes, továbbá az egységpont a $\mathcal{C}$ görbén fekszik, akkor a $\mathcal{C}$-re vonatkozó polaritást az

$$u_1' = -\frac{1}{2} x_3, \quad u_2' = x_2, \quad u_3' = -\frac{1}{2} x_1$$

egyenletek, s ennek megfelelően a $\mathcal{C}$ görbét az

$$x_1 x_3 - x_2^2 = 0 \tag{19}$$

egyenlet fejezi ki. Ez az egyenlet aequivalens az

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \lambda, \tag{20}$$

vagyis az

$$x_1 - \lambda x_2 = 0, \qquad x_2 - \lambda x_3 = 0 \tag{21}$$

egyenletpárral, s abból λ kiküszöbölésével származik. A (21) egyenletek közül az első, változó λ értéknél, annak a sugársornak a kifejezése, mely az $x_1=0$, és $x_2=0$ egyenesek metszéspontjához, vagyis az alapháromszög A_3 csúcsához tartozik. Hasonlóan, a második egyenlet az A_1 középpontú sugársor egyenlete. Az egyik és a másik sugársor bármely négy egyenesének kettősviszonya egyenlő a megfelelő λ paraméterértékek kettősviszonyával (**40**.4). Ha tehát a két sugársornak azokat az egyeneseit, melyek egyenlő λ értékhez tartoznak, egymásnak feleltetjük meg, az egyik sugársor minden harmonikus négyesének a másik sugársorban is harmonikus négyes felel meg, s ezért a két sugársor vonatkozása projektív. A két sugársor megfelelő egyeneseinek metszéspontjai alkotják a $\mathcal{C}$ másodrendű görbét (l. a **60**.7 és 9 tételt, melynek analitikus bizonyítását a fenti tárgyalás adja).

A (20) egyenletek folytán:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda^2 : \lambda : 1 ; \tag{22}$$

ez a $\mathcal{C}$ görbe pontjainak (vagyis a megfelelő koordinátáknak) egy λ paraméterrel való kifejezése. Ha a $\mathcal{C}$ görbét az A_3 pontból az A_1A_2 egyenesre vetítjük, a $\mathcal{C}$ görbe bármely pontjához rendelt λ paraméter egyenlő a vetületéhez tartozó x_1, x_2 koordináták x_1/x_2 hányadosával. Az A_1A_2 egyenes A_1 és A_2 pontjának az A_3 pontból való vetítésnél a $\mathcal{C}$ görbe A_1 és A_3 pontja felel meg, s ennél a vetítésnél az A_1A_2 egyenesen értelmezett x_1/x_2 projektív koordináta átmegy a $\mathcal{C}$ görbén bevezetett λ projektív koordinátába, melynek alappontjai $A_3(\lambda=0)$, $A_1(\lambda=\infty)$ és $E(\lambda=1)$. (Lásd **66**.4).

Ha **T** a síknak olyan kollineációja, mely a C görbét önmagába viszi át, akkor a C görbe P pontjához tartozó

$$\lambda = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3}$$

paraméterből a P' képponthoz tartozó

$$\lambda' = \frac{x_1'}{x_2'} = \frac{x_2'}{x_3'}$$

paramétert egy

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \tag{23}$$

lineáris transzformáció állítja elő (**66**.4). E szerint:

$$\lambda' = \frac{x_1'}{x_2'} = \frac{x_2'}{x_3'} = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$$

$$\frac{x_1'}{x_3'} = \left(\frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}\right)^2 = \frac{\alpha^2 x_1 + 2\alpha\beta x_2 + \beta^2 x_3}{\gamma^2 x_1 + 2\gamma\delta x_2 + \delta^2 x_3},$$

$$\frac{x_2'}{x_3'} = \frac{(\alpha\lambda + \beta)(\gamma\lambda + \delta)}{(\gamma\lambda + \delta)^2} = \frac{\alpha\gamma x_1 + (\alpha\delta + \beta\gamma)x_2 + \beta\delta x_3}{\gamma^2 x_1 + 2\gamma\delta x_2 + \delta^2 x_3},$$

s így a **T** kollineáció kifejezése :

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha^2 x_1 + 2\alpha\beta x_2 + \beta^2 x_3 \\ x_2' &= \alpha\gamma x_1 + (\alpha\delta + \beta\gamma) x_2 + \beta\delta x_3 \\ x_3' &= \gamma^2 x_1 + 2\gamma\delta x_2 + \delta^2 x_3. \end{aligned} \tag{24}$$

69. §. A másodrendű görbék kifejezése párhuzamos koordinátákkal.

Legyen $x_3=0$ a sík végtelen távoli egyenese ; az

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

párhuzamos koordinátákkal a $\mathcal{C}$ másodrendű görbét az

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

másodfokú egyenlet állítja elő, amelynek a_{ik} együtthatói valós számok, s a belőlük alkotott determináns 0-tól különbözik.

Az $x_3 = 0$ végtelen távoli egyenes és a $\mathcal{C}$ görbe metszéspontjainak meghatározására helyettesítsük be a 68. § (3) egyenletébe az $x_3=0$ értéket ; az így kapott

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = 0 \tag{2}$$

egyenlet (x_1, x_2) megoldásai adják a $\mathcal{C}$ görbe s a végtelen távoli egyenes metszéspontjainak koordinátáit. A (2) egyenletnek az x_1/x_2 ismeretlenre vonatkozóan két különböző valós, vagy egy valós, vagy két konjugált komplex megoldása van, a szerint, hogy az

$$A_{33} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$$

diszkrimináns értéke negatív, nulla, vagy pozitív. A $\mathcal{C}$ görbe a három esetnek megfelelően sorban *hiperbola, parabola vagy ellipszis.*

Ha a görbe *centrális* (hiperbola vagy ellipszis), középpontja az $x_3 = 0$ végtelen távoli egyenesnek a görbére vonatkozó O pólusa. Ennek (x_1, x_2, x_3) koordinátáit a végtelen távoli egyenes $u_1=u_2=0$,

$u_3=1$ vonalkoordinátáiból a 68. § (15) képlete szerint kiszámítva, azt kapjuk, hogy:

$$x_1 : x_2 : x_3 = A_{13} : A_{23} : A_{33}.$$

Tehát az (1) egyenlettel előállított $\mathfrak{C}$ görbe középpontjának párhuzamos koordinátái:

$$x = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad y = \frac{A_{23}}{A_{33}}.$$

Ha a párhuzamos koordináták középpontját a görbe O középpontjában vesszük fel, akkor a homogén koordináták $A_3\,(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$ alappontja az A_1A_2 oldalnak a pólusa, s mert az utóbbinak vonalkoordinátái $(u_1, u_2, u_3) = (0, 0, 1)$, tehát a 68. § (1) képletek szerint $a_{13}=a_{23}=0$; a görbének a párhuzamos koordinátákkal kifejezett (1) egyenlete ennek megfelelően a következő alakra redukálódik:

$$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,x\,y + a_{22}\,y^2 + a_{33} = 0,$$

melynek a_{ik} együtthatói nem szükségképpen ugyanazok, mint az eredeti (1) egyenleté. (A koordinátarendszer párhuzamos eltolásakor azonban a_{11}, a_{12}, a_{22} nem változik).

Ha a párhuzamos koordináták tengelyeit konjugált egyeneseknek vesszük fel, akkor a homogén koordináták alapháromszöge $\mathfrak{C}$-re vonatkozóan poláris háromszög, s ennek megfelelően az (1) egyenlet helyett a következő egyenlet állítja elő a görbét:

$$a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33} = 0. \tag{3}$$

Mivel ennek az egyenletnek vannak valós megoldásai, t. i. $\mathfrak{C}$ pontjainak x, y koordinátái, tehát az a_{11}, a_{22}, a_{33} együtthatók nem lehetnek megegyező előjelűek. *Hiperbola* esetében a két tengely közül az egyik metszi, a másik nem metszi a görbét, s ezért a_{11} és a_{22} előjele különböző. *Ellipszis* esetében mindkét tengely metszi a görbét s ezért a_{11} és a_{22} előjele megegyező, a_{33} előjele ezzel ellenkező.

A (3) egyenlet baloldalán álló négyzetes alaknak megfelelő bilineáris alak:

$$a_{11}\,x\,x' + a_{22}\,y\,y' + a_{33}\,; \tag{4}$$

ha ez valamely (x, y) és (x', y') értékpárra 0, akkor (x, y) és (x', y') a görbére vonatkozóan konjugált pontok koordinátái, és megfordítva.

Ha a $\mathfrak{C}$ görbe *nem centrális* (parabola), akkor legyen A_1 a görbe végtelen távoli pontja, A_2 egy tetszőleges másik végtelen távoli pont, és A_3 az A_2 pontból $\mathfrak{C}$-hez húzott másik érintő érintési pontja.

Az erre az alapháromszögre vonatkozó homogén koordinátákkal a $\mathcal{C}$ görbét a

$$2\,a_{13}\,x_1\,x_3 + a_{22}\,x_2^2 = 0$$

egyenlet, tehát az x, y párhuzamos koordinátákkal a

$$2\,a_{13}\,x + a_{22}\,y^2 = 0 \tag{5}$$

egyenlet fejezi ki. A megfelelő bilineáris alak:

$$a_{13}\,(x + x') + a_{22}\,y\,y'. \tag{6}$$

Az *euklidesi síkon* vezessünk be *derékszögű, párhuzamos x, y koordinátákat.* Ha $\mathcal{C}$ centrális másodrendű görbe, vegyük fel középpontját a koordinátarendszer kezdőpontjának, s tengelyeit x és y tengelynek; hiperbola esetében tegyük fel, hogy x a hiperbolát metsző tengely. A görbét a (3) egyenlet állítja elő; vezessük be a következő jelölést:

$$\frac{1}{a^2} = -\frac{a_{11}}{a_{33}}, \quad \pm\frac{1}{b^2} = -\frac{a_{22}}{a_{33}},$$

melynek alkalmazásával az *ellipszis* és a *hiperbola egyenlete* a következő:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{és} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,;$$

a hiperbola aszimptotáinak egyenlete:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0.$$

Parabola esetében legyen a koordinátarendszer O kezdőpontja a parabola csúcspontja, x a parabola tengelye, s y a csúcspontban húzott érintő; az x-tengely pozitív felét vegyük fel a parabola belsejében. Az (5) egyenlet együtthatóiból képezett

$$p = -\frac{a_{13}}{a_{22}}$$

érték feltételeink folytán pozitív; a *parabola egyenlete* (5)-ből:

$$y^2 = 2\,p\,x.$$

VI. Másodrendű felületek.

70. §. Másodrendű kúpfelületek.

A másodrendű és a másodosztályú görbéknek a térbeli dualitás értelmében megfelelő alakzatokat másodrendű kúpfelületeknek nevezzük.

Értelmezés. Az O középpontú nyaláb önmagára való Ω korrelatív leképezését (l. 39. §) *polaritás*nak nevezzük, ha négyzete az azonosság. Az Ω poláritásnál az egymásnak megfelelő síkok és egyenesek kétszeresen (Ω-nál és Ω inverzénél) felelnek meg egymásnak; ha tehát a p egyenesnek a π sík, akkor a π síknak a p egyenes felel meg. A π síkot a *p egyenes polársíkjá*nak, s a p egyenest a *π sík polárisá*nak nevezzük a megadott Ω poláritás szerint.

Két egyenest Ω-ra nézve *konjugált*nak nevezünk, ha az egyiknek a polársíkja tartalmazza a másik egyenest, s ekkor a másiknak a polársíkja is tartalmazza az első egyenest. Két síkot konjugáltnak nevezünk, ha az egyiknek a polárisa a másik síkban fekszik, s ekkor a másiknak a polárisa az első síkban fekszik. Konjugált síkok polárisai konjugált egyenesek, és megfordítva.

Az O középpontú nyaláb Ω polaritását *elliptikus*nak vagy *hiperbolikus*nak nevezzük, a szerint, hogy nincs vagy van önmagához konjugált egyenese (azaz olyan p egyenes, mely polársíkjában fekszik).

Értelmezés. Az O középpontú nyaláb Ω hiperbolikus polaritásánál önmagukhoz konjugált egyenesek és síkok *másodrendű kúpfelület*et alkotnak. Az önmagukhoz konjugált egyenesek a *kúpfelület alkotói;* ezeknek polársíkjai, az önmagukhoz konjugált síkok, a *kúpfelület érintősíkjai.* Egy érintősík a kúpfelületet polárisa mentén *érinti.* — Az O pontot a *kúpfelület csúcsá*nak nevezzük.

Az értelmezésből közvetlenül következik:

70.1. Bármely, a kúpfelület csúcsán átmenő sík a kúpfelületet vagy két alkotójában metszi, vagy egy alkotóján érinti, vagy pedig nincs a kúpfelülettel a csúcson kívül más közös pontja.

70.2. Tétel. *Ha az α sík nem megy át az $\mathfrak{F}$ másodrendű kúpfelület csúcsán, akkor α és $\mathfrak{F}$ metszésvonala (azaz közös pontjainak összessége) másodrendű görbe. — Megfordítva, egy másodrendű görbének egy a síkjához nem tartozó pontból való vetülete másodrendű kúpfelület.*

Bizonyítás. A tételben foglalt első állítás bebizonyítására értelmezünk az α síkban egy polaritást az O középpontú sugársorban megadott Ω polaritás alapján, következő módon. Az α sík minden P pontjának megfeleltetjük az OP egyenes polársíkjának az α síkkal való p' metszésvonalát, s minden az α síkban fekvő p' egyenesnek az Op' sík polárisának α-val való P metszéspontját. Az O középpontú nyaláb minden önmagához konjugált elemének az α síkkal való metszete is önmagához konjugált elem; tehát a síkban értelmezett polaritás is hiperbolikus. Ennek önmagához konjugált pontjai és egyenesei egy $\mathcal{C}$ másodrendű görbe pontjai és érintői, s ez a megadott kúpfelületnek az α síkkal való metszete. — A tételben foglalt második állítás hasonló meggondolással adódik.

70.3. Tétel. *Ha az α és az α' sík az $\mathfrak{F}$ másodrendű kúpfelületet a $\mathcal{C}$ és a $\mathcal{C}'$ másodrendű görbében metszi, s ha az α, α' síkok a metszésvonala érintője a $\mathcal{C}$ görbének, akkor érintője a $\mathcal{C}'$ görbének is.*

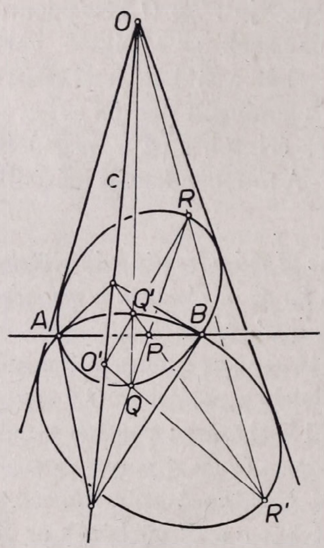
Bizonyítás. A kúpfelület O csúcsán és az a egyenesen átmenő π síknak az O középpontú nyalábban megfelelő p poláris az OA egyenes, mely az O csúcsot az A érintési ponttal köti össze; π-nek és p-nek az α' síkkal való metszete, vagyis az a egyenes és az A pont egymásnak felel meg a $\mathcal{C}'$ másodrendű görbére vonatkozó polaritásnál, s mert az A pont az a egyenesen fekszik, tehát a a $\mathcal{C}'$ görbének az A ponthoz tartozó érintője. Az a egyenest a *kúpfelület érintőjének* nevezzük.

A tétel megfordítása megegyezik a **64**.7 tétellel.

70.4. Tétel. *Ha az $\mathfrak{F}$ másodrendű kúpfelületet az α és az α' sík a $\mathcal{C}$ és a $\mathcal{C}'$ másodrendű görbében, s a két sík l metszésvonala az A és a B pontban metszi, akkor az l egyenesnek ugyanaz az AB szakasza tartozik a két görbe belsejéhez. — Megfordítva, ha $\mathcal{C}$ az α síkban, és $\mathcal{C}'$ az α-tól különböző α' síkban fekvő másodrendű görbe, melyeknek két A és B közös pontjuk van, s az AB egyenesnek ugyanaz az AB szakasza tartozik a két görbe belsejéhez, akkor van két olyan másodrendű kúpfelület, melyen rajta fekszik mindkét görbe.*

Bizonyítás. Az első állítás igazolására felveszünk egy P pontot a $\mathcal{C}$ görbe külsejéhez tartozó AB szakaszon, s ebből érintőt húzunk $\mathcal{C}$-hez ; az ezen az érintőn és az érintési ponthoz tartozó q alkotón átmenő sík az $\mathcal{F}$ kúpfelületnek érintősíkja. A q alkotó és $\mathcal{C}'$ közös pontját a P ponttal összekötő egyenes érintője a $\mathcal{C}'$ görbének, s ezért a P pont a $\mathcal{C}'$ görbének is a külsejében fekszik.

A második állítás igazolása a következő. A $\mathcal{C}$ és a $\mathcal{C}'$ görbének az A ponthoz tartozó érintőin átmenő síkot jelöljük β-val, a B ponthoz tartozó érintőkön átmenő síkot β'-vel. A β és β' síkok c metszésvonalán s az AB szakasznak a két görbe belsejéhez tartozó valamely P pontján átfektetünk egy γ síkot. Ennek a síknak az α síkkal való metszésvonala átmegy a $\mathcal{C}$ görbe belsejéhez tartozó P ponton, s ezért a $\mathcal{C}$ görbét két Q és R pontban metszi (**59**.10) (110. ábra) ; hasonlóan a γ és α' síkok metszésvonalának a $\mathcal{C}'$ görbével két Q' és R' közös pontja van. A QQ' egyenesnek c-vel közös pontja legyen O. Az O pontból való vetítésnél a $\mathcal{C}$ görbének az α' síkban egy olyan másodrendű görbe felel meg, melynek A és B pontja, s az ezekben húzott érintője, továbbá Q' pontja közös a $\mathcal{C}'$ görbével, tehát a **60**.12 tétel szerint a vetület azonos $\mathcal{C}'$-vel. Ebből következik, hogy az O pontból való vetítésnél az R pontnak az R' pont felel meg. A $\mathcal{C}$ és a $\mathcal{C}'$ görbe tehát egy O csúcspontú, másodrendű kúpfelületen fekszik.



110. ábra.

Jelöljük O'-vel a QR' és c egyenesek metszéspontját ; hasonlóan adódik, hogy $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ egy O' csúcspontú, másodrendű kúpfelületen fekszik. Könnyen belátható, hogy az O, O' pontok harmonikusan választják el az OO' egyenesnek az α és az α' síkkal való metszéspontjait.

A másodrendű görbékre vonatkozó tételeket a térbeli duálitás elve szerint átvihetjük a másodrendű kúpfelületekre. Például a **60**.9 tételnek a következő tétel felel meg :

70.5. Tétel. *Ha a és b az O ponton átmenő két egyenes, akkor az a és a b tengelyű síksorok projektív, de nem perspektív vonatkozásánál egymásnak megfelelő síkok metszésvonalai egy másodrendű kúpfelület-*

nek az alkotói. Ha α és β az O ponton átmenő két sík, akkor az (O, α) és az (O, β) sugársorok projektív, de nem perspektív vonatkozásánál egymásnak megfelelő egyeneseken átmenő síkok egy másodrendű kúpfelület érintősíkjai.

Értelmezés. A tér P pontját, mely nem tartozik az $\mathfrak{F}$ másodrendű kúpfelülethez, $\mathfrak{F}$-re nézve *külső* vagy *belső pont*nak nevezzük, a szerint, hogy átmegy a P ponton az $\mathfrak{F}$ felületnek legalább egy érintője, vagy nem.

70.6. Az **59**.17 tételből könnyen levezethető, hogy *az $\mathfrak{F}$ másodrendű kúpfelület a teret két részre osztja fel;* ezeket *$\mathfrak{F}$ belsejé*nek *és külsejé*nek nevezzük. $\mathfrak{F}$ belseje és külseje a fenti értelmezésnek megfelelően az $\mathfrak{F}$-re vonatkozó belső, illetve külső pontokból áll. Bármely két belső s bármely két külső pontot összeköt egy-egy olyan egyenes szakasz, melynek minden pontja belső, illetve külső pont. Minden olyan szakasznak, melynek egyik végpontja belső, másik végpontja külső pont, van $\mathfrak{F}$-fel közös pontja. *Ha $\mathcal{C}$ tetszőleges, az $\mathfrak{F}$ kúpfelületen fekvő másodrendű görbe, akkor ennek belseje $\mathfrak{F}$ belsejéhez, s külseje $\mathfrak{F}$ külsejéhez tartozik* (l. a **70**.4 tétel első részét).

70.7. Tétel. *Az összes másodrendű kúpfelületek aequivalensek egymással a projektív csoport szerint, azaz bármely két $\mathfrak{F}$ és $\mathfrak{F}'$ másodrendű kúpfelületet le lehet képezni egymásra a tér kollineáris leképezésével.*

Bizonyítás. Legyen α és α' két olyan sík, mely nem megy át $\mathfrak{F}$, illetve $\mathfrak{F}'$ csúcsán; jelöljük $\mathcal{C}$-vel $\mathfrak{F}$-nek és α-nak, s $\mathcal{C}'$-vel $\mathfrak{F}'$-nek és α'-nek a metszésvonalát. A **64**.3 tétel szerint van az α síknak az α' síkra olyan **T** kollineáris leképezése, mely $\mathcal{C}$-t $\mathcal{C}'$-be viszi át; a **45**.11 tétel szerint pedig van a térnek olyan kollineációja, mely az α síkban **T**-vel megegyezik, s $\mathfrak{F}$ csúcsát $\mathfrak{F}'$ csúcsába viszi át; ennél a leképezésnél az $\mathfrak{F}$ kúpfelület képe $\mathfrak{F}'$.

A fenti bizonyításból, tekintettel a **64**.3 és **45**.11 tételre, adódik a következő eredmény is:

70.8. Tétel. *Ha A, B, C, D az $\mathfrak{F}$ másodrendű kúpfelületnek csúcsától különböző négy olyan pontja, hogy AB, AC, BC metszői, s AD alkotója $\mathfrak{F}$-nek, s ha A', B', C', D' az $\mathfrak{F}'$ másodrendű kúpfelületnek csúcsától különböző négy tetszőleges olyan pontja, hogy $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ metszői, s $A'D'$ alkotója $\mathfrak{F}'$-nek, akkor van a térnek egy és csak egy olyan kollineációja, mely $\mathfrak{F}$-et $\mathfrak{F}'$-be s az A, B, C, D pontokat az A', B', C', D' pontokba viszi át.*

71. §. Kúp- és hengerfelületek az affin és az euklidesi térben.

Értelmezés. Az affin térben egy olyan kúpfelületet, melynek csúcspontja a tér valamely végtelen távoli pontja, *hengerfelületnek* nevezünk. A hengerfelület alkotói egymással párhuzamos egyenesek.

Az affin térben *kúpfelületen* mindig olyan kúpfelületet értünk, melynek csúcspontja egy végesben fekvő pont.

71.1. *Egy kúpfelület síkmetszetei között előfordul a másodrendű görbéknek az affin osztályozás szerint különböző, mindhárom típusa* (ellipszis, hiperbola, parabola).

Bizonyítás. Mivel az $\mathcal{F}$ kúpfelület O csúcsa nem tartozik a végtelen távoli síkhoz, $\mathcal{F}$-nek a végtelen távoli síkkal való metszésvonala egy $\mathcal{C}$ másodrendű görbe. Ha u olyan végtelen távoli egyenes, mely nem metszi a $\mathcal{C}$ görbét, akkor bármely, az u egyenesen átmenő, de O-t nem tartalmazó α síknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonala olyan másodrendű görbe, melynek nincs végtelen távoli pontja, azaz *ellipszis.* Ha u metszője a $\mathcal{C}$ görbének, akkor bármely, u-n átmenő, s O-t nem tartalmazó α síknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonalán két végtelen távoli pont van, ez tehát *hiperbola.* Végül, ha u érintője a $\mathcal{C}$ görbének, akkor bármely u-n átmenő, s O-t nem tartalmazó síknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonalát is érinti az u végtelen távoli egyenes (**70**.3), tehát a metszésvonal *parabola.* Egy, az O ponton átmenő sík az $\mathcal{F}$ kúpfelületet két alkotójában metszi, vagy egy alkotóján érinti, vagy nincs $\mathcal{F}$-fel O-n kívül más közös pontja, a szerint, hogy a sík végtelen távoli u egyenese $\mathcal{F}$ végtelen távoli $\mathcal{C}$ görbéjének metszője, érintője vagy nem metszője (l. **70**.1).

A fenti meggondolásból adódott a következő tétel is:

71.2. *Bármely két párhuzamos sík, melyek közül egyik sem megy át az $\mathcal{F}$ kúpfelület csúcsán, a kúpfelületet két, ugyanolyan típusú másodrendű görbében metszi.*

71.3. Tétel. *Bármely két kúpfelület aequivalens egymással az affin csoport szerint, azaz átvihető az egyik a másikba a tér affin leképezésével.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ két tetszőleges kúpfelület; csúcspontjukat jelöljük O-val és O'-vel. Felveszünk két olyan α és α' síkot, mely nem tartalmazza az O, illetve az O' pontot, s melyek közül α-nak $\mathcal{F}$-fel való $\mathcal{C}$ metszésvonala és α'-nek $\mathcal{F}'$-vel való $\mathcal{C}'$ metszésvonala ugyanolyan típusú. A **67**.2 tétel szerint van az α síknak az α' síkra olyan **T** affin leképezése, melynél a $\mathcal{C}$ görbe $\mathcal{C}'$-be megy át. Legyen A az α sík tetszőleges pontja, $A'=\mathbf{T}(A)$ ennek képe, továbbá U az OA egyenesnek és U' az $O'A'$ egyenesnek végtelen távoli pontja. A **45**.11 tétel szerint van a térnek egy és csak egy olyan kollineációja, mely az α síkban **T**-vel megegyezik, s az O és U pontot O'-be és U'-be viszi át ; ez a térnek egy affinitása, mivel α végtelen távoli egyenesét s az U végtelen távoli pontot α' végtelen távoli egyenesébe és az U' pontba viszi át. A térnek ennél az affinitásánál az $\mathcal{F}$ kúpfelület $\mathcal{F}'$-be megy át.

A hengerfelületnek három különböző típusa van, a következő meggondolás szerint. Ha az $\mathcal{F}$ hengerfelület csúcsa az U végtelen távoli pont, akkor két tetszőleges olyan α és α' sík, melyek közül egyikhez sem tartozik U, ugyanolyan típusú másodrendű görbében metszi $\mathcal{F}$-et. Az U pontból való vetítés ugyanis az α és α' síkok között affin leképezést származtat, mivel az egyik sík végtelen távoli egyenesét a másik sík végtelen távoli egyenesébe viszi át, s ennél a leképezésnél $\mathcal{F}$-nek α-val való metszésvonala α'-vel való metszésvonalába megy át. Bármely, az U ponton átmenő, vagyis a hengerfelület alkotóival párhuzamos sík vagy két alkotóban metszi, vagy egy alkotóján érinti a hengerfelületet, vagy nincs a síknak (U-n kívül) a hengerfelülettel közös pontja.

Értelmezés. Az $\mathcal{F}$ hengerfelületet *elliptikus, hiperbolikus* vagy *parabolikus hengerfelület*nek nevezzük, a szerint, hogy egy, az alkotókkal nem párhuzamos sík ellipszisben, hiperbolában vagy parabolában metszi. Az elliptikus hengerfelületnek egy alkotója sem tartozik a végtelen távoli síkhoz ; a hiperbolikus hengerfelületet a végtelen távoli sík két alkotóban metszi, s a parabolikus hengerfelületet egy alkotóján érinti.

71.4. *Bármely két, ugyanolyan típusú másodrendű hengerfelület aequivalens egymással az affin csoport szerint.* Ezt ugyanolyan módon bizonyítjuk be, mint a kúpfelületekre vonatkozó **71**.3 tételt.

Az *euklidesi térben* az $\mathcal{F}$ *kúpfelület tengelyén* olyan egyenest értünk, mely átmegy a kúpfelület O csúcsán s merőleges polársíkjára.

Jelöljük Ω-val az O középpontú nyalábnak azt a polaritását, mely az $\mathcal{F}$ kúpfelületet származtatja, és Ω_0-val az abszolut polaritást. Az O középpontú nyaláb egyeneseinek és síkjainak az υ végtelen távoli síkkal való metszéssel megfeleltetjük a végtelen távoli sík pontjait és egyeneseit, s ezáltal átvisszük az Ω és Ω_0 polaritást az υ síkra.

Az Ω és Ω_0 polaritások $\mathbf{T}=\Omega\Omega_0$ szorzata az υ sík önmagára való kollineációja, mely a **36**.3 tétel szerint vagy általános perspektivitás, vagy I típusú (három fixponttal bíró) leképezés. (**T** nem lehet az υ sík azonos leképezése, mivel Ω hiperbolikus és Ω_0 elliptikus polaritás).

Ha **T** *perspektív*, középpontját jelöljük Z-vel, tengelyét u-val. Mivel Z-nek az Ω_0 abszolút polaritásnál az u egyenes felel meg, az OZ egyenes merőleges az Ou síkra, tehát OZ a kúpfelületnek tengelye. Mivel **T** az u egyenesen az azonosság, az u egyenesen az Ω-nál és Ω_0-nál konjugált pontok involuciója megegyezik. Ha tehát X az u egyenes tetszőleges pontja, s Y X-nek a konjugáltja, akkor OX és OY merőleges egymásra, vagyis ezek is tengelyei az $\mathcal{F}$ kúpfelületnek. Legyen α az u egyenesen átmenő, s O-t nem tartalmazó sík; α-nak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonala egy olyan $\mathcal{C}$ másodrendű görbe, melyre vonatkozóan konjugált pontok az u egyenesen ugyanazt az involuciót származtatják, mint Ω_0; az értelmezés szerint tehát $\mathcal{C}$ kör (l. 67.§). Ebben az esetben $\mathcal{F}$-et *forgási kúpfelületnek* (vagy *körkúpnak*) nevezzük.

Ha pedig az υ sík **T** leképezése *nem perspektív*, három fixpontját jelöljük X, Y, Z-vel; mivel az Ω_0 abszolut poláritásnál XYZ poláris háromszög, tehát az OX, OY, OZ egyenesek közül bármelyik kettő merőleges egymásra; ezek az $\mathcal{F}$ kúpfelület tengelyei. Az $\mathcal{F}$ kúpfelületnek az υ végtelen távoli síkkal való $\mathcal{C}$ metszésvonalára vonatkozóan XYZ poláris háromszög; a három csúcspont közül az egyik, például Z belső pontja, a másik kettő külső pontja $\mathcal{C}$-nek (**59**.8). Az OZ tengely a kúpfelület belsejében, OX és OY külsejében fekszik. Minden az OZ tengelyre merőleges, vagyis az OXY síkkal párhuzamos, s az O ponton át nem menő sík $\mathcal{F}$-et ellipszisben metszi; az OXZ és OYZ síkokkal párhuzamos, az O pontot nem tartalmazó síkok $\mathcal{F}$-et hiperbolában metszik; ezeknek a metszésvonalaknak tengelyei párhuzamosak a kúpfelület két-két tengelyével.

71.5. E szerint *az $\mathcal{F}$ másodrendű kúpfelület vagy forgási kúpfelület, vagy három tengelye van, és ezek páronkint merőlegesek egymásra.*

Bebizonyítjuk a következő tételt:

71.6. *Minden másodrendű görbe előállítható mint egy kör perspektív képe.*

B i z o n y í t á s. Legyen $\mathcal{C}$ tetszőleges másodrendű görbe, A ennek valamely pontja és a az A-ban húzott érintő. Az a egyenesen átfektetünk egy másik síkot, s ebben felveszünk egy olyan, az A ponton átmenő $\mathcal{K}$ kört, melynek szintén érintője az a egyenes. A **64**.7 tétel szerint van egy olyan kúp- (vagy henger-) felület, melyen rajta fekszik $\mathcal{C}$ és $\mathcal{K}$; ennek (végesben vagy végtelenben fekvő) csúcsából való vetítés perspektív vonatkozás $\mathcal{C}$ és $\mathcal{K}$ között.

É r t e l m e z é s. Egy elliptikus vagy hiperbolikus *hengerfelület tengelyén* értjük az υ végtelen távoli síknak a polárisát. Ha az elliptikus hengerfelületnek egy, a tengelyére merőleges síkkal való metszésvonala kör, akkor a felületet *forgási hengerfelület*nek (vagy *körhenger*nek) nevezzük.

72. §. A másodrendű felületek értelmezése.

É r t e l m e z é s. Legyen Ω a tér hiperbolikus polaritása; az Ω-nál önmagukhoz konjugált pontok összességét az Ω polaritáshoz tartozó *másodrendű felület*nek, ezeket a pontokat a *másodrendű felület pontjai*nak, s polársíkjaikat a *másodrendű felület érintősíkjai*nak nevezzük. Az érintősík pólusát *érintési pont*jának nevezzük.

A tér nem szinguláris polaritásaira vonatkozó tételekből közvetlenül adódnak az alábbi tételek.

72.1. T é t e l. *Az $\mathcal{F}$ másodrendű felület minden érintősíkjában $\mathcal{F}$-nek vagy egy pontja van, vagy az érintősík $\mathcal{F}$-et két különböző egyenesben metszi, melyeknek közös pontja az érintési pont* (**54**.4).

É r t e l m e z é s. Az $\mathcal{F}$ másodrendű felület A pontját *elliptikus pont*nak nevezzük, ha az A-hoz tartozó érintősíknak nincs $\mathcal{F}$-fel A-n kívül más közös pontja ; *hiperbolikus pont*nak, ha az érintősík $\mathcal{F}$-et két egyenesben metszi. Minden, az $\mathcal{F}$ felületen fekvő egyenest az *$\mathcal{F}$ felület alkotójá*nak nevezünk.

72.2. T é t e l. *Az $\mathcal{F}$ másodrendű felület minden pontja elliptikus, vagy minden pontja hiperbolikus pont* (**54**.7 vagy 8).

É r t e l m e z é s. Az $\mathcal{F}$ másodrendű felületet *elliptikus*nak vagy *hiperbolikus*nak nevezzük a szerint, hogy pontjai elliptikus vagy hiperbolikus pontok. A hiperbolikus másodrendű felületeket *másodrendű vonalfelület*eknek is nevezzük.

Ha az Ω hiperbolikus polaritás ellipszoid, illetve hiperboloid típusú, az Ω-hoz tartozó $\mathcal{F}$ másodrendű felület elliptikus, illetve hiperbolikus (**55**.2).

72.3. Tétel. *A tér bármely kollineációjánál egy másodrendű felület ugyanolyan típusú* (elliptikus vagy hiperbolikus) *másodrendű felületbe megy át* (**55**.4).

72.4. Tétel. *Ha az α sík nem érintősíkja az $\mathcal{F}$ másodrendű felületnek, akkor $\mathcal{F}$-nek α-val való metszésvonala másodrendű görbe, vagy pedig nincs $\mathcal{F}$-nek α-val közös pontja.*

Bizonyítás. Az **54**.1 tétel szerint az $\mathcal{F}$-et származtató Ω polláritás az α síkon polaritást létesít, s ez vagy hiperbolikus, tehát önmagukhoz konjugált pontjai egy $\mathcal{C}$ másodrendű görbét alkotnak, mely $\mathcal{F}$-nek α-val való metszésvonala ; vagypedig elliptikus az α síkban létesített polaritás, nincs önmagához konjugált pontja, s $\mathcal{F}$-nek nincs α-val közös pontja.

72.5. *Az a egyenesnek s az $\mathcal{F}$ másodrendű felületnek kölcsönös helyzete* a következő lehet :

a) Az a egyenes *alkotója* $\mathcal{F}$-nek, vagyis minden pontja $\mathcal{F}$-hez tartozik ; ez esetben a egybeesik polárisával.

b) Az a egyenesnek $\mathcal{F}$-fel egy és csak egy A közös pontja van ; ez esetben azt mondjuk, hogy az a egyenes *érintője $\mathcal{F}$-nek az A pontban.* Az a egyenesnek polárisával, a'-vel van egy közös pontja (az **54**.1 tétel folytán), s mivel ez önmagához konjugált, tehát A-val azonos. Az a és a' egyenesek A polársíkjában, vagyis az A ponthoz tartozó α érintősíkban feküsznek.

c) Az a egyenesnek $\mathcal{F}$-fel két közös pontja van ; a-t az $\mathcal{F}$ felületet *metsző* egyenesnek nevezzük.

d) Az a egyenesnek nincs $\mathcal{F}$-fel közös pontja, vagyis a *nem metszője* $\mathcal{F}$-nek.

A c) és d) esetben a-nak nincs polárisával közös pontja, s az Ω polaritás az a egyenesen hiperbolikus, illetve elliptikus involuciót létesít (**54**.1) ; a hiperbolikus involució két fixpontja a-nak $\mathcal{F}$-fel való két metszéspontja.

Ebből a felsorolásból közvetlenül adódnak a következő tételek :

72.6. Tétel. *Ha az a egyenesnek az $\mathcal{F}$ másodrendű felülettel kettőnél több közös pontja van, akkor az a egyenes $\mathcal{F}$-nek alkotója. $\mathcal{F}$-nek az a egyenes bármely pontjához tartozó érintősíkja tartalmazza a-t, s minden, az a egyenesen átmenő sík érintősíkja $\mathcal{F}$-nek.*

72.7. Tétel. *Ha az a egyenesnek $\mathcal{F}$-fel egy és csak egy A pontja közös, akkor a érintője $\mathcal{F}$-nek s az A ponthoz tartozó érintősíkban fekszik.*

72.8. Tétel. *Ha az a egyenes nem alkotója s nem érintője $\mathfrak{F}$-nek, akkor az a egyenesen $\mathfrak{F}$-nek vagy két pontja van, vagy egy sincs* (**54**.2).

72.9. Tétel. *Ha az a egyenes nem alkotója s nem érintője $\mathfrak{F}$-nek, akkor az a egyenesen $\mathfrak{F}$-nek vagy két érintősíkja megy át, vagy egy sem.* (Ez a **72**.8 tétel duálisa ; l. **54**.3.)

72.10. Tétel. *Két egymáshoz konjugált s egymást nem metsző a és a' egyenes közül egyik metszője, másik nem metszője $\mathfrak{F}$-nek, ha $\mathfrak{F}$ elliptikus; mindkettő metsző, vagy mindkettő nem metsző, ha $\mathfrak{F}$ hiperbolikus* (**55**.11).

72.11. *Az $\mathfrak{F}$ másodrendű felület az Ω polaritást egyértelműen meghatározza,* azaz nincs két olyan polaritás, melyhez ugyanaz az $\mathfrak{F}$ másodrendű felület tartozik. Legyen ugyanis A az $\mathfrak{F}$ felület tetszőleges pontja, b, c, d az A ponton átmenő három egyenes, mely nem fekszik egy síkban, s melyek közül egyik sem fekszik az A ponthoz tartozó α érintősíkban. A $b, c, d,$ egyenesek metszői az $\mathfrak{F}$ felületnek (**72**.7) ; A-tól különböző metszéspontjukat jelöljük B, C, D-vel. A BCD síkban felveszünk egy olyan E' pontot, mely nem tartozik sem $\mathfrak{F}$-nek, sem α-nak a BCD síkkal való metszésvonalához, sem a BCD háromszög valamelyik oldalához; az AE' egyenesnek $\mathfrak{F}$-fel való másik metszéspontja legyen E. Az A, B, C, D, E pontok közül bármely négy nem fekszik egy síkban, s ezért az Ω polaritásnál megfelelő $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ síkok közül bármely négynek nincs közös pontja. Az **53**.3 tétel szerint a térnek egy és csak egy olyan korrelációja van, mely az A, B, C, D, E pontnak az $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ síkot felelteti meg, s ez az Ω polaritással azonos.

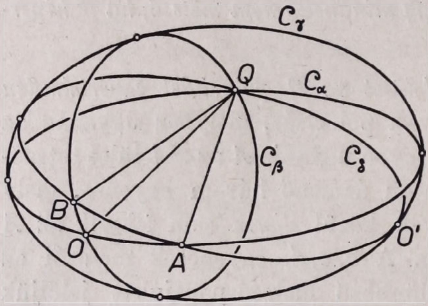
Értelmezés. *Az $\mathfrak{F}$ másodrendű felületre vonatkozó póluson, polársíkon és konjugált elemeken* értjük az $\mathfrak{F}$-et származtató Ω polaritásnál megfelelő pólust, polársíkot és konjugált elemeket.

73. §. A másodrendű felületek projektív előállítása.

A másodrendű felületek, hasonlóan, mint a másodrendű görbék, projektív elemi alakzatok megfelelő elemeinek metszéspontjaiból állíthatók elő. Érvényes a következő :

73.1. Tétel. *Legyen $\mathfrak{F}$ egy másodrendű felület, O és O' ennek két különböző pontja. Megadható egy olyan korrelatív vonatkozás az O és az O' középpontú nyaláb között (vagyis egy projektív vonatkozás az O középpontú sugárnyaláb és az O' középpontú síknyaláb között), amelynél* *egymásnak megfelelő elemek metszéspontjai az $\mathcal{F}$ felület pontjai.* (Ha az egyik nyaláb valamelyik egyenese a másik nyaláb megfelelő síkjában fekszik, az egyenes összes pontját a metszéspontokhoz számítjuk.)

Bizonyítás. Felveszünk az $\mathcal{F}$ felületen egy olyan Q pontot, mely nem pontja sem az O, sem az O' ponthoz tartozó érintősíknak; az OQ és $O'Q$ egyenesek $\mathcal{F}$-nek metszői. Az OQ egyenesen átfektetünk két különböző α és β síkot, melyek közül egyik sem érintősíkja $\mathcal{F}$-nek, s egyik sem megy át az O' ponton. $\mathcal{F}$-nek α-val és β-val való metszésvonala egy-egy másodrendű görbe (**72**.4), melyet $\mathcal{C}_\alpha$-val és $\mathcal{C}_\beta$-val jelölünk (**111**. ábra). Az $O'Q$ egyenesen átfektetünk egy δ síkot, mely nem megy át az O ponton, s nem érintősíkja $\mathcal{F}$-nek, olyan módon, hogy az α és δ, valamint a β és δ síkok metszésvonalai az $\mathcal{F}$ felületnek metszői legyenek; $\mathcal{F}$-fel való Q-tól különböző metszéspontjukat jelöljük A-val és B-vel; ezek a pontok a δ síknak a $\mathcal{C}_\alpha$ és a $\mathcal{C}_\beta$ görbével való, Q-tól különböző metszéspontjai. Az O', A, B pontok nem feküsznek egy egyenesen, mivel δ nem érintősíkja $\mathcal{F}$-nek (**72**.6).



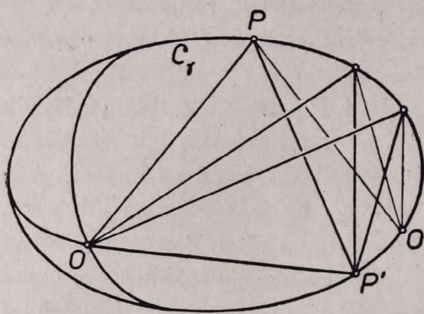
111. ábra.

Az (O, α) sugársor és az $O'A$ tengelyű síksor között a $\mathcal{C}_\alpha$ másodrendű görbe közvetítésével projektív vonatkozást létesítünk, úgy, hogy a $\mathcal{C}_\alpha$ görbe bármely P pontján átmenő OP egyenest és az $O'AP$ síkot egymásnak feleltetjük meg; ha P egybeesik O-val, akkor OP jelenti az O pontban $\mathcal{C}_\alpha$-hoz húzott érintőt, s ha P egybeesik A-val, akkor $O'AP$ jelenti az O' ponton s az A pontban $\mathcal{C}_\alpha$-hoz húzott érintőn átmenő síkot. Az (O, α) sugársornak és az $O'A$ tengelyű síksornak ezt a projektív vonatkozását jelöljük Ω_α-val; az OQ egyenesnek Ω_α-nál az $O'AQ=\delta$ sík felel meg. — Hasonlóan értelmezzünk egy Ω_β projektív vonatkozást az (O, β) sugársor és az $O'B$ tengelyű síksor között a $\mathcal{C}_\beta$ másodrendű görbe közvetítésével; ennél is az OQ egyenesnek a $\delta=O'BQ$ sík felel meg. A **34**.1 tétel folytán van egy és csak egy olyan Ω korrelatív vonatkozás az O és az O' középpontú nyalábok között, mely az (O, α) és az (O, β) sugársor (és az $O'A$ és $O'B$ tengelyű síksor) elemeire nézve megegyezik Ω_α-val és Ω_β-val.

Az $O'O$ egyenesen s az A, illetve a B ponton átmenő síkoknak, mint az O' középpontú nyaláb elemeinek, az O középpontú nyalábban megfelelő egyenesek $\mathcal{C}_\alpha$-nak, illetve $\mathcal{C}_\beta$-nak az O ponthoz tartozó érintője; ezek $\mathcal{F}$-nek az O ponthoz tartozó érintősíkjában feküsznek. E szerint *az $O'O$ egyenesnek, mint az O' középpontú nyaláb elemének Ω-nál az $\mathcal{F}$ felületnek az O ponthoz tartozó érintősíkja felel meg.*

Felveszünk az $\mathcal{F}$ felületen egy olyan P pontot, mely nem tartozik sem az α, sem a β síkhoz. Az $O'P$ egyenesen átfektetünk egy olyan γ síkot, mely $\mathcal{C}_\alpha$-t és $\mathcal{C}_\beta$-t két-két különböző pontban metszi. A γ sík meghatározása céljából, a P pontból az α síkra vetítjük a $\mathcal{C}_\beta$ görbét, vetülete legyen $\mathcal{C}'_\beta$; jelöljük P_1-gyel az $O'P$ egyenesnek az α síkkal való metszéspontját. *A P_1 ponton átmegy legalább egy olyan egyenes, mely $\mathcal{C}_\alpha$-t és $\mathcal{C}'_\beta$-t két-két egymástól, s az O, Q pontoktól különböző pontban metszi.* Ellenkező esetben, az **59**.18 tétel folytán, a P_1 pontból $\mathcal{C}_\alpha$-hoz húzott két érintő $\mathcal{C}'_\beta$-nek is érintője volna, s az ezek által az α síkban meghatározott két szögtartomány közül az egyikhez tartoznék $\mathcal{C}_\alpha$, s a másikhoz $\mathcal{C}'_\beta$. Mivel $\mathcal{C}_\alpha$-nak és $\mathcal{C}'_\beta$-nek közös pontjai O és Q, s több közös pontjuk a fentiek szerint nincs, ezért a P_1O és P_1Q egyenesek a $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}'_\beta$ görbék közös érintői. Mivel a P pontból való vetítésnél $\mathcal{C}_\beta$-nak és $\mathcal{C}'_\beta$-nek Q-ban húzott érintője egymásnak felel meg, tehát a PP_1 egyenes, s ennek O' pontja is az $\mathcal{F}$ felületnek a Q ponthoz tartozó érintősíkjában feküdnék; a **72**.1 és 6 tétel folytán Q az O' ponthoz tartozó érintősík pontja volna, ellentétben a Q pont megválasztásával. — Van tehát legalább egy olyan, az α síkban fekvő, s a P_1 ponton átmenő l egyenes, mely a $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}'_\beta$ görbét két-két egymástól, s az O, Q pontoktól különböző pontban metszi; feltehetjük továbbá, hogy az l egyenes nem fekszik abban a síkban, mely az OO' egyenesnek, mint az O középpontú nyaláb elemének az Ω korrelációnál megfelel. — Az egymást metsző l és $O'P$ egyeneseken átmenő γ *sík a* $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ *görbét négy különböző pontban metszi.* Az Ω korrelációnál γ-nak az O középpontú nyalábban egy OO'-től különböző p egyenes felel meg.

A γ síknak a p egyenessel való P' metszéspontja különbözik O'-től. Az (O', γ) sugársornak Ω-nál megfelelő síkok a γ síkot a (P', γ) sugársor egyeneseiben metszik (112. ábra). Az (O', γ) és a (P', γ) projektív sugársorok megfelelő egyeneseinek metszéspontjai egy $\mathcal{C}$ másodrendű görbét alkotnak, mely — ha a vonatkozás perspektív — egyenespárrá fajul el (ez az $O'P'$ egyenesből és a perspektivitás tengelyéből áll). A γ síknak a $\mathcal{C}_\alpha$ és a $\mathcal{C}_\beta$ görbével való metszéspontjai valamint az O pont is a két sugársor megfelelő egyeneseinek metszéspontjai. A γ síknak az $\mathcal{F}$ másodrendű felülettel való $\mathcal{C}_\gamma$ metszésvonala vagy egyenespár, vagy másodrendű görbe (**72**.1 és 4). $\mathcal{C}_\gamma$-nak és $\mathcal{C}$-nek van öt közös pontja, t. i. az O' pont, s a γ síknak a $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ görbékkel való négy metszéspontja: az utóbbi négy pont közül, bármely három nem fekszik egy egyenesen. Ez az öt pont egyértelműen meghatároz egy kúpszeletet (l. 63. §, *I*). Ebből következik, hogy az $\mathcal{F}$ felületnek a γ síkkal való $\mathcal{C}_\gamma$ metszésvonala megegyezik azzal a $\mathcal{C}$ kúpszelettel, melyet az (O', γ) és (P', γ) projektív sugársorok származtatnak. Az $\mathcal{F}$ felület megadott P pontja $\mathcal{F}$ és γ metszésvonalához, tehát a $\mathcal{C}_\gamma = \mathcal{C}$ görbéhez tartozik; e szerint P az $O'P$ egyenesnek s az Ω-nál megfelelő síknak a metszéspontja. Ebből viszont következik, hogy az OP egyenesnek Ω-nál megfelelő γ' sík a γ síkot az $O'P$ egyenesben metszi, tehát az OP egyenesnek s Ω-nál származó γ' képének is közös pontja a P pont.



112. ábra.

Ha az OP egyenesnek van az $\mathcal{F}$ felülettel O-n és P-n kívül még egy R közös pontja, akkor OP $\mathcal{F}$-nek alkotója s az O-hoz tartozó érintősíkban fekszik (**72**.6). Fenti eredményünk szerint a γ' sík, mely Ω-nál OP-nek felel meg, átmegy az R ponton is, azaz tartalmazza az OP egyenest. Megfordítva, ha az OP egyenesnek megfelelő γ' sík tartalmazza az OP egyenest, akkor az OO' egyenest is, s mivel ennek, mint az O' középpontú nyaláb egyenesének Ω-nál $\mathcal{F}$-nek az O ponthoz tartozó érintősíkja felel meg, tehát OP ebben az érintősíkban fekszik. — Ezzel bebizonyítottuk a **73**.1 tételt.

Megjegyzés. A fenti bizonyítás csekély módosításával megmutatható, hogy a **73**.1 *tétel érvényes másodrendű kúpfelületekre is, feltéve, hogy az O és az O' pont a kúpfelület csúcsától különbözik.*

Ennek a szakasznak további tárgyalásaiban *a másodrendű felületekhez számítjuk a másodrendű kúpfelületeket is;* megkülönböztetésül, a szorosabb értelemben vett másodrendű felületeket *nem elfajult másodrendű felületeknek* fogjuk nevezni.

73.2. Tétel. *Ha az $\mathfrak{F}$ és $\mathfrak{F}'$ másodrendű felületnek van két közös $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ másodrendű görbéje, melyek két pontban metszik egymást, s ha ezen kívül van a két felületnek még egy közös P pontja, akkor a két felület azonos egymással.*

Bizonyítás. A $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ görbe metszéspontjait jelöljük O, Q-val; azon az OQ szakaszon, mely a $\mathcal{C}_\alpha$ görbe belsejében fekszik, felveszünk egy D pontot. A D ponton átfektetünk egy OQ-tól különböző, s a $\mathcal{C}_\beta$ görbét metsző l egyenest, amelynek C_β-val közös pontjai közül egyik sem tartozik $\mathfrak{F}$-nek, vagy $\mathfrak{F}'$-nek a P pontban fektetett érintősíkjához. Az l-en és a PD egyenesen átmenő γ sík $\mathcal{C}_\alpha$-t és $\mathcal{C}_\beta$-t két-két pontban metszi. A P pont, s a γ síknak a $\mathcal{C}_\alpha$, $\mathcal{C}_\beta$ görbékkel való négy metszéspontja közül bármely három nem fekszik egy egyenesen; ez az öt pont meghatároz egy $\mathcal{C}_\gamma$ másodrendű görbét, mely a két megadott felületnek a γ síkkal való közös metszésvonala. A $\mathcal{C}_\gamma$ görbének $\mathcal{C}_\alpha$-val és $\mathcal{C}_\beta$-vel két-két közös pontja van.

A **73**.2 tétel feltételeiből következik tehát:

Az $\mathfrak{F}$ és az $\mathfrak{F}'$ felületnek van három olyan $\mathcal{C}_\alpha$, $\mathcal{C}_\beta$, $\mathcal{C}_\gamma$ közös másodrendű görbéje, melyeknek α, β, γ síkja nem tartozik egy síksorhoz, s a három görbe közül bármely kettőnek van két közös pontja.

A $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ görbék közös OQ metszője az $\mathfrak{F}$ és az $\mathfrak{F}'$ felületnek is metszője. A két felületnek az O ponthoz tartozó érintősíkja közös, mivel mindkettő tartalmazza a nem egy síkban fekvő $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ görbének az O ponthoz tartozó érintőjét; hasonlóan, Q-ban is ugyanaz $\mathfrak{F}$-nek és $\mathfrak{F}'$-nek az érintősíkja.

Legyen O' a $\mathcal{C}_\gamma$ görbe olyan pontja, hogy az $O'Q$ és $O'O$ egyenesek metszői az $\mathfrak{F}$ és az $\mathfrak{F}'$ felületnek. Az $O'Q$ egyenesen átfektetünk egy δ síkot, mely $\mathcal{C}_\alpha$-t és $\mathcal{C}_\beta$-t két különböző A és B pontban metszi (Q-n kívül). Az $O'A$ tengelyű síksor s az (O, α) sugársor között a $\mathcal{C}_\alpha$ görbe közvetítésével, s az $O'B$ tengelyű síksor és az (O, β) sugársor között a $\mathcal{C}_\beta$ görbe közvetítésével egy-egy projektív vonatkozást állítunk elő (úgy, mint a **73**.1 tétel bizonyításában); mindkét vonatkozásnál az OQ egyenesnek a δ sík felel meg. Ezek a projektív vonatkozások kiterjeszthetők egy- és csak egyféleképpen az O és az O' középpontú nyaláb közti korrelációvá. A korrelációnál egymásnak megfelelő egyenesek és síkok metszéspontjai a **73**.1 tétel szerint az $\mathfrak{F}$, s ugyancsak az $\mathfrak{F}'$ felületnek a pontjai, s ezért a két felület azonos.

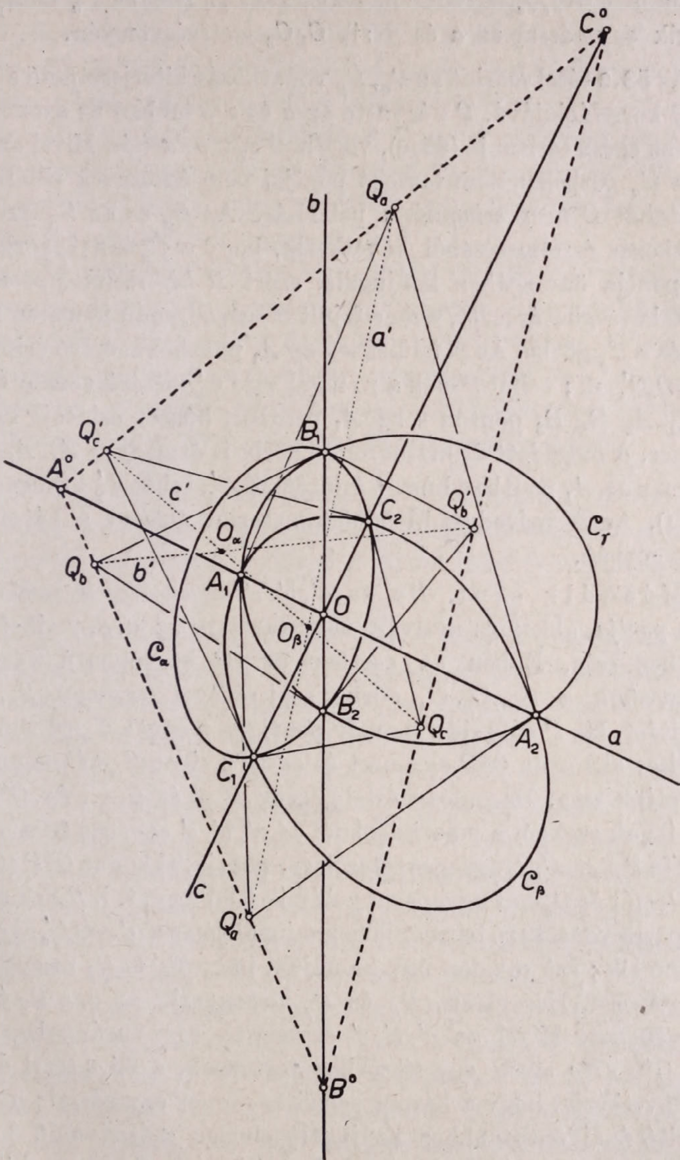
73.3. Tétel. *Ha α, β, γ nem egy síksorhoz tartozó három sík, s $\mathcal{C}_\alpha$, $\mathcal{C}_\beta$, $\mathcal{C}_\gamma$ ezekben fekvő másodrendű görbék, melyek közül bármely* *kettőnek két közös pontja van, akkor létezik egy és csak egy olyan $\mathfrak{F}$ másodrendű felület, mely átmegy a három görbén.*

B i z o n y í t á s. Elég bebizonyítani, hogy a három görbén átmegy legalább egy másodrendű felület ; a **73**.2 tételből következik hogy csak egy ilyen felület van.

A $\mathcal{C}_\beta$ és $\mathcal{C}_\gamma$, a $\mathcal{C}_\gamma$ és $\mathcal{C}_\alpha$, s a $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ görbék két-két közös pontját jelöljük sorban A_1, A_2-vel, B_1, B_2-vel és C_1, C_2-vel. Legyen O az α, β, γ síkok közös pontja, s A^0, B^0, C^0 ennek harmonikus konjugáltja rendre az A_1, A_2, a B_1, B_2 és a C_1, C_2 pontpárokra vonatkozóan. Az A^0, B^0, C^0 pontok nem feküsznek egy egyenesen, hanem meghatároznak egy $A^0B^0C^0$ síkot. (113. ábra).

Az $a=A_1A_2$ egyenesnek a $\mathcal{C}_\beta$ és a $\mathcal{C}_\gamma$ görbére vonatkozó pólusát jelöljük Q_a, Q_a'-vel, a $b=B_1B_2$ egyenesnek $\mathcal{C}_\gamma$-ra és $\mathcal{C}_\alpha$-ra vonatkozó pólusát Q_b, Q_b'-vel, s a $c=C_1C_2$ egyenesnek $\mathcal{C}_\alpha$-ra és $\mathcal{C}_\beta$-ra vonatkozó pólusát Q_c, Q_c'-vel; Q_a nyilván különbözik Q_a'-től, Q_b és Q_c Q_b'-től, illetve Q_c'-től. A Q_aQ_a', Q_bQ_b', Q_cQ_c' egyeneseket jelöljük a', b', c'-vel. A Q_b, Q_a' pontok különböznek egymástól s az A^0B^0 egyenesen feküsznek; Q_c, Q_b' a B^0C^0 egyenesnek és Q_a, Q_c' a C^0A^0 egyenesnek két-két különböző pontja. Az a', b', c' egyenesek az $A^0B^0C^0$ síkban feküsznek.

E l s ő e s e t (113. ábra). *Ha az a', b' c' egyeneseknek nincs közös pontja*, jelöljük O_α-val a b', c' egyenesek, s O_β-val az a', c' egyenesek metszéspontját; nyilván O_α és O_β különbözik egymástól, s O_α nem tartozik az α síkhoz, sem O_β a β síkhoz. A térben egy Ω korrelációt értelmezünk úgy, hogy megadjuk az α síkban fekvő pontmezőnek az O_α középpontú síknyalábra, s a β síkban fekvő pontmezőnek az O_β középpontú síknyalábra való projektív leképezését, melyek megegyeznek a két sík C_1C_2 metszésvonalán. Az α sík minden P pontjának megfeleltetjük azt, az O_α ponton átmenő síkot, melynek az α síkkal való metszésvonala a P pontnak a $\mathcal{C}_\alpha$ görbére vonatkozó polárisa ; minden, az α síkban fekvő p egyenesnek megfelel az O_α középpontú nyalábnak az az egyenese, mely a p egyenesnek $\mathcal{C}_\alpha$-ra vonatkozó pólusán megy át. Az α síknak s az O_α középpontú nyalábnak ezt a projektív vonatkozását jelöljük Ω_α-val. — Hasonlóan értelmezünk a $\mathcal{C}_\beta$ görbe segítségével egy Ω_β projektív vonatkozást a β sík és az O_β középpontú nyaláb között. — Ha P az α és β sík $c=C_1C_2$ metszésvonalán fekszik, s P' jelenti P-nek a C_1, C_2 pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltját, akkor P-nek a $\mathcal{C}_\alpha$ és a $\mathcal{C}_\beta$ görbére vonatkozó polárisa a $P'Q_c$ és a $P'Q_c'$ egyenes ; tehát P-nek Ω_α-nál a $P'Q_cO_\alpha$ sík, Ω_β-nál a $P'Q_c'O_\beta$ sík felel meg, s ez a két sík azonos egymással, mivel az O_α, O_β


C°
b
Q_a
a'
Q_c'
B_1
A°
c'
C_2
Q_b'
C_γ
O_α
Q_b
b'
A_1
O
O_β
C_α
B_2
Q_c
A_2
a
C_1
c
C_β
Q_a'
B°

113. ábra.

pontok a $c'=Q_cQ'_c$ egyenesen feküsznek. E szerint Ω_α és Ω_β megegyezik egymással az α és β sík C_1C_2 metszésvonalán.

Az **53**.2 tétel szerint az Ω_α, Ω_β vonatkozás kiterjeszthető a térnek egy Ω korrelációjává. Ω négyzete az α és a β síkban az azonosság, s ezért az egész térben is (**45**.6), vagyis Ω egy *polaritás.* Mivel az α síknak a $\mathcal{C}_\alpha$ görbéhez nem tartozó pontjai nem feküsznek polársíkjukban, tehát Ω *nem szinguláris* polaritás. Az Ω_α és az Ω_β projektív vonatkozás értelmezéséből következik, hogy a $\mathcal{C}_\alpha$ és a $\mathcal{C}_\beta$ görbe minden pontja önmagához konjugált, ezért Ω *hiperbolikus polaritás,* s az általa meghatározott, nem elfajult $\mathcal{F}$ másodrendű felületen fekszik a $\mathcal{C}_\alpha$ és a $\mathcal{C}_\beta$ görbe. Az $\mathcal{F}$ felületnek az A_1 ponthoz tartozó érintősíkja az $A_1Q_aQ'_a$ sık ; tehát $\mathcal{F}$-nek a γ síkkal való $\mathcal{C}'_\gamma$ metszésvonala átmegy az A_1, A_2, B_1, B_2 ponton s az A_1 pontban húzott érintője az $A_1Q'_a$ egyenes. A megadott $\mathcal{C}_\gamma$ másodrendű görbe is átmegy az A_1, A_2, B_1, B_2 ponton s az A_1 pontban húzott érintője $A_1Q'_a$, tehát $\mathcal{C}'_\gamma$ azonos $\mathcal{C}_\gamma$-val (**60**.11). Az $\mathcal{F}$ másodrendű felület e szerint átmegy a három megadott görbén.

M á s o d i k e s e t. *Ha az a', b', c' egyeneseknek van egy O^* közös pontja,* akkor ez nyilván nem tartozik az α, β, γ síkok közül egyikhez sem. Ebben az esetben az O^* középpontú nyalábban értelmezünk a $\mathcal{C}_\alpha$, $\mathcal{C}_\beta$, $\mathcal{C}_\gamma$ görbe segítségével egy-egy Ω_α, Ω_β, Ω_γ polaritást. Ha P az α sík valamely pontja, s p ennek $\mathcal{C}_\alpha$-ra vonatkozó polárisa, akkor az O^*P egyenest és az O^*p síkot Ω_α-nál egymásnak feleltetjük meg. Hasonlóan értelmezzük Ω_β-t és Ω_γ-t. Az O^*a, O^*b, O^*c síknak ezeknél a polaritásoknál az a', b', c' egyenes felel meg.

Ha P a $c=C_1C_2$ egyenes tetszőleges pontja, akkor az O^*P egyenesnek Ω_α-nál és Ω_β-nál ugyanaz a polársík felel meg, t. i. P-nek a C_1, C_2 pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltján s a $c'=Q_cQ'_c$ egyenesen átmenő sík ; ezt röviden úgy mondjuk, hogy Ω_α és Ω_β megegyezik a c egyenesen. Hasonlóan, Ω_β és Ω_γ megegyezik az a, s Ω_γ és Ω_α a b egyenesen. Mivel az a', b', c' egyenesek egy sugársorhoz és az O^*a, O^*b, O^*c síkok egy síksorhoz tartoznak, a **35**.8 tétel duálisából következik, hogy a három polaritás azonos egymással ; a nyaláb polaritásánál önmagukhoz konjugált elemek másodrendű kúpfelületet alkotnak, mely az O^* pontból vetíti a $\mathcal{C}_\alpha$, $\mathcal{C}_\beta$, $\mathcal{C}_\gamma$ görbéket. — Ezzel bebizonyítottuk a **73**.3 tételt.

Ha a **73**.1 tétel megfordításaként, jellemezni akarjuk a másodrendű felületeket mint két különböző nyaláb korrelatív vonatkozásánál megfelelő elemek metszéspontjainak összességét, akkor ugyanúgy ki kell zárnunk bizonyos speciális korrelációkat, mint ahogyan a másodrendű görbék jellemzésénél két sugársor projektív vonatkozásai közül kizártuk a perspektív vonatkozásokat.

Értelmezés. Két különböző O és O' középpontú nyaláb közti *Ω korrelációt speciálisnak nevezünk,* ha minden, az OO' egyenesen átmenő sík tartalmazza az Ω-nál neki megfelelő, az O, illetve az O' ponton átmenő két egyenest.

Az értelmezésből következik, hogy egy speciális korrelációnál az OO' egyenesnek, mint az O, s mint az O' középpontú nyaláb elemének megfelelő o és o' síkok közül egyikhez sem tartozik az OO' egyenes. A két nyaláb megfelelő elemeinek metszéspontjai az o, o' síkokhoz tartoznak; az o, o' síkpárt *elfajuló másodrendű felület*nek tekinthetjük.

Bebizonyítjuk a **73.**1 tétel következő megfordítását:

73.4. Tétel. *Két különböző O és O' középpontú nyaláb között legyen Ω egy nem speciális korreláció. A két nyaláb megfelelő elemeinek metszéspontjai másodrendű felületet alkotnak* (ideértve a másodrendű kúpfelületeket is).

Bizonyítás. Ha az O középpontú nyaláb p egyenesének az O' középpontú nyalábban a π' sík felel meg, akkor a korreláció értelmezése szerint minden, a p egyenesen átmenő síknak, mint az O középpontú nyaláb elemének, Ω-nál az (O', π') sugársor valamely eleme felel meg (39. §). Ha p-nek π'-vel közös pontja P, akkor az $O'P$ egyenesnek az O középpontú nyalábban a p egyenesen átmenő π sík felel meg, s P közös pontja $O'P$-nek és π-nek. E szerint az egyik nyaláb egyeneseinek a másik nyaláb megfelelő síkjaival való metszéspontjai ugyanazok, mint a másik nyaláb egyeneseinek az első nyaláb megfelelő síkjaival való metszéspontjai. A metszéspontok összességét *a két korrelatív nyaláb $\mathcal{F}$ metszési idomá*nak nevezzük.

Legyen α az O középpontú nyalábnak egy síkja, s a' az O' középpontú nyaláb megfelelő egyenese; tegyük fel, hogy a' különbözik az $O'O$ egyenestől. Az (O, α) sugársor a elemének az O' középpontú nyalábban megfelelő sík legyen α'; jelöljük a' és α metszéspontját A-val, s az α' síknak α-val való metszésvonalát a''-vel. Az (O, α) és (A, α) sugársorok között Ω projektív vonatkozást létesít; a megfelelő a, a'' egyenesek metszéspontjai egy $\mathcal{C}_\alpha$ másodrendű görbét alkotnak, vagypedig a két sugársor vonatkozása perspektív. A $\mathcal{C}_\alpha$ görbének, illetve a perspektivitás tengelyének pontjai hozzátartoznak a két korrelatív nyaláb $\mathfrak{F}$ metszési idomához. Ha a két sugársor perspektív, akkor a középpontjukat összekötő OA egyenes önmagának felel meg, azaz hozzátartozik az Ω-nál OA-nak megfelelő α' síkhoz. Tehát OA, mint az O középpontú nyaláb egyenese, az O' középpontú nyalábban az OO' egyenesen átmenő síknak felel meg, s ezért OA hozzátartozik ahhoz az o síkhoz, mely az OO' egyenesnek Ω-nál az O középpontú nyalábban megfelel. Mivel feltettük, hogy Ω nem speciális korreláció, az (O, o) sugársorban legfeljebb két olyan *kivételes egyenes* van, mely hozzátartozik az Ω-nál neki megfelelő síkhoz. Vegyük fel az α síkot olyan módon, hogy az o síkkal való metszésvonala különbözzék az (O, o) sugársor kivételes egyeneseitől; *az α síknak $\mathfrak{F}$-fel közös pontjai ez esetben egy $\mathfrak{C}_\alpha$ másodrendű görbét alkotnak.*

Legyen Q a $\mathfrak{C}_\alpha$ görbe tetszőleges, O-tól és A-tól különböző pontja; az OQ egyenesen átfektetünk egy β síkot, mely különbözik az $O'Q$ egyenesnek Ω-nál az O középpontú nyalábban megfelelő síktól, s melynek az o síkkal való metszésvonala különbözik az (O, o) sugársor kivételes egyeneseitől. Jelöljük b'-vel a β síknak az O' középpontú nyalábban Ω-nál megfelelő egyenest, s B-vel b'-nek β-val közös pontját. A β síknak az $\mathfrak{F}$ metszési idommal közös pontjai egy $\mathfrak{C}_\beta$ másodrendű görbét alkotnak, melynek O és Q pontjai közösek $\mathfrak{C}_\alpha$-val; az A, B, Q pontok különböznek egymástól, s nem feküsznek egy egyenesen.

Az O' ponton átfektetünk egy olyan γ síkot, melynek a $\mathfrak{C}_\alpha$ és a $\mathfrak{C}_\beta$ görbével két-két, O-tól és Q-tól különböző közös pontja van. Mint a **73**.1 tétel bizonyításában, felvehetjük a γ síkot olyan módon, hogy a $\mathfrak{C}_\alpha$ és $\mathfrak{C}_\beta$ görbével való négy metszéspontja s az O' pont közül bármely három ne tartozzék egy egyeneshez. Ez az öt pont meghatároz egy $\mathfrak{C}_\gamma$ másodrendű görbét; a $\mathfrak{C}_\alpha$, $\mathfrak{C}_\beta$, $\mathfrak{C}_\gamma$ görbékre teljesülnek a **73**.3 tétel feltételei. Van tehát egy és csak egy olyan $\mathfrak{F}'$ másodrendű felület, mely átmegy a három görbén.

Az $\mathfrak{F}'$ felület segítségével értelmezünk egy Ω' korrelációt úgy, mint a **73**.1 tétel bizonyításában. Ez a korreláció az (O, α) és az (O, β) sugársorokra, illetve az ezeknek megfelelő $O'A$ és $O'B$ tengelyű síksorokra nézve megegyezik az eredetileg megadott Ω korrelációval, tehát a **34**.1 tétel folytán Ω azonos Ω'-vel. Mivel az Ω' korrelációnak megfelelő metszési idom az $\mathfrak{F}'$ másodrendű felület (**73**.1), ezért $\mathfrak{F}'$ azonos az Ω korrelációnak megfelelő $\mathfrak{F}$ metszési idommal. Ezzel bebizonyítottuk a **73**.4 tételt.

74. §. Másodrendű vonalfelületek.

Másodrendű vonalfelületen, értelmezés szerint, egy olyan (nem elfajult) másodrendű felületet értünk, melynek van legalább egy alkotója, azaz egy, a felületen fekvő egyenes (l. 72. §). A másodrendű vonalfelületeket hiperboloid típusú hiperbolikus polaritások származtatják. A tér polaritásaira vonatkozó tételekből adódnak a másodrendű vonalfelületek következő tulajdonságai.

74.1. *Az $\mathcal{F}$ másodrendű vonalfelület minden pontján átmegy a felületnek két alkotója; az ezeken átfektetett sík $\mathcal{F}$ érintősíkja a két alkotó metszéspontjában* (**72**.1 és 2).

74.2. *Minden síknak van az $\mathcal{F}$ felülettel legalább egy közös pontja. Az $\mathcal{F}$ felületnek egy tetszőleges síkkal való metszésvonala vagy egy másodrendű görbe, vagy egy egyenespár; az utóbbi esetben a sík $\mathcal{F}$-nek érintősíkja* (**72**.1 és 4).

A dualitás elve szerint következik ebből:

74.3. *A tér minden pontján átmegy $\mathcal{F}$-nek legalább egy érintősíkja.* Ha a P pont nem tartozik $\mathcal{F}$-hez, akkor a P ponton átmenő érintők, és érintősíkok egy másodrendű kúpfelület alkotói és érintősíkjai, melyet *érintő kúpfelület*nek nevezünk; az érintési pontok a P pont polársíkjában, azaz ennek a síknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonalán feküsznek, mely másodrendű görbe. Ezen a görbén érinti egymást $\mathcal{F}$ és az érintő kúpfelület. Ha pedig P az $\mathcal{F}$ felület pontja, akkor a P ponton átmenő érintősíkok két síksort alkotnak, melyeknek tengelyei $\mathcal{F}$-nek a P ponton átmenő két alkotója.

Ha az $\mathcal{F}$ felület A és A' pontja $\mathcal{F}$-nek egy b alkotóján fekszik, akkor az A-n és az A'-n átmenő, b-től különböző a és a' alkotó egymáshoz torz helyzetű (**54**.6).

Ha A és A' az $\mathcal{F}$ felület két olyan pontja, mely nem fekszik $\mathcal{F}$-nek egy alkotóján, akkor az A ponton átmenő a, b és az A' ponton átmenő a', b' alkotók jelölését alkalmasan választva, a és a' metszi b-t és b'-t, viszont a és a' torz, b és b' is torz. Ugyanis az A' ponthoz tartozó a' érintősíknak van a-val és b-vel egy-egy közös pontja, s ezek $\mathcal{F}$-nek az a' síkkal való metszésvonalához, vagyis az a', b' alkotópárhoz tartoznak.

74.4. *Egy l egyenesnek s az $\mathcal{F}$ másodrendű vonalfelületnek kölcsönös helyzete* a következő lehet (l. **72**.5).

a) Ha az l egyenes *alkotója* $\mathcal{F}$-nek, akkor minden, az l egyenesen átmenő sík érintősíkja $\mathcal{F}$-nek, s a síksornak megfelelő érintési pontok az l egyenes összes pontjai.

b) Ha az l egyenes *érintője* $\mathcal{F}$-nek az A érintési pontban, akkor $\mathcal{F}$-nek az A ponthoz tartozó érintősíkja tartalmazza az l egyenest, $\mathcal{F}$-nek más érintősíkja nem.

c) Ha az l egyenes *metszője* $\mathcal{F}$-nek, akkor az l egyenesen $\mathcal{F}$-nek két érintősíkja megy át. Legyenek ugyanis A és A' az $\mathcal{F}$ felületnek l-lel közös pontjai, s a, b és a', b' az ezeken a pontokon átmenő alkotói. Az a' és b, s az a és b' alkotók metszik egymást egy B, illetve B' pontban; a B és B' ponthoz tartozó érintősíkok tartalmazzák az l egyenest, $\mathcal{F}$-nek más érintősíkja nem.

d) Ha az l egyenes *nem metszője* $\mathcal{F}$-nek, akkor l-en nem megy át $\mathcal{F}$-nek egy érintősíkja sem. Minden érintősík tartalmaz ugyanis két alkotót, tehát minden, az érintősíkban fekvő egyenesnek van az alkotókkal, s ezért $\mathcal{F}$-fel is közös pontja.

Értelmezés. Az $\mathcal{F}$ másodrendű vonalfelület a és a' alkotója egy *alkotósereg*hez tartozik, ha egymáshoz torz helyzetű.

Az $\mathcal{F}$ másodrendű vonalfelület összes alkotói két alkotóseregre oszlanak a fenti értelmezésnek megfelelően. Ha ugyanis a egy tetszőleges alkotója $\mathcal{F}$-nek, akkor az a-t metsző alkotók egy sereghez tartoznak, mivel páronkint torz helyzetűek. Ha b ennek a seregnek egy tetszőleges eleme, akkor a b-t metsző alkotók egy másik sereget alkotnak. $\mathcal{F}$ mindegyik alkotója a két sereg közül egyhez és csak egyhez tartozik; jelöljük a két alkotósereget (a)-val és (b)-vel.

74.5. *Az (a) alkotósereg két tetszőleges a és a' egyenesét a (b) sereg egyenesei projektív pontsorokban metszik.* Az a vonatkozás ugyanis, melyet a és a' között a (b) sereg létesít, megegyezik az (a) sereg egy tetszőleges harmadik egyeneséről való vetítéssel. E szerint a (b) alkotósereget az (a) alkotósereg három tetszőleges a, a', a'' egyenese egyértelműen meghatározza; a (b) sereg elemei az a, a', a'' egyenesek közös tranzverzálisai; viszont a (b) sereg három tetszőleges egyenese egyértelműen meghatározza az (a) sereget (vagyis ennek többi egyenesét).

74.6. Chasles-féle tétel. *Ha az $\mathcal{F}$ másodrendű vonalfelület egy a alkotóján minden A pontnak megfeleltetjük $\mathcal{F}$-nek az A ponthoz tartozó a érintősíkját, ezáltal projektív vonatkozást létesítünk az a egyenes és az a tengelyű síksor között.*

Bizonyítás. Legyen a' $\mathcal{F}$-nek egy a-hoz torz alkotója.

A (*b*) sereg alkotói a-t és a'-t projektív pontsorokban metszik. Ha ennél a vonatkozásnál az a egyenes A pontjának az a' egyenes A' pontja felel meg, akkor az A ponthoz tartozó érintősík $\alpha = aA'$. E szerint az a pontsornak és az a tengelyű síksornak a tételben előírt vonatkozása az a és a' közti projektív vonatkozásnak s az a' egyenes a-ról való vetítésének a szorzata.

74.7. Legyen p, p', p'' három tetszőleges, páronkint torz egyenes, és q, q', q'' ezeknek három közös tranzverzálisa. A q, q', q'' egyenesek is páronkint torz helyzetűek, s ezeknek bármely p_1 tranzverzálisa metszi a p, p', p'' egyenesek bármely q_1 tranzverzálisát (**6**.2). Ha p és p' két torz egyenes, s ha ezek között meg van adva egy projektív leképezés (mely a **6**.1 tétel szerint perspektív), akkor a megfelelő pontokat összekötő egyenesek egy (q) vonalsereget, s ezeknek közös tranzverzálisai egy, a p és p' egyeneseket tartalmazó (p) vonalsereget alkotnak. Ezeknek a vonalseregeknek a fentiek szerint hasonló a szerkezete, mint egy másodrendű vonalfelület két alkotóseregének; megmutatjuk, hogy ezek valóban egy másodrendű vonalfelületnek két alkotóseregét alkotják.

Legyen Σ a p és p' egymáshoz torz helyzetű egyenesek tetszőleges projektív vonatkozása; P, Q, R a p egyenes három tetszőleges pontja, P', Q', R' az ezeknek a p' egyenesen megfelelő pontok. Felveszünk egy tetszőleges $\mathfrak{F}$ másodrendű vonalfelületet, s ennek két, az (a) alkotósereghez tartozó a és a' alkotóját; a (b) alkotósereg három tetszőleges egyenesével való metszéspontjukat jelöljük A, B, C-vel és A', B', C'-vel. A **45**.12 tétel szerint van a térnek olyan **T** kollineációja, mely az A, B, C pontot P, Q, R-be, s az A', B', C' pontot P', Q', R'-be viszi át. Az a és a' közti projektív vonatkozás, melyet a (b) alkotósereg származtat, a **T** leképezésnél a p és p' egyenes közti Σ projektív vonatkozásba, s ezért a (b) sereg minden egyenese olyan q egyenesbe megy át, mely p és p' egy-egy Σ-nál megfelelő pontját köti össze. Az $\mathfrak{F}$ felület képe **T**-nél egy $\mathfrak{F}'$ másodrendű vonalfelület (**72**.3); ennek alkotói a (q) sereg egyenesei, valamint ezek közös (p) tranzverzálisai. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételeket:

74.8. Tétel. *Ha a p és p' torz egyeneseknek meg van adva egy tetszőleges Σ projektív vonatkozása, a megfelelő pontokat összekötő egyenesek egy másodrendű vonalfelület egyik alkotóseregének az elemei.*

74.9. Tétel. *Bármely két másodrendű vonalfelület aequivalens egymással a projektív csoport szerint, azaz átvihető egymásba a tér valamely kollineációjával.*

A **74**.8 tételnek a dualitás elve szerint megfelel a következő:

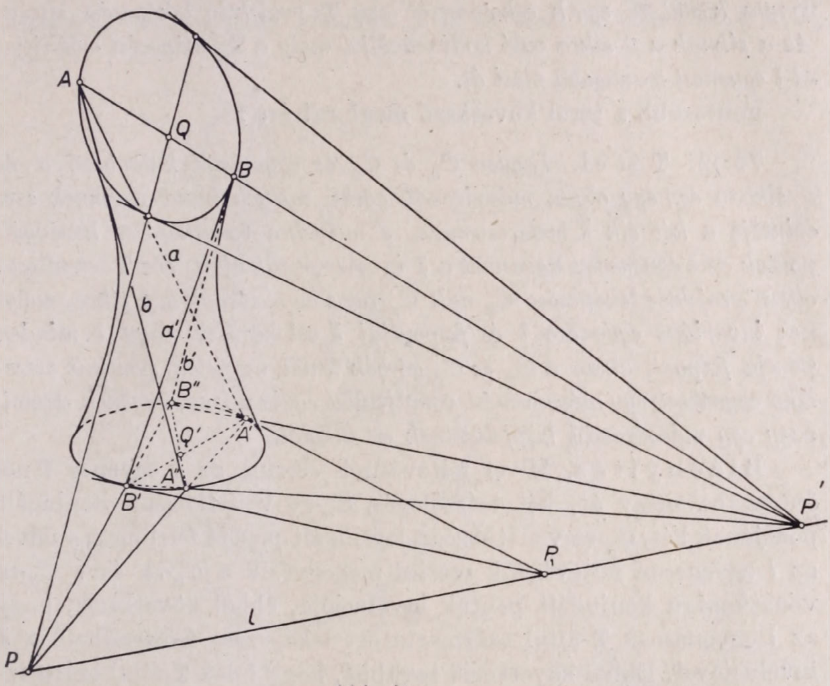
74.10. Tétel. *Ha p és p' torz egyenesek, s ha meg van adva a p és a p' tengelyű síksor között egy tetszőleges projektív vonatkozás, akkor a megfelelő síkok metszésvonalai egy másodrendű vonalfelület egyik alkotóseregének az elemei.*

Bizonyítás. A két síksor megadott projektív vonatkozásának megfelel a p és a p' pontsornak egy projektív vonatkozása, ha az első síksor bármely elemének p'-vel való P' metszéspontját s a másik síksor megfelelő elemének p-vel való P metszéspontját egymásnak feleltetjük meg. A két megfelelő sík metszésvonala a PP' egyenes.

A **74**.8 tétel módot ad a másodrendű vonalfelületeknek *fonálmodell*el való, ismert előállítására. Egy másik fajta fonálmodell szerkesztését készíti elő a következő tárgyalás.

Legyen α és β két különböző sík, mely az $\mathcal{F}$ másodrendű vonalfelületet a $\mathcal{C}_\alpha$ és a $\mathcal{C}_\beta$ másodrendű görbében metszi, s legyen l a két sík metszésvonala. Az $\mathcal{F}$ felület egyik alkotóserege, például (a) egy projektív vonatkozást létesít a $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ görbék között; ugyanis a (b) alkotósereg egy tetszőleges b egyenese és $\mathcal{C}_\alpha$ között, s hasonlóan b és $\mathcal{C}_\beta$ között az (a) egyenesek, mint vetítősugarak, egy-egy projektív vonatkozást létesítenek, mivel harmonikus pontnégyesek egymásnak felelnek meg; tehát a $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ görbék között az (a) alkotók által származtatott vonatkozás ugyancsak projektív (**66**.1). A két görbének ez a projektív leképezése előállítható az α síknak a β síkra való **T** kollineációjával (**64**.3). Megmutatjuk, hogy **T**-nél az α, β síkok l metszésvonala önmagába megy át. Ez az állítás nyilvánvaló, ha l metszője vagy érintője $\mathcal{F}$-nek; tegyük fel, hogy l nem metszője $\mathcal{F}$-nek.

Jelöljük l'-vel l-nek $\mathcal{F}$-re vonatkozó polárisát; az l egyenesnek a $\mathcal{C}_\alpha$ és a $\mathcal{C}_\beta$ görbére vonatkozó Q és Q' pólusa az l' egyenesnek az α, illetve a β síkkal való metszéspontja. Ha P az l egyenes tetszőleges pontja, a $\mathcal{C}_\alpha$ görbére vonatkozó polárisa átmegy a Q ponton s $\mathcal{C}_\alpha$-t két, A és B pontban metszi. Az A, illetve a B ponton átmenő alkotókat jelöljük a, b-vel és a', b'-vel; legyen A', A'' az a, b alkotóknak, B', B'' az a', b' alkotóknak a β síkkal való metszéspontja; ezek a pontok a $\mathcal{C}_\beta$ görbéhez tartoznak (114. ábra). Az A, A', A'', P pontok az A ponthoz tartozó érintősíkban, B, B', B'', P a B ponthoz tartozó érintősíkban feküsznek. Az l egyenesnek egy és csak egy P' pontja konjugált P-hez az $\mathcal{F}$ felületre vonatkozóan ; P és P' mint az α és a β sík pontja konjugált egymáshoz a $\mathcal{C}_\alpha$ és a $\mathcal{C}_\beta$ görbére vonatkozóan is. Az $a=AA'$ és $b'=BB''$ alkotók nem tartoznak egy alkotósereghez, s ezért egy síkban feküsznek ; ez a sík tartalmazza az AB egyenesnek l-lel való metszéspontját, mely a P pontnak $\mathcal{C}_\alpha$-ra vonat-



114. ábra.

kozó P' konjugáltja ; ebből következik, hogy az ab' síknak β-val való $A'B''$ metszésvonala is átmegy a P' ponton, s hasonlóan az $A''B'$ egyenes is. A $\mathcal{C}_\beta$ görbe $A'A''B'B''$ húrnégyszögének két átlóspontja P és P', harmadik átlóspontja az $l=PP'$ egyenesnek $\mathcal{C}_\beta$-ra vonatkozó Q' pólusa (**60**.1) ; e szerint Q' az $A'B'$ és $A''B''$ egyenesek metszéspontja. Az $A'B'$ egyenes $\mathcal{C}_\beta$-ra vonatkozó pólusa, vagyis az A'-ben és B'-ben $\mathcal{C}_\beta$-hoz húzott érintők P_1 metszéspontja az l egyeneshez tartozik A $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ görbék között az (a) alkotósereg által létesített **T** projektív leképezésnél az A, B pontoknak az A', B' pontok, az AB egyenesnek az $A'B'$ egyenes, s ezért az AB egyenes $\mathcal{C}_\alpha$-ra vonatkozó P pólusának az $A'B'$ egyenes $\mathcal{C}_\beta$-ra vonatkozó P_1 pólusa felel meg. Mivel P az l egyenes tetszőleges pontja, ez azt jelenti, hogy a **T** kollineációnál az l egyenes önmagába megy át.

A levezetett eredményt a következő tételben mondjuk ki:

74.11. Tétel. *Ha az l egyenes nem alkotója az $\mathcal{F}$ másodrendű vonalfelületnek, akkor két tetszőleges, l-en átmenő s az $\mathcal{F}$ felületet egy-egy $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ másodrendű görbében metsző α és β síknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonala között $\mathcal{F}$ egyik alkotóserege egy* **T** *projektív leképezést létesít. Az α síknak a β síkra való kollineációja, mely a* **T** *leképezést előállítja, az l egyenest önmagába viszi át.*

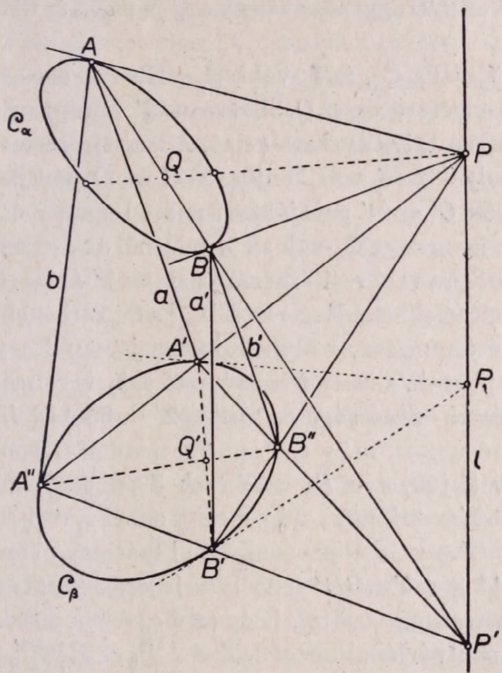
Fontosabb a tétel következő megfordítása:

74.12. Tétel. *Legyen $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ az egymástól különböző α és β síkban egy-egy olyan másodrendű görbe, melyek közül egyiknek sem érintője a két sík l metszésvonala, s melyekre vonatkozóan konjugált pontok az l egyenesen ugyanazt a* **J** *involuciót alkotják. Ha* **T** *tetszőleges olyan projektív leképezése $\mathcal{C}_\alpha$-nak $\mathcal{C}_\beta$-ra, s az α síknak a β síkra, melynek invariáns egyenese l és fixpontjai* **J** *vel közösek, vagy l minden pontja fixpont, akkor a $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ görbék* **T***-nél megfelelő pontjait összekötő egyenesek egy másodrendű vonalfelület egyik alkotóseregének elemei, vagy egy másodrendű kúpfelületnek az alkotói.*

Bizonyítás. Mivel feltevésünk szerint az l egyenes **T**-nél önmagába megy át, két tetszőleges, $\mathcal{C}_\alpha$-ra vonatkozóan konjugált pontjának két, $\mathcal{C}_\beta$-ra vonatkozóan konjugált pontja felel meg, s mivel az l egyenesen feltevésünk szerint megegyezik a $\mathcal{C}_\alpha$-ra és a $\mathcal{C}_\beta$-ra vonatkozóan konjugált pontok involuciója, ebből következik, hogy az l egyenesnek **T** által származtatott leképezése felcserélhető a **J** involucióval. Ebből következik továbbá, hogy l-nek **T** által származtatott leképezése egy, a **J** involució által egyértelműen meghatározott **G** kommutatív csoporthoz tartozik, mely az l egyenesen, az esetleges fixpontok kivételével, egyszeresen tranzitív (**15**.6 és **17**.10, 11).

Ha **T** az l egyenesen az azonos leképezés, akkor az α és β síkok **T** vonatkozása perspektív (**26**.2); legyen O ennek középpontja. Az O pontból való vetítésnél a $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ görbe egymásnak felel meg, a két görbének **T**-nél megfelelő pontjait összekötő egyenesek egy másodrendű kúpfelületnek az alkotói, melynek csúcsa az O pont. (Ha $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ metszi az l egyenest, s l-nek a metszéspontok által meghatározott egyik szakasza az egyik görbe belsejében, s a másik görbe külsejében fekszik, akkor nincs $\mathcal{C}_\alpha$-nak $\mathcal{C}_\beta$-ra olyan projektív leképezése, mely az l egyenesen az azonosság; más esetben van; l. **70**.4).

Tegyük fel, hogy **T** az l egyenesen az azonosságtól különbözik; **T**-nek egyedüli fixpontjai l-nek a $\mathcal{C}_\alpha$ (és $\mathcal{C}_\beta$) görbével való (esetleges) metszéspontjai; tehát l-nek bármely olyan pontja, mely nem tartozik $\mathcal{C}_\alpha$-hoz, egy tőle különböző pontba megy át. Jelöljük Q-val és Q'-vel az l egyenesnek $\mathcal{C}_\alpha$-ra és $\mathcal{C}_\beta$-ra vonatkozó pólusát (115. ábra); mivel l invariáns **T**-nél, a Q pont képe Q'. Felveszünk egy tetszőleges, a Q ponton átmenő, azaz l-hez $\mathcal{C}_\alpha$-ra vonatkozóan konjugált egyenest, amely $\mathcal{C}_\alpha$-nak metszője. Legyen A és B ennek az egyenesnek a $\mathcal{C}_\alpha$



115. ábra.

görbével való két metszéspontja, és A', B' ezeknek **T**-nél származó képe; az $A'B'$ egyenes átmegy a Q' ponton. Az AB egyenes $\mathcal{C}_\alpha$-ra vonatkozó P pólusának **T**-nél az $A'B'$ egyenesnek $\mathcal{C}_\beta$-ra vonatkozó P_1 pólusa felel meg. Mivel P_1 különbözik P-től, tehát PA' és PB' a $\mathcal{C}_\beta$ görbének metszői; $\mathcal{C}_\beta$-val való másik metszésponjuk legyen A'' és B''. A $\mathcal{C}_\beta$ görbe $A'A''B'B''$ húrnégyszögének egyik átlóspontja P; ennek $\mathcal{C}_\beta$-ra vonatkozó polárisa átmegy a Q' ponton, s ugyancsak a négyszög másik két átlóspontján (**60**.1). E szerint az $A'B'$ egyenesnek s P polárisának Q' metszéspontja az $A'A''B'B''$ húrnégyszögnek átlóspontja, tehát *az $A''B''$ egyenes is átmegy a Q' ponton.* A négyszög harmadik átlóspontja, az $A''B'$ és $A'B''$ egyenesek metszéspontja az AB és l egyenesek P' metszéspontjával egybeesik.

Legyen P_0 és P_0' az l egyenes két tetszőleges, a $\mathbf{J}$ involuciónál egymásnak megfelelő pontja; mivel ezek a $\mathcal{C}_\alpha$ és a $\mathcal{C}_\beta$ görbére vonatkozóan konjugáltak, tehát a **60**.5 tétel szerint a P_0A és $P_0'B$, s a $P_0'A$ és P_0B egyenespárok C és D metszéspontja a $\mathcal{C}_\alpha$ görbén, s a P_0A'' és $P_0'B''$, valamint a $P_0'A''$ és P_0B'' egyenespárok C' és D' metszéspontja a $\mathcal{C}_\beta$ görbén fekszik. A CD egyenes átmegy a Q ponton, és $C'D'$ a Q' ponton (**60**.1).

Jelöljük $\mathbf{J}_\alpha$-val a $\mathcal{C}_\alpha$, és $\mathbf{J}_\beta$-val a $\mathcal{C}_\beta$ görbének azt az involucióját, melyet az l tengelyre és a Q, illetve a Q' középpontra vonatkozó harmonikus perspektivitás származtat. A fentiek szerint a $\mathbf{T}$ leképezés $\mathcal{C}_\alpha$-nak bármely két, $\mathbf{J}_\alpha$-nál konjugált C és D pontját $\mathcal{C}_\beta$-nak két, $\mathbf{J}_\beta$-nál konjugált C' és D' pontjába viszi át. Ugyanez érvényes arra a $\mathbf{T}'$ leképezésre is, melyet $\mathcal{C}_\alpha$-nak az A pontból az l egyenesre, s ennek az A'' pontból $\mathcal{C}_\beta$-ra való vetítése származtat, s $\mathbf{T}'$-nél is A-nak és B-nek az A' és B' pont felel meg. E szerint $\mathbf{T}'\mathbf{T}^{-1}$ a $\mathcal{C}_\alpha$ görbének olyan projektív leképezése önmagára, melynek fixpontjai az l egyeneshez nem tartozó A, B pontok, s mely felcserélhető a $\mathbf{J}_\alpha$ involucióval; a $\mathbf{T}'\mathbf{T}^{-1}$ leképezés tehát az azonosság, vagyis $\mathbf{T}=\mathbf{T}'$ (l. **65**.11). A $\mathbf{T}=\mathbf{T}'$ leképezés előállítható úgy is, hogy a $\mathcal{C}_\alpha$ görbe minden C pontját A-ból az l egyenesre vetítjük, s *a P_0 vetületnek $\mathbf{J}$-nél megfelelő P_0' képpontot B''-ből a $\mathcal{C}_\beta$ görbére vetítjük;* a P_0' pontnak ennél a vetítésnél a $\mathcal{C}_\beta$ görbén megfelelő C' pont a C pontnak $\mathbf{T}$-nél származó képe.

A $b=AA''$ és a $b'=BB''$ tengelyű síksorok között egy projektív vonatkozást létesítünk azáltal, hogy az l egyenes minden, $\mathbf{J}$-nél konjugált P_0, P_0' pontpárjának megfelelő $AA''P_0$ és $BB''P_0'$ síkot egymásnak feleltetjük meg. Mivel b és b' egymáshoz torz helyzetű egyenesek, a két síksor megfelelő elemeinek metszésvonalai egy $\mathcal{F}$ másodrendű vonalfelületet alkotnak (**74**.10). Két megfelelő sík metszésvonalához tartozik a P_0A egyenesnek $\mathcal{C}_\alpha$-val való C metszéspontja, s a $P_0'B''$ egyenesnek $\mathcal{C}_\beta$-val való C' metszéspontja, melyek $\mathbf{T}$-nél egymásnak felelnek meg, Tehát a $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ görbék $\mathbf{T}$-nél megfelelő pontjait összekötő egyenesek az $\mathcal{F}$ felületnek alkotói.

Ezzel bebizonyítottuk a **74**.12 tételt; a bizonyításból azonban még több is adódik. Jelöljük $\mathbf{G}_\alpha$-val a $\mathcal{C}_\alpha$ görbe amaz önmagára való projektív leképezéseinek a csoportját, melyeknek kollineációs tengelye (és kollineációs középpontja Q); ezek $\mathcal{C}_\alpha$-nak a $\mathbf{J}_\alpha$ involucióval felcserélhető leképezései. A $\mathbf{G}_\alpha$ csoport kommutatív, s a $\mathcal{C}_\alpha$ görbén a fixpontok kivételével egyszeresen tranzitív (**65**.11). Az l kollineációs tengelyen a $\mathbf{G}_\alpha$ csoport leképezései által származtatott $\mathbf{G}$ csoport $\mathbf{G}_\alpha$-nak (1, 2)-értelműen felel meg, mivel a $\mathbf{G}_\alpha$ csoport bármely $\mathbf{S}$ eleme, s ennek $\mathbf{J}_\alpha$ -val való $\mathbf{SJ}_\alpha$ szorzata az l egyenesen ugyanazt a leképezést származtatja (l. **65**.14). — Ha van $\mathcal{C}_\alpha$-nak $\mathcal{C}_\beta$-ra egy olyan $\mathbf{T}_0$ projektív leképezése, mely az l egyenesen az azonos leképezést származtatja, akkor $\mathbf{J}_\alpha\mathbf{T}_0$ is az azonos leképezést származtatja l-en ; a $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ görbének $\mathbf{T}_0$-nál és $\mathbf{J}_\alpha\mathbf{T}_0$-nál megfelelő pontjait összekötő egyenesek két különböző kúpfelületet alkotnak, ezeknek csúcsa a QQ' egyenesen fekszik, s harmonikusan választja el egymástól Q-t és Q'-t. Ha $\mathbf{S}$ a $\mathbf{G}_\alpha$ csoport változó eleme, akkor az $\mathbf{ST}_0$ leképezésnél megfelelő pontokat összekötő egyenesek egy $\mathbf{S}$-sel változó másodrendű vonalfelületet alkotnak. Ennek az eredménynek szemléltetésére tegyük fel, hogy $\mathcal{C}_\alpha$-nak nincs l-lel közös pontja ; ekkor a $\mathbf{G}_\alpha$ csoport elemei elliptikus leképezések (mint a kör forgásai). A $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ görbének $\mathbf{T}_0$-nál megfelelő pontjait összekötjük egyenesekkel, a $\mathcal{C}_\beta$ görbét rögzítjük, s a $\mathcal{C}_\alpha$ görbét leképezzük önmagára a $\mathbf{G}_\alpha$ csoport leképezéseivel, s vele visszük az összekötő egyeneseket ; ilyen módon másodrendű vonalfelületeknek egy sorozatát kapjuk, melyben két kúpfelület is van. Ez az elméleti alapja az egypalástú hiperboloidok ismert *forgatható fonálmodell*jének (l. 348. o.).

Megemlítjük, hogy a **74**.12 tétel érvényes még abban az esetben is, *ha a $\mathcal{C}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\beta$ görbének közös érintője a két sík l metszésvonala, s ezen közös az A érintési pontjuk;* ebben az esetben a két görbe közti $\mathbf{T}$ projektív vonatkozásról, illetve a két görbe síkjának általa származtatott kollineációjáról fel kell tenni, hogy az l egyenest s az A pontot önmagába viszi át, s hogy $\mathbf{T}$-*nek vagy nincs az l egyenesen A-n kívül más fixpontja, vagy l minden pontja fixpont.*

75. §. Másodrendű vonalfelületek az affin és az euklidesi térben.

A másodrendű vonalfelületeknek az *affin geometria* szempontjából való osztályozása két különböző típusra vezet : ha az υ végtelen távoli sík az $\mathcal{F}$ másodrendű vonalfelületet egy egyenespárban metszi (azaz, ha υ érintősíkja $\mathcal{F}$-nek), akkor $\mathcal{F}$-et *hiperbolikus paraboloid*nak, ha pedig $\mathcal{F}$ és υ metszésvonala egy (nem elfajult) másodrendű görbe, akkor *egypalástú hiperboloid*nak nevezzük.

Ha az a és a_1 torz egyenesek között meg van adva egy projektív vonatkozás, a megfelelő pontokat összekötő egyenesek a **74**.8 tétel szerint egy $\mathcal{F}$ másodrendű vonalfelületet alkotnak. Ha az a és a_1 egyenesek végtelen távoli pontja egymásnak felel meg, akkor az ezeket összekötő egyenes $\mathcal{F}$-nek végtelen távoli alkotója, s $\mathcal{F}$ hiperbolikus paraboloid. Ha a és a_1 végtelen távoli pontja nem egymásnak felel meg, akkor $\mathcal{F}$ egypalástú hiperboloid.

75.1. Tétel. *Bármely két hiperbolikus paraboloid, s bármely két egypalástú hiperboloid aequivalens egymással az affin csoport szerint.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ két másodrendű vonalfelület, mégpedig mindkettő paraboloid, vagy mindkettő hiperboloid. Felveszünk $\mathcal{F}$-en és $\mathcal{F}'$-n két-két ugyanahhoz a sereghez tartozó a, a_1 és a', a_1' alkotót, továbbá a-n és a'-n három-három A, B, C és A', B', C' pontot; az ezeken a pontokon átmenő, s a másik alkotósereghez tartozó alkotóknak a_1-gyel, illetve a_1'-vel való metszéspontját jelöljük A_1, B_1, C_1-gyel és A_1', B_1', C_1'-vel; legyen végül E és E' az AA_1 és az $A'A_1'$ egyenes végtelen távoli pontja. Ha $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ paraboloid, akkor jelentse C és C' az a és az a' egyenes végtelen távoli pontját; ebben az esetben C_1 és C_1' is végtelen távoli pont. Ha $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ hiperboloid, akkor jelentse ismét C és C' az a és az a' egyenes végtelen távoli pontját, B és B' pedig ugyanezeknek az egyeneseknek azt a pontját, amelynek megfelelő B_1 és B_1' pont az a_1, illetve az a_1' egyenes végtelen távoli pontja. A **45**.12 tétel szerint van a térnek egy és csak egy olyan **T** kollineációja, mely az $A, B, C, A_1, B_1, C_1, E$ pontnak rendre az $A', B', C', A_1', B_1', C_1', E'$ pontot felelteti meg; mivel **T**-nél három, nem egy egyenesen fekvő végtelen távoli pont (C, C_1, E, illetve C, B_1, E) három végtelen távoli pontba megy át, **T** affin leképezés, mely az $\mathcal{F}$ felületet $\mathcal{F}'$-be viszi át.

75.2. Az *egypalástú hiperboloid középpontján* értjük a végtelen távoli síknak a felületre vonatkozó O pólusát; ez egy végesben fekvő pont. *Átmérősík*oknak nevezzük a végtelen távoli pontok polársíkjait, vagyis az O középponton átmenő síkokat. Az O középpontot az $\mathcal{F}$ hiperboloid s az υ végtelen távoli sík $\mathcal{C}$ metszésvonalával összekötő egyenesek egy másodrendű kúpfelületnek az alkotói, melyet $\mathcal{F}$ *aszimptotikus kúpfelületé*nek nevezünk. Ennek érintősíkjai $\mathcal{F}$-nek a $\mathcal{C}$ görbe pontjaihoz tartozó érintősíkjai; ezek közül mindegyik a két alkotósereg egy-egy alkotójában metszi $\mathcal{F}$-et. Tehát az aszimptotikus kúpfelület minden alkotójának megfelel $\mathcal{F}$ két alkotóserege közül mindegyikben egy és csak egy olyan alkotó, mely a kúpfelület alkotójával párhuzamos.

Az $\mathcal{F}$ egypalástú hiperboloidot egy tetszőleges α sík, mely nem érintősíkja $\mathcal{F}$-nek, ellipszisben, hiperbolában, vagy parabolában metszi, a szerint, hogy α-nak végtelen távoli u egyenese nem metszi, metszi, vagy érinti $\mathcal{F}$-nek végtelen távoli $\mathcal{C}$ görbéjét. Az O középponton átmenő síkok, melyeknek végtelen távoli egyenese $\mathcal{C}$-t érinti, érintősíjkai $\mathcal{F}$-nek, mint láttuk. E szerint az O középponton átmenő síkok, melyek nem érintősíkjai $\mathcal{F}$-nek, az $\mathcal{F}$ felületet ellipszisben vagy hiperbolában metszik.

Az $\mathcal{F}$ egypalástú hiperboloid *átmérőin* értjük az O középponton átmenő egyeneseket, vagyis a végtelen távoli egyenesek polárisait. Egy átmérőt s a konjugált végtelen távoli egyenesen átmenő átmérősíkot egymáshoz *konjugált*nak nevezünk. Két átmérőt konjugáltnak nevezünk, ha az egyik a másikhoz konjugált átmérősíkban fekszik (és megfordítva). Két átmérősíkot konjugáltnak nevezünk, ha az egyik tartalmazza a másikhoz konjugált átmérőt (és megfordítva). Az O középpontú nyalábban a konjugált elemek vonatkozása megfelel az υ végtelen távoli síkban a $\mathcal{C}$ görbére nézve konjugált elemek vonatkozásának, s abból az O középpontú vetítéssel származik. Ha p és p' két konjugált átmérő, s p'' a pp' síkhoz konjugált átmérő, akkor p, p', p'' három, páronkint konjugált átmérője $\mathcal{F}$-nek, és a rajtuk átmenő három átmérősík is páronkint konjugált. A p, p', p'' egyenesek végtelen távoli pontjai egy $\mathcal{C}$-re vonatkozó poláris háromszögnek a csúcsai; a poláris háromszögnek két oldala metszi, a harmadik nem metszi $\mathcal{C}$-t (**59**.8). A p, p', p'' egyenesek közül kettőn-kettőn átfektetett sík s a végtelen távoli sík poláris tetraédert alkot az $\mathcal{F}$ felületre vonatkozóan. Ebből adódik a következő tétel:

75.3. Tétel. *Ha p, p', p'' az egypalástú hiperboloid három tetszőleges, páronkint konjugált átmérője, a rajtuk átmenő síkok közül kettő hiperbolában, a harmadik ellipszisben metszi a felületet. A három átmérő közül kettő metszi, a harmadik nem metszi a felületet.*

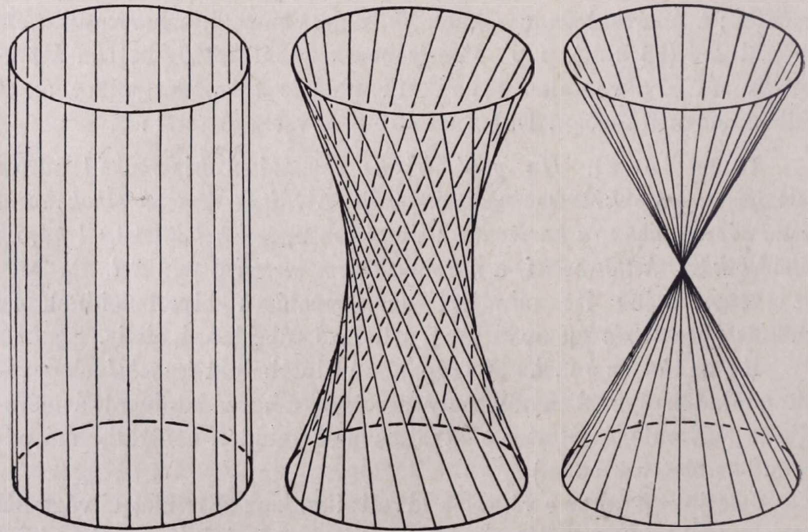
Megemlítjük itt mindjárt az egypalástú hiperboloidnak az *euklidesi geometria* szempontjából jellemző tulajdonságait is.

Értelmezés. Az $\mathcal{F}$ egypalástú hiperboloid *tengelyé*nek nevezünk minden olyan átmérőt, mely merőleges a hozzá konjugált átmérősíkra. (Hasonló értelmezést alkalmazunk minden centrális másodrendű felület esetében.)

Jelöljük Ω-val az υ végtelen távoli síknak az $\mathcal{F}$ felület $\mathcal{C}$ végtelen távoli görbéjére vonatkozó, hiperbolikus polaritását, s Ω_0-val az abszolut polaritást, mely minden egyenesnek a rá merőleges síkokat, illetve ezek végtelen távoli elemét felelteti meg egymásnak. Mivel az Ω_0 polaritás elliptikus, a két polaritás $\Omega.\Omega_0=\mathbf{T}$ szorzata a **36**.3 tétel szerint vagy általános perspektivitás, vagy I típusú (három fixponttal bíró) kollineációja az υ síknak önmagára. Az első esetben az $\mathfrak{F}$ felület tengelyei az O középpontot a perspektivitás X középpontjával összekötő OX egyenes, továbbá az O-t a perspektivitás tengelyének bármely pontjával összekötő egyenes; az utóbbiak valamennyien merőlegesek OX-re. Ebben az esetben minden, az OX-re merőleges sík $\mathfrak{F}$-et egy körben metszi; az $\mathfrak{F}$ felületet *egypalástú forgási hiperboloid*nak nevezzük. — A második esetben az υ sík $\mathbf{T}=\Omega.\Omega_0$ kollineációjának fixpontjai legyenek X, Y, Z; az OX, OY, OZ egyenesek páronkint merőlegesek egymásra, ezek az $\mathfrak{F}$ felület tengelyei.

75.4. Tétel. *Egy egypalástú hiperboloidnak egy és csak egy olyan tengelye van, mely nem metszi a felületet. Ezenkívül a felületnek vagy két meghatározott, az előbbire s egymásra merőleges tengelye van, vagy pedig az első tengelyre merőleges valamennyi átmérője tengelye a felületnek, ebben az esetben a felület egypalástú forgási hiperboloid.*

A **74**.12. tétel szerint az egypalástú hiperboloidokat előállíthatjuk a következő *forgatható fonálmodell*el. Felveszünk két $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}'$ kört, melyeknek síkja párhuzamos; a középpontjukat összekötő



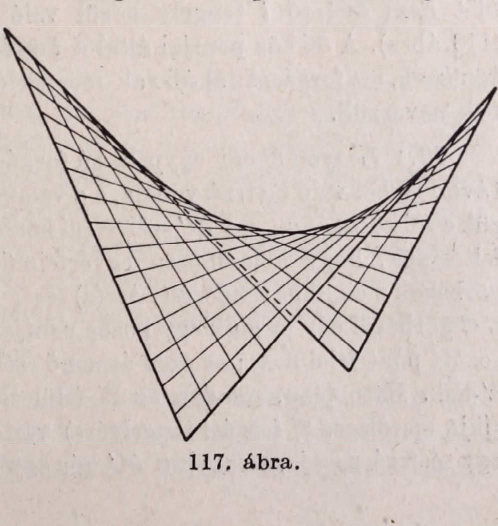
116. ábra.

egyenesen van két olyan O és O' pont, melyekre vonatkozóan $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}'$ perspektívek ; ezek közül az egyik, például O' a két kör középpontját összekötő (végesben fekvő) szakasznak a pontja, a másik e szakaszon kívül fekszik. Az O ponton átmenő egyenesekkel összekötjük $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}'$ pontjait, s az egyik kört változatlanul tartva, a másik kört önmagában elforgatjuk. A vele együtt elmozdított egyenesek egy egypalástú hiperboloid egyik alkotóseregének elemei ; félforgás után azt a kúpfelületet kapjuk, mely a két kört az O' pontból vetíti. Ha az OO' egyenes merőleges a körök síkjára, akkor az így nyert hiperboloidok forgási felületek (l. 116. ábra).

75.5. A *hiperbolikus paraboloid*nak két végtelen távoli alkotóját jelöljük a_1-gyel és b_1-gyel ; az (a) alkotóseregnek minden eleme metszi a b_1 végtelen távoli egyenest, vagyis *az egy sereghez tartozó alkotók valamennyien egy síkkal párhuzamosak.* Megfordítva, ez a tulajdonsága jellemzi a paraboloidot ; ha ugyanis az $\mathcal{F}$ másodrendű vonalfelületnek az (a) sereghez tartozó három a, a', a'' alkotója párhuzamos a β síkkal, akkor β végtelen távoli b_1 egyenese közös tranzverzálisa a, a', a''-nek s ezért a (b) alkotóseregnek eleme. Mivel $\mathcal{F}$-nek van egy végtelen távoli b_1 alkotója, az értelmezés szerint $\mathcal{F}$ hiperbolikus paraboloid. Ebből adódik a hiperbolikus paraboloidok következő meghatározása :

75.6. Tétel. *Ha a, a', a'' három, páronkint torz, és egy síkkal párhuzamos egyenes, ezek közös tranzverzálisai egy hiperbolikus paraboloid egyik alkotóseregének elemei* (117. ábra).

Az *euklidesi térben* fekvő $\mathcal{F}$ hiperbolikus paraboloid végtelen távoli a_1, b_1 alkotóinak metszéspontját jelöljük X-szel, s ennek az Ω_0 abszolút polaritásnál megfelelő polárisát u-val. Az u egyenesen van egy és csak egy olyan Y, Z pontpár, mely Ω_0-nál konjugált, s harmonikusan választja el egymástól az u egyenesnek a_1-gyel és b_1-gyel való metszéspontjait (**16**.5 tétel). Mivel u metszője $\mathcal{F}$-nek, átmegy

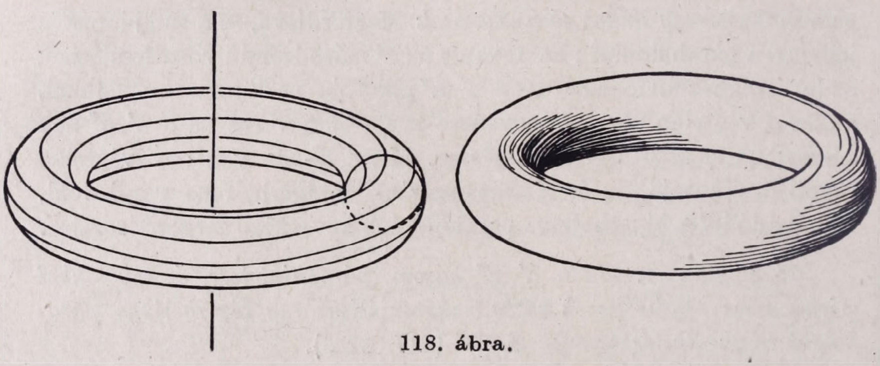


117. ábra.

rajta $\mathcal{F}$-nek két érintősíkja (l. **74**.4) ; ezek közül az egyik a végtelen távoli sík ; a másiknak $\mathcal{F}$-en fekvő érintési pontját jelöljük O-val ; ezt a pontot az $\mathcal{F}$ felület *csúcsá*nak nevezzük. Az OXY és OXZ síkok parabolában metszik $\mathcal{F}$-et, melyek az OYZ sík különböző oldalán feküsznek. Az OYZ síknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonala egyenespár ; az OYZ síkkal párhuzamos síkok $\mathcal{F}$-et hiperbolákban metszik, melyeknek tengelyei párhuzamosak OY-nal és OZ-vel.

76. §. A másodrendű vonalfelületek szerkezetéről.

A projektív térben fekvő másodrendű vonalfelületek, szerkezetüket tekintve aequivalensek az euklidesi térben fekvő *gyűrűfelület*tel, vagy *torus*szal, melyet egy $\mathcal{K}$ körnek valamely, síkjában fekvő, de

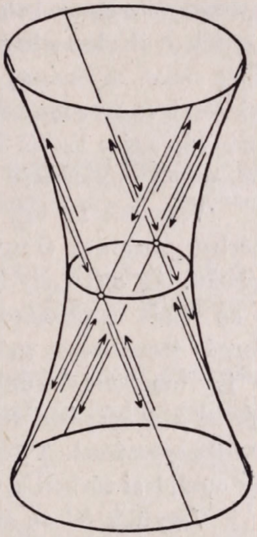


118. ábra.

$\mathcal{K}$-t nem metsző l tengely körül való forgásával származtatunk (118. ábra). A $\mathcal{K}$ kör pontjai által a forgásnál leírt köröket *szélességi körök*nek, s a forgásoknál $\mathcal{K}$-nak megfelelő köröket *hosszúsági körök*nek nevezzük.

76.1. Legyen $\mathcal{F}$ egy egypalástú forgási hiperboloid, $\mathcal{C}$ a végtelen távoli síkkal való metszésvonala, s a valamelyik alkotója. $\mathcal{C}$-t leképezzük a $\mathcal{K}$ körre és a-t egy $\mathcal{K}'$ szélességi körre ; ezekről a leképezésekről feltesszük, hogy kölcsönösen egyértelműek s megtartják az illető görbéken a ciklikus rendezést. Az (a) sereg bármely a' alkotójának van a $\mathcal{C}$ görbével egy és csak egy közös pontja, ennek $\mathcal{K}$-n egy meghatározott pont felel meg ; az ezen átmenő szélességi kört feleltetjük meg a'-nek. Hasonlóan, minden az $\mathcal{F}$ felületen fekvő körnek (melynek síkja merőleges $\mathcal{F}$ forgási tengelyére) van az a alkotóval egy és csak egy metszéspontja, s ennek a $\mathcal{K}'$ kör egy meghatározott pontja felel meg; az ezen a ponton átmenő hosszúsági kört feleltetjük meg a hiperboloidon felvett körnek. Az $\mathcal{F}$ felület körmetszeteinek s (a) alkotóinak a torus hosszúsági és szélességi köreire való leképezése az $\mathcal{F}$ felület és a torus pontjai között kölcsönösen egyértelmű vonatkozást létesít, mely megtartja a két-két görbesereg által ezeken a felületeken értelmezett kettős rendezést.

76.2. A másodrendű vonalfelület és a torus szerkezeti megegyezéséből következik, hogy miként a torus, *minden másodrendű vonalfelület is irányítható;* ez azt jelenti, hogy ha az $\mathcal{F}$ másodrendű vonalfelületet például az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ és $b_1, b_2, \ldots, b_m$ alkotókkal felosztjuk olyan részekre, melyek közül szerkezete tekintetében mindegyik egy parallelogrammával aequivalens, akkor ezek közül mindegyiknek meghatározhatjuk egy-egy olyan irányítását, hogy bármely két szomszédos rész közös határvonalának az a két iránya, melyet az egyik és a másik rész meghatározott irányítása értelmez, egymással ellenkező (l. az euklidesi sík irányításának hasonló értelmezését, első kötet 122. o.). Ha például egy egypalástú forgási hiperboloid egyik körmetszetén két átellenes A és A' ponthoz tartozó a, b és a', b' alkotókkal felosztjuk a hiperboloidot négy parallelogrammára, ezek a 119. ábrán jelzett módon irányíthatók úgy, hogy bármely két szomszédos rész irányítása a közös határvonalnak egymással ellenkező irányítását határozza meg.



119. ábra.

Az euklidesi térben fekvő, vagyis végtelen távoli pontjaiktól megfosztott, másodrendű vonalfelületek különböző típusúak: az egypalástú hiperboloid a hengerfelülettel, s a hiperbolikus paraboloid a síkkal aequivalens, szerkezetét tekintve. A két típussal szerkezetileg megegyező felületet a torusból úgy kapunk, hogy az első esetben egy szélességi köre, a második esetben egy szélességi és egy hosszúsági köre mentén felvágjuk.

76.3. *A projektív térnek egy másodrendű vonalfelület által való kettéosztását* is könnyen szemléltethetjük az euklidesi tér közvetítésével. A projektív térben egy $\mathcal{F}$ másodrendű vonalfelületre vonatkozóan minden, $\mathcal{F}$-hez nem tartozó pont *külső pont,* azaz $\mathcal{F}$ valamelyik érintőjén fekszik ; ilyen módon nem osztályozhatjuk a projektív tér pontjait $\mathcal{F}$-re vonatkozó helyzetük szerint. Az euklidesi térben fekvő egypalástú hiperboloid a teret két részre osztja fel ; alkalmazzuk ugyanis az **59**.17 tételt azokra a síkokra, melyek a felületet nem metsző tengelyen mennek át, illetve a nevezett síkoknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonalára. Az euklidesi térben az $\mathcal{F}$ felület által meghatározott, s az $\mathcal{F}$-et nem metsző tengelyt tartalmazó térrészhez azok a végtelen távoli pontok tartoznak, melyek $\mathcal{F}$ és a végtelen távoli sík metszésvonalának belső pontjai ; ebből következik, hogy az euklidesi térnek $\mathcal{F}$ által meghatározott két része a végtelen távoli síkon át sem függ össze egymással, tehát a megfelelő végtelen távoli pontokkal kiegészítve az affin térnek az $\mathcal{F}$ felület által meghatározott két tartományát adja. Ebből következik továbbá, hogy *a projektív teret egy tetszőleges másodrendű vonalfelület két részre osztja fel.*

Vegyünk fel egy olyan hiperbolikus paraboloidot az euklidesi térben, melynek O csúcsán átmenő a és b alkotói merőlegesek egymásra. Az a tengely körül való félforgással a paraboloid önmagába, s az általa meghatározott két térrész egymásba megy át. Ez a félforgás természetes módon kiterjeszthető a végtelen távoli pontokra, s így meggondolásunk arra az eredményre vezet, hogy *a projektív térnek az a két része, melyre egy másodrendű vonalfelület felosztja, aequivalens egymással.* A két rész közül mindegyik olyan szerkezetű, mint az euklidesi térben a torus belseje.

Vegyünk fel az euklidesi térben két torust egymás külsejében, képezzük le őket egymásra olyan módon, hogy az egyik torus szélességi köreinek a másik hosszúsági körei feleljenek meg és megfordítva. A két felületnek egy-egy, a leképezésnél megfelelő pontját tekintsük *egy* pontnak egy értelmezendő alakzaton, mely ezekből a pontokból, továbbá az egyik torus belsejében fekvő pontokból, valamint a másik torus belsejében fekvő pontokból áll ; ez az alakzat szerkezetét tekintve aequivalens a projektív térrel, s ilyen előállítása szemlélteti a projektív térnek egy másodrendű vonalfelülettel való kettéosztását. (Ez a projektív tér Heegaard-*féle diagrammája*).

77. §. A másodrendű vonalfelületek projektív leképezései.

Értelmezés. *Az $\mathcal{F}$ másodrendű vonalfelületnek az $\mathcal{F}'$ másodrendű vonalfelületre való projektív leképezésén* egy olyan leképezést értünk, melyet a térnek egy kollineációja származtat.

$\mathcal{F}$-nek $\mathcal{F}'$-re való bármely projektív leképezésénél $\mathcal{F}$ minden alkotója $\mathcal{F}'$-nek egy alkotójába, s $\mathcal{F}$ két, egymást metsző alkotója $\mathcal{F}'$-nek két, egymást metsző alkotójába megy át. E szerint az $\mathcal{F}$ felület (a) és (b) alkotóseregének az $\mathcal{F}'$ felület (a') és (b') alkotóserege felel meg.

Értelmezés. Az (a) alkotósereg a_1, a_2, a_3, a_4 egyeneseit *harmonikus négyes*nek nevezzük, ha a (b) sereg valamely egyenesét harmonikus pontnégyesben metszik. Ebben az esetben a (b) sereg tetszőleges egyenesével való metszéspontjaik is harmonikus pontnégyest alkotnak, mivel a (b) sereg bármely két egyenese között az (a) sereg elemei, mint vetítősugarak, perspektív vonatkozást létesítenek.

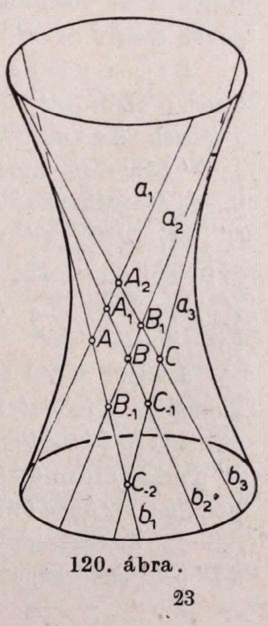
Az értelmezésekből közvetlenül adódik a következő állítás:

77.1. *Az $\mathcal{F}$ felületnek az $\mathcal{F}'$ felületre való projektív leképezésénél az $\mathcal{F}$ felület bármely harmonikus alkotó négyesének az $\mathcal{F}'$ felületen harmonikus alkotó négyes felel meg.*

A másodrendű vonalfelületek egymásra való projektív leképezéseit értelmezhetjük a térre való hivatkozás nélkül is következőképpen:

Értelmezés. Az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ *másodrendű vonalfelületek közti projektív vonatkozáson* olyan kölcsönösen egyértelmű leképezést értünk, mely az egyik felület minden alkotójának a másik felület valamely alkotóját felelteti meg.

Könnyen belátható, hogy az $\mathcal{F}$ felületnek $\mathcal{F}'$-re való leképezése, mely eleget tesz ennek a feltételnek, kiterjeszthető a tér kollineációjává. Legyen ugyanis a_1, a_2, a_3 az $\mathcal{F}$ felületnek ugyanahhoz a sereghez tartozó három alkotója, s a'_1, a'_2, a'_3 ezeknek a megadott leképezésnél származó képe. Felveszünk $\mathcal{F}$ másik alkotóseregéből három tetszőleges b_1, b_2, b_3 elemet, s ezeknek képét jelöljük b'_1, b'_2, b'_3-vel. Az a_i, b_k alkotók metszéspontjait jelöljük a következő módon (120. ábra):



120. ábra.

$$a_1 b_1 = A, \quad a_1 b_2 = A_1, \quad a_1 b_3 = A_2 ;$$
$$a_2 b_1 = B_{-1}, \quad a_2 b_2 = B, \quad a_2 b_3 = B_1 ;$$
$$a_3 b_1 = C_{-2}, \quad a_3 b_2 = C_{-1}, \quad a_3 b_3 = C ;$$

hasonlóan az a'_i és b'_k alkotók metszéspontjait. Az a_1 egyenesnek az a'_1 egyenesre való projektív leképezését egyértelműen meghatározzák az egymásnak megfelelő A, A_1, A_2 és A', A'_1, A'_2 ponthármasok; ugyancsak a_2-nek a'_2-re való leképezését a B_{-1}, B, B_1 és a B'_{-1}, B', B'_1 ponthármasok. A **45**.12 tétel szerint van a térnek egy és csak egy olyan **T** kollineációja, mely az a_1 és a_2 egyeneseken ezekkel a projektív leképezésekkel megegyezik, s melynél az A_2B_1 egyenes C pontja az $A'_2B'_1$ egyenes C' pontjába megy át. A **T** kollineációnál az a_1 és az a_2 egyenes között az A, A_1, A_2 és B_{-1}, B, B_1 ponthármasok által meghatározott projektív vonatkozásnak az a'_1 és a'_2 egyenesek között az a projektív vonatkozás felel meg, melyet az A', A'_1, A'_2 és a B'_{-1}, B', B'_1 ponthármasok határoznak meg. Az a_1 és a_2 közti projektív vonatkozásnál megfelelő pontokat a (b) sereg alkotói kötik össze, tehát ez az alkotósereg **T**-nél az a'_1 és a'_2 egyenesek megfelelő pontjait összekötő egyenesekbe, vagyis a (b') sereg alkotóiba megy át. E szerint a **T** kollineációnál az $\mathcal{F}$ felület az $\mathcal{F}'$ felületbe megy át, s a leképezés megegyezik a két felület megadott leképezésével.

A fentihez hasonló meggondolással adódik a következő tétel:

77.2. Tétel. *Ha A, B, C és A', B', C' az $\mathcal{F}$ és az $\mathcal{F}'$ másodrendű vonalfelületnek három-három tetszőleges olyan pontja, melyek közül bármely kettő nem tartozik a felületnek ugyanahhoz az alkotójához, akkor van $\mathcal{F}$-nek $\mathcal{F}'$-re pontosan két olyan projektív leképezése, mely az A, B, C pontot rendre az A', B', C' pontba viszi át.*

Bizonyítás. Jelöljük az A, B, C s az A', B', C' pontokon átmenő alkotókat, s ezek metszéspontjait úgy, mint fent. Legyen **T** a térnek az a kollineációja, mely az $A, A_1, A_2, B_{-1}, B, B_1, C$ pontokat az $\mathcal{F}'$ felület ugyanolyan nevű pontjaiba viszi át; **T**′ pedig az a kollineáció, melynél az $\mathcal{F}$ felület ugyane pontjainak rendre az $A', B'_{-1}, C'_{-2}, A'_1, B', C'_{-1}, C'$ pontok felelnek meg. A $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}'\mathbf{T}^{-1}$ leképezésnél az $\mathcal{F}$ felület önmagába megy át, ennek A, B, C pontjai fixpontok, s az A_2 pont képe C_{-2}. A $\mathbf{T}_0$ leképezés felcseréli egymással az $\mathcal{F}$ felület két alkotóseregét.

Jelöljük $\mathcal{C}$-vel azt a másodrendű görbét, melyben az ABC sík metszi az $\mathcal{F}$ felületet. $\mathcal{F}$-nek két különböző P és P' pontját egymásnak a $\mathcal{C}$ *görbére vonatkozó tükörképé*nek nevezzük, ha a P ponton és a P' ponton átmenő két-két alkotó a $\mathcal{C}$ görbét ugyanabban a két pontban metszi. Az $\mathcal{F}$ felület minden, a $\mathcal{C}$ görbéhez nem tartozó P pontjának egy és csak egy a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozó P' tükörkép felel meg, s a P' pont tükörképe a P pont. *A $\mathbf{T}_0$ leképezés az $\mathcal{F}$ felületnek a $\mathcal{C}$ görbére* *vonatkozó tükrözése,* melynél $\mathcal{C}$ minden pontja fixpont, s $\mathcal{F}$ minden P pontjának $\mathcal{C}$-re vonatkozó P' tükörképe felel meg. Az $\mathcal{F}$ felületnek az azonosságon kívül a $\mathbf{T}_0$ tükrözés az egyedüli olyan önmagára való projektív leképezése, melynél A, B, C fixpontok. A $\mathbf{T}_0$ leképezést a térnek az a harmonikus perspektivitása származtatja, melynek síkja ABC, s középpontja ennek $\mathcal{F}$-re vonatkozó pólusa. A fentiek szerint $\mathcal{F}$-nek $\mathcal{F}'$-re pontosan két olyan $\mathbf{T}$ és $\mathbf{T}'$ projektív leképezése van, mely az A, B, C pontot A', B', C'-be viszi át.

Az $\mathcal{F}$ felület $\mathbf{T}_0$ tükrözése, mely felcseréli egymással $\mathcal{F}$ két alkotóseregét, megfordítja az $\mathcal{F}$ felület irányítását. $\mathcal{F}$-nek $\mathcal{F}'$-re való $\mathbf{T}$ és $\mathbf{T}'$ leképezése az $\mathcal{F}$ felület megadott irányításának az $\mathcal{F}'$ felület két különböző irányítását felelteti meg.

A **77**.2 tétel korolláriuma a következő:

77.3. Tétel. *Az $\mathcal{F}$ másodrendű vonalfelületnek azok az önmagára való projektív leképezései, melyek megtartják $\mathcal{F}$ irányítását egy* $\mathbf{G}$ *csoportot alkotnak. Ha A, B, C és A', B', C' az $\mathcal{F}$ felületnek három-három tetszőleges olyan pontja, melyek közül kettő-kettő nem tartozik egy alkotóhoz, akkor a* $\mathbf{G}$ *csoportban egy és csak egy olyan leképezés van, mely az A, B, C pontot az A', B', C' pontba viszi át.*

77.4. Tétel. *A* $\mathbf{G}$ *csoportnak van egy kommutatív, s az $\mathcal{F}$ felületen egyszeresen tranzitív* $\mathbf{G}_1$ *alcsoportja* (vagyis a $\mathbf{G}_1$ csoportnak egy és csak egy leképezése viszi át az $\mathcal{F}$ felület valamely A pontját egy tetszőleges A' pontjába).

Bizonyítás. Legyen a_1, a_2, a_3 az (a) alkotósereg három tetszőleges eleme, s $\mathbf{J}$ az a_1 egyenes tetszőleges elliptikus involuciója. A térnek azok a kettőstengelyű elliptikus kollineációi, melyek az a_1, a_2, a_3 egyeneseket önmagukba viszik át, s melyek a_1-en felcserélhetők a $\mathbf{J}$ involucióval, egy egytagú $\mathbf{g}$ csoportot alkotnak, mely az (a) sereg minden egyenesén egyszeresen tranzitív (l. **17**.10, 11 és **48**.4). A $\mathbf{g}$ csoportnál a (b) sereghez tartozó alkotók egymásba mennek át, ugyancsak egyszeresen tranzitív módon, azaz a $\mathbf{g}$ csoport egy és csak egy eleme viszi át a (b) sereg egy tetszőleges b elemét egy tetszőleges másik b' elemébe. Hasonlóan szerkesztünk egy $\mathbf{g}'$ csoportot, egy a b_1 alkotón megadott $\mathbf{J}'$ elliptikus involució segítségével, mely kommutatív, s a (b) sereg mindegyik egyenesén, továbbá az (a) seregben egyszeresen tranzitív. A $\mathbf{g}$ és a $\mathbf{g}'$ csoportokban foglalt elemek szorzatai olyan kommutatív csoportot alkotnak, mely az $\mathcal{F}$ felületen egyszeresen tranzitív. A csoport izomorf a torusnak azzal a csoportjával, mely a szélességi és a hosszúsági körök mentén való eltolásokból s ezek szorzataiból áll.

Megjegyzés. A másodrendű vonalfelületnek az a tulajdonsága, hogy egy önmagára való projektív leképezése megtartja vagy megfordítja a felület irányítását, a szerint, hogy a két alkotósereget önmagába vagy egymásba viszi át, *lényegesen projektív*, s nemcsak a felület alkatával összefüggő tulajdonsága. A torusnak van olyan kölcsönösen egyértelmű, folytonos leképezése önmagára, mely a szélességi és a hosszúsági köröket felcseréli egymással, s megtartja a felület irányítását, s olyan leképezése is, mely a szélességi és a hosszúsági körök seregét önmagába viszi át, s megfordítja a felület irányítását.

78. §. Elliptikus másodrendű felületek.

Elliptikusnak nevezzük azokat a másodrendű felületeket, melyeknek pontjai elliptikus típusúak, azaz bármely ponthoz tartozó érintősíknak nincs a felülettel az érintési ponton kívül más közös pontja (l. **72**.1).

Legyen $\mathcal{F}$ egy elliptikus másodrendű felület, s α egy tetszőleges sík; $\mathcal{F}$ és α kölcsönös helyzete háromféle lehet: vagy nincs közös pontjuk, vagy van egy és csak egy közös pontjuk, vagypedig közös pontjaik egy $\mathcal{C}$ másodrendű görbét alkotnak (**72**.4). Az α síkot *nem metsző, érintő* vagy *metsző sík*nak nevezzük a három esetnek megfelelően.

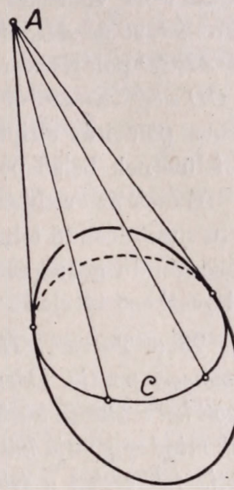
Az $\mathcal{F}$ felületnek egy tetszőleges a egyenessel vagy két, vagy egy közös pontja van, vagy egy sincs (**72**.5); az a egyenest *metsző, érintő*, vagy *nem metsző egyenes*nek nevezzük.

Az $\mathcal{F}$ felületet nem metsző síkok létezése a térbeli polaritásokra vonatkozó **55**.10 tételből következik. Jelöljük Ω-val az $\mathcal{F}$ felületre vonatkozó, ellipszoid típusú, hiperbolikus polaritást. Ha $ABCD$ egy tetszőleges poláris tetraéder, ennek egyik lapjához tartozó három élén elliptikus involuciót alkotnak az Ω-nál konjugált pontok, tehát az ezen a lapon Ω által származtatott síkbeli polaritás elliptikus (**36**.1). A tetraéder másik három lapján Ω hiperbolikus polaritást származtat, s a másik három élen hiperbolikus involuciót. E szerint:

78.1 *Egy poláris tetraéder egyik lapja s az ehhez tartozó három éle nem metszi, a többi három lap és három él metszi $\mathcal{F}$-et.*

Hasonlóan, mint a sík pontjait osztályozzuk egy másodrendű görbére nézve, a térnek valamely, az $\mathcal{F}$ felülethez nem tartozó A pontját *belső* vagy *külső pont*nak nevezzük, ha polársíkja, α nem metsző, illetve metsző sík. Az α síkban, valamint az A középpontú nyalábban Ω polaritást származtat; minden, az A ponton átmenő p egyenesnek megfelel p és α metszéspontjának a polársíkja, mely az A ponton megy át. A nyaláb polaritása az α síkban Ω által létesített polaritásnak felel meg az A pontból való vetítéssel.

Ha A az $\mathcal{F}$ felület külső pontja, akkor polársíkja, α $\mathcal{F}$-et egy $\mathcal{C}$ másodrendű görbében metszi. Ha P a $\mathcal{C}$ görbe tetszőleges pontja, akkor az α síkban Ω által származtatott polaritásnál a P pontnak a $\mathcal{C}$ görbe P pontjához tartozó p érintője felel meg; az A középpontú nyalábban pedig az AP egyenesnek, mely az $\mathcal{F}$ felület érintője, megfelel az Ap sík, mely $\mathcal{F}$ érintősíkja a P pontban. A nyaláb polaritásánál önmagukhoz konjugált elemek egy másodrendű kúpfelületet alkotnak, melyet az $\mathcal{F}$ felületnek az A ponthoz tartozó *érintő kúpfelületé*nek nevezünk (121. ábra). Ennek $\mathcal{F}$-fel közös pontjai A polársíkjának $\mathcal{F}$-fel való $\mathcal{C}$ metszésvonalán feküsznek. E szerint:



121. ábra.

78.2. *Az $\mathcal{F}$ felületnek az A külső ponthoz tartozó érintő kúpfelülete az A pont polársíkjának $\mathcal{F}$-fel való metszésvonalát vetíti az A pontból.*

Ha A az $\mathcal{F}$ felületnek belső pontja, akkor az A középpontú nyalábban Ω által származtatott polaritás elliptikus, tehát nincs önmagához konjugált eleme. Az $\mathcal{F}$ felület belső pontján nem megy át e szerint $\mathcal{F}$-nek sem érintője, sem érintősíkja.

78.3. *Az $\mathcal{F}$ felület belső és külső pontjait jellemezhetjük tehát azzal a tulajdonsággal is, hogy külső ponton átmegy $\mathcal{F}$-nek legalább egy érintője és érintősíkja, de belső ponton nem megy át.* Az A ponton átmenő valamely p érintő annak a másodrendű görbének is érintője, melyben egy tetszőleges, p-n átfektetett sík metszi $\mathcal{F}$-et.

78.4. *Ha A az $\mathcal{F}$ felület belső pontja, akkor minden, A-n átmenő sík és $\mathcal{F}$ metszésvonalának is belső pontja. Megfordítva, ha az A pont egy, az $\mathcal{F}$ felületen fekvő $\mathcal{C}$ másodrendű görbének belső pontja, akkor az $\mathcal{F}$ felületnek is belső pontja.*

Az első állítás következik **78**.2-ből.

A második állítás igazolására, jelöljük a-val A-nak $\mathcal{C}$-re vonatkozó polárisát, legyen ezen B és C két konjugált pont, s D az ABC síknak $\mathcal{F}$-re vonatkozó pólusa. Mivel A a $\mathcal{C}$ görbe belső pontja, BC nem metsző és AB, AC a $\mathcal{C}$ görbének, tehát $\mathcal{F}$-nek is metszői (**59**.8). Az $ABCD$ poláris tetraéder élei közül még AD is metsző, viszont BD és CD nem metszői $\mathcal{F}$-nek. E szerint a BCD síkban Ω által származtatott polaritás elliptikus, ez a sík nem metszi $\mathcal{F}$-et, s pólusa A az $\mathcal{F}$ felületnek belső pontja.

Ennek az eredménynek az alapján átvihetjük a térre s az elliptikus másodrendű felületekre azokat a tételeket, melyek a síknak egy másodrendű görbe által való felosztására vonatkoznak. Igy kapjuk a következő tételt:

78.5. Tétel. *Ha P és Q az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület két tetszőleges pontja, akkor a PQ egyenesnek a P, Q pontok által meghatározott két szakasza közül az egyiknek minden pontja belső pont, a másiknak minden pontja külső pont $\mathcal{F}$-re nézve. Az $\mathcal{F}$ felület a teret két részre osztja fel, ezeket a felület belsejének és külsejének nevezzük. Bármely két belső pontot összekötő egyenesnek a két pont által meghatározott egyik szakasza a felület belsejéhez tartozik, s bármely két külső ponton átmenő egyenesnek legalább egyik, a két pont által meghatározott szakasza a felület külsejéhez tartozik. Minden olyan törtvonalnak, melynek egyik végpontja belső, s másik végpontja külső pont, van a felülettel legalább egy közös pontja.*

Legyen A az $\mathcal{F}$ felület külsejében fekvő pont, polársíkja α, s ennek $\mathcal{F}$-fel való metszésvonala $\mathcal{C}$. Az A csúcspontú érintő kúpfelületet jelöljük $\mathcal{F}_0$-val; $\mathcal{F}_0$-nak $\mathcal{F}$-el közös pontjai a $\mathcal{C}$ görbe pontjai. A $\mathcal{C}$ görbe belseje $\mathcal{F}$-nek is, $\mathcal{F}_0$-nak is belsejéhez tartozik.

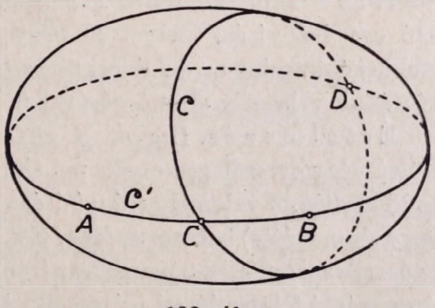
78.6. *Az $\mathcal{F}$ felület valamennyi, $\mathcal{C}$-től különböző pontja az $\mathcal{F}_0$ érintő kúpfelület belsejéhez tartozik.* Az ellenkezőt téve fel, volna $\mathcal{F}$-nek egy $\mathcal{F}_0$ külsejében fekvő Q pontja; ha P a $\mathcal{C}$ görbe belsejének tetszőleges pontja, akkor a PQ egyenes mindkét PQ szakaszának volna az $\mathcal{F}_0$ kúpfelülettel közös pontja, s ezek $\mathcal{F}$-nek külső pontjai, mivel átmegy rajtuk $\mathcal{F}$-nek legalább egy egy érintője (t. i. $\mathcal{F}_0$-nak egy-egy alkotója). Viszont az $\mathcal{F}$ felület Q pontját a P belső ponttal összekötő két szakasz közül az egyik $\mathcal{F}$ belsejében fekszik a **78**.5 tétel szerint, s ez ellenmondás. Ebből következik továbbá, hogy *az $\mathcal{F}$ felületnek, s belsejének minden pontja, a $\mathcal{C}$ görbe pontjait kivéve, az $\mathcal{F}_0$ érintő kúpfelület belsejéhez tartozik.*

Ha P az α síknak a $\mathcal{C}$ görbe külsejében fekvő pontja, akkor az AP egyenes nem metszi az $\mathcal{F}$ felületet. Legyen ugyanis p a P pontnak $\mathcal{C}$-re vonatkozó polárisa ; p metszője $\mathcal{C}$-nek, s ezért van legalább egy, a $\mathcal{C}$ görbe belsejéhez tartozó Q pontja. Mivel Q az $\mathcal{F}$ felületnek is belső pontja, Q polársíkja nem metszi $\mathcal{F}$-et, s tartalmazza az A, P pontokat, tehát az AP egyenest is. — Ha pedig az α sík P pontja $\mathcal{C}$ belsejében fekszik, akkor az AP egyenesnek az A, P pontok által meghatározott mindkét szakaszán van $\mathcal{F}$-nek egy-egy pontja. Mivel a $\mathcal{C}$ görbe belső, illetve külső pontjait az A csúccsal összekötő egyenesek az $\mathcal{F}_0$ kúpfelület belsejéhez, illetve külsejéhez tartoznak (**70**.6), meggondolásunk eredményét így mondhatjuk ki :

78.7. Tétel. *Az A csúcspontú $\mathcal{F}_0$ érintő kúpfelület elválasztja egymástól az A középpontú nyalábnak az $\mathcal{F}$ felületet metsző és nem metsző egyeneseit ; az $\mathcal{F}$-et metsző egyenesek $\mathcal{F}_0$ belsejéhez, a nem metszők $\mathcal{F}_0$ külsejéhez tartoznak.*

Értelmezés. Ha $\mathcal{C}$ az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felületen fekvő másodrendű görbe, s A és B az $\mathcal{F}$ felületnek $\mathcal{C}$-hez nem tartozó két pontja, akkor azt mondjuk, hogy *az $\mathcal{F}$ felületen $\mathcal{C}$ elválasztja, vagy nem választja el az A, B pontokat,* a szerint, hogy az $\mathcal{F}$ belsejében fekvő AB szakasznak van, vagy nincs a $\mathcal{C}$ görbe belsejével közös pontja.

78.8. Az AB egyenesen átmenő tetszőleges sík $\mathcal{F}$-et egy $\mathcal{C}'$ másodrendű görbében, és $\mathcal{C}$-t két C és D pontban metszi. Ha $\mathcal{C}$ az $\mathcal{F}$ felületen a fenti értelmezés szerint elválasztja egymástól az A, B pontokat, akkor az $\mathcal{F}$ belsejében fekvő AB és CD szakasznak van közös pontja, tehát a $\mathcal{C}'$ másodrendű görbén az A, B és C, D pontpárok elválasztják egymást (**59**.19), és megfordítva. A fenti értelmezés tehát aequivalens a következővel :



122. ábra.

Az $\mathcal{F}$ felület A, B pontjait a felületen fekvő $\mathcal{C}$ másodrendű görbe akkor és csak akkor választja el egymástól $\mathcal{F}$-en, ha bármely az $\mathcal{F}$ felületen fekvő, s az A, B pontokon átmenő $\mathcal{C}'$ másodrendű görbének $\mathcal{C}$-vel való C, D metszéspontja a $\mathcal{C}'$ görbén elválasztja egymástól az A és a B pontot (122. ábra).

A két értelmezés aequivalenciájából következik :

78.9. Tétel. *Az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felületet minden rajta fekvő $\mathcal{C}$ másodrendű görbe két részre osztja fel.* Ha A és B ugyanahhoz a felületrészhez tartozik, akkor bármely, $\mathcal{F}$-en fekvő s az A, B pontokon átmenő $\mathcal{C}'$ másodrendű görbének legalább egyik, az A, B pontok által meghatározott íve ugyanahhoz a felületrészhez tartozik, azaz nincs $\mathcal{C}$-vel közös pontja. Ha pedig A és B két különböző felületrészhez tartozik, akkor $\mathcal{C}'$-nek az A, B pontok által meghatározott mindkét ívének van $\mathcal{C}$-vel egy-egy közös pontja.

A $\mathcal{C}$ görbe síkjának pólusából való vetítéssel a $\mathcal{C}$ által $\mathcal{F}$-en meghatározott két felületrész közül bármelyiknek pontjai s $\mathcal{C}$ belsejének pontjai kölcsönösen egyértelmű módon felelnek meg egymásnak. Az $\mathcal{F}$ felület tehát két olyan felületrésznek a $\mathcal{C}$ görbe mentén való egyesítéséből származik, melyek aequivalensek a $\mathcal{C}$ görbe belsejével. *Az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület e szerint, szerkezetét tekintve, aequivalens az euklidesi térben fekvő gömbfelülettel,* mely tényleg az elliptikus másodrendű felületek speciális eseteként jelentkezik (l. 79. §).

Az $\mathcal{F}$ felület ilyen szerkezete lehetővé teszi a felületen egy *irányítás* értelmezését. Legyen O az $\mathcal{F}$ felület belsejének tetszőleges pontja, s P egy, $\mathcal{F}$-en változó pont. Az OP szakaszoknak megfeleltetjük az euklidesi térnek egy O' pontból kiinduló félsugarait olyan módon, hogy két ugyanahhoz az egyeneshez tartozó OP és OQ szakasznak két ugyanahhoz az egyeneshez tartozó félsugár, s egy síkban fekvő OP szakaszoknak egy síkban fekvő félsugarak feleljenek meg. Az első kötet **171.** tételéből következik, hogy az OP szakaszok összességében s ezért az $\mathcal{F}$ felületen fekvő P pontok összességében is meghatározható egy irányítás, melyet $\mathcal{F}$ négy pontja segítségével ugyanúgy értelmezünk, mint az euklidesi térben egy tetraéder irányítását négy csúcsának valamely elrendezésével (l. első kötet, 182—183. o.).

Értelmezés. Legyen A, B, C, D az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület négy tetszőleges olyan pontja, mely nem fekszik egy másodrendű görbén. $\mathcal{F}$ valamely *irányítását* a négy pontnak egy permutációja (vagy elrendezése) határozza meg. Két permutáció akkor és csak akkor határozza meg $\mathcal{F}$-nek ugyanazt az irányítását, ha az egyik a másikból páros számú felcseréléssel származik. Az A, B, C, D pontnak két olyan permutációja, mely egymásból páratlan számú felcseréléssel keletkezik, értelmezés szerint $\mathcal{F}$-nek két *ellenkező irányítását* határozza meg.

Az $\mathcal{F}$ felületnek a négy pont $(ABCD)$ elrendezése által meghatározott irányítása szemléletesen azt jelenti, hogy a D pontból tekintjük az A, B, C pontokon átmenő $\mathcal{C}$ másodrendű görbének azt az irányítását (vagy körüljárását), melyet ennek a három pontnak (ABC) ciklikus sorrendje határoz meg.

Értelmezés. Ha $\mathcal{C}$ az $\mathcal{F}$ felületen fekvő másodrendű görbe, A, B, C ennek három tetszőleges pontja, s D és D' $\mathcal{F}$-nek a $\mathcal{C}$ görbéhez nem tartozó két pontja, akkor értelmezés szerint *megegyezők, vagy ellenkezők az* ($ABCD$) *és az* ($ABCD'$) *irányítások,* a szerint, hogy a $\mathcal{C}$ görbe a D és a D' pontot az $\mathcal{F}$ felületen nem választja el, vagy elválasztja.

Ha az $\mathcal{F}$ felületet a tér $\mathbf{T}$ kollineációjával egy másik (szükségképpen elliptikus) $\mathcal{F}'$ másodrendű felületbe visszük át, akkor minden, $\mathcal{F}$-en fekvő $\mathcal{C}$ másodrendű görbének $\mathcal{F}'$-n egy $\mathcal{C}'$ másodrendű görbe felel meg, t. i. a $\mathcal{C}$-n átmenő sík képének $\mathcal{F}'$-vel való metszésvonala. A $\mathcal{C}$ által $\mathcal{F}$-en meghatározott két felületrész a leképezésnél az $\mathcal{F}'$-n $\mathcal{C}'$ által meghatározott két felületrészbe megy át. A $\mathcal{C}$ görbe A, B, C pontja a $\mathcal{C}'$ görbe A', B', C' pontjába, s $\mathcal{F}$-nek egy, $\mathcal{C}$-hez nem tartozó D pontja $\mathcal{F}'$-nek egy, $\mathcal{C}'$-höz nem tartozó D' pontjába megy át. Az A, B, C, D pontok ($ABCD$) permutációja meghatározza $\mathcal{F}$-nek egy irányítását; ennek a $\mathbf{T}$ leképezésnél megfelel $\mathcal{F}'$-n az ($A'B'C'D'$) permutáció által meghatározott irányítás. Ha E az $\mathcal{F}$ felületnek $\mathcal{C}$-hez nem tartozó pontja, s E' ennek a képe, akkor az ($ABCD$) és az ($ABCE$) irányítás megegyező, vagy ellenkező, a szerint, hogy D-t és E-t $\mathcal{F}$-en nem választja el, vagy elválasztja a $\mathcal{C}$-görbe. A D' és E' pontokat az $\mathcal{F}'$ felületen ugyancsak nem választja el, illetve elválasztja a $\mathcal{C}'$ görbe; az első esetben megegyező, a másodikban ellenkező az $\mathcal{F}'$ felületnek az ($A'B'C'D'$) és az ($A'B'C'E'$) permutációk által meghatározott irányítása. Ebből következik:

78.10. Tétel. *Ha a tér* $\mathbf{T}$ *kollineációja az* $\mathcal{F}$ *elliptikus másodrendű felületet az* $\mathcal{F}'$ *felületbe viszi át, akkor* $\mathcal{F}$ *egy irányításának* $\mathbf{T}$*-nél az* $\mathcal{F}'$ *felület egy meghatározott irányítása felel meg.*

Ha az $\mathcal{F}'$ felület egybeesik $\mathcal{F}$-fel, vagyis ha a $\mathbf{T}$ kollineáció az $\mathcal{F}$ felületet önmagába viszi át, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{T}$ *megtartja vagy megfordítja az* $\mathcal{F}$ *felület irányítását,* a szerint, hogy $\mathcal{F}$-nek egy megadott irányítása megegyezik, vagy ellenkezik azzal az irányítással, mely neki a $\mathbf{T}$ leképezésnél megfelel.

Az elliptikus másodrendű felületek meghatározásáról bebizonyítjuk a következő tételt:

78.11. Tétel. *Ha* Ω_1 *az a síkban megadott elliptikus polaritás, és* A, P *tetszőleges, a-hoz nem tartozó pontok, akkor van egy és csak egy* *olyan, a P ponton átmenő elliptikus másodrendű felület, melyre vonatkozóan az α sík pólusa A, s melyre nézve konjugált pontok az α síkban a megadott Ω_1 elliptikus polaritást származtatják.*

Bizonyítás. Legyen az AP egyenesnek az α síkkal való metszéspontja Q, ennek polárisa q; a Pq síkot π-vel jelöljük. Legyen továbbá BCD egy olyan poláris háromszög az α síkban, melynek egyik csúcsa sem fekszik a q egyenesen; az ACD, ABD, ABC síkot jelöljük β, γ, δ-val. Van a térnek egy és csak egy olyan Ω korrelációja, mely az A, B, C, D, P pontnak az $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \pi$ síkot felelteti meg (**53**.3); ez a térnek egy polaritása, mivel az $ABCD$ tetraéder mindegyik csúcsának az átellenes lapja felel meg (**55**.5). Az Ω polaritás hiperbolikus, mivel a P pont polársíkjához, π-hez tartozik, és ellipszoid típusú, mivel az $ABCD$ poláris tetraéder α lapján az Ω_1 elliptikus polaritást származtatja (**55**.10). Az Ω-nál önmagukhoz konjugált pontok egy $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felületet alkotnak, melynek megvannak a tételben kimondott tulajdonságai, s azok $\mathcal{F}$-et egyértelműen meghatározzák.

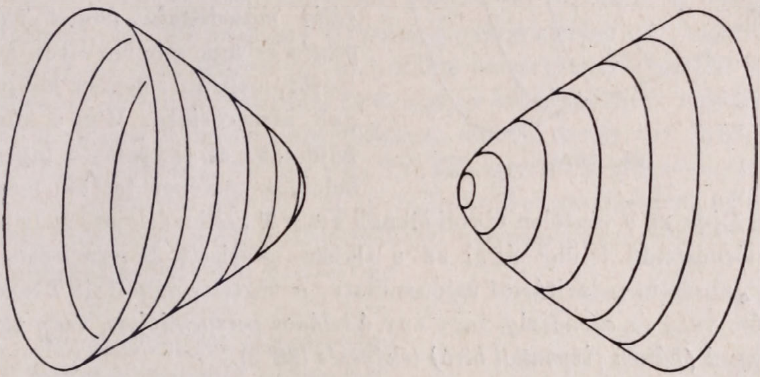
79. §. Elliptikus másodrendű felületek az affin és az euklidesi térben.

Az elliptikus másodrendű felületeket az affin térben a végtelen távoli síkkal való kölcsönös helyzetük szerint osztályozzuk.

*Ellipszoid*nak nevezünk minden olyan elliptikus másodrendű felületet, melynek nincs az υ végtelen távoli síkkal közös pontja. Az ellipszoid *középpontja* az υ végtelen távoli sík pólusa, mely belső pont, mivel a végtelen távoli sík nem metsző. Bármely metsző síknak az ellipszoiddal való metszésvonala ellipszis.

Az ellipszoid középpontján átmenő síkokat és egyeneseket *átmérősíkok*nak és *átmérők*nek nevezzük; ezek a végtelen távoli pontok polársíkjai, s a végtelen távoli egyenesek polárisai. Egy *átmérőhöz konjugált átmérősík* az átmérő végtelen távoli pontjának a polársíkja. *Két átmérőt konjugáltnak* nevezünk, ha az egyikhez konjugált átmérősík tartalmazza a másik átmérőt (és megfordítva). *Két átmérősíkot konjugáltnak* nevezünk, ha az egyikhez konjugált átmérő a másik síkban fekszik (és megfordítva). Megadható az ellipszoidnak *három, páronkint konjugált átmérője;* egy tetszőleges átmérőhöz konjugált átmérősíkban felveszünk két konjugált átmérőt; ez a három átmérő páronkint konjugált egymáshoz, s ugyanúgy a rajtuk átmenő három átmérősík. Három konjugált átmérő végtelen távoli pontja egy poláris háromszög csúcsai arra a polaritásra vonatkozóan, melyet a felület a végtelen távoli síkban létesít.

*Kétpalástú hiperboloid*nak nevezünk minden olyan elliptikus másodrendű felületet, melynek metsző síkja a végtelen távoli sík (123. ábra). A kétpalástú hiperboloid *középpontja*, vagyis a végtelen távoli sík pólusa, végesben fekvő pont, és a felületnek külső pontja. *Aszimptotikus kúpfelület*nek nevezzük azt a kúpfelületet, mely a középpontból vetíti a felületnek a végtelen távoli síkkal való metszésvonalát. Átmérők, átmérősíkok, s konjugált átmérők és átmérősíkok értelmezése ugyanaz, mint ellipszoid esetében. Három konjugált átmérősík közül kettő hiperbolában metszi, a harmadik nem metszi a felületet ; három

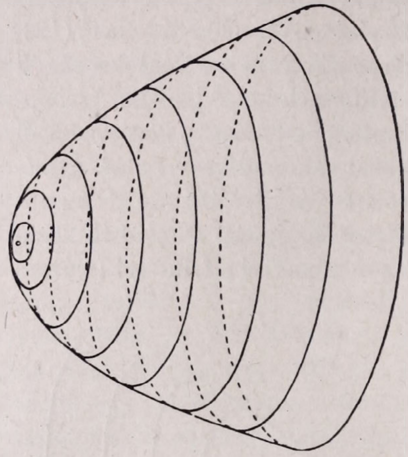


123. ábra.

konjugált átmérő közül egy metsző, a másik kettő a felületet nem metsző egyenes. Mindez következik a poláris tetraéder s az elliptikus másodrendű felület kölcsönös helyzetére vonatkozó **78.**1 tételből ; a felület O középpontja, s három konjugált átmérő végtelen távoli pontja ugyanis egy poláris tetraédernek a csúcsai, s ennek három végtelen távoli csúcspontja egy poláris háromszöget határoz meg arra a hiperbolikus polaritásra vonatkozóan, melyet a felület a végtelen távoli síkban létesít. Ha α tetszőleges metsző sík, ennek a kétpalástú hiperboloiddal való metszésvonala ellipszis, parabola vagy hiperbola, a szerint, hogy α végtelen távoli egyenese nem metszi, érinti, vagy metszi a felületnek a végtelen távoli síkkal való metszésvonalát, mely nem elfajult másodrendű görbe.

*Elliptikus paraboloid*nak nevezünk minden olyan elliptikus másodrendű felületet, melynek érintősíkja a végtelen távoli sík

(124. ábra). A felületet minden olyan metsző sík, mely nem megy át a felület végtelen távoli pontján, ellipszisben, s minden olyan metsző sík, mely átmegy a felület végtelen távoli pontján, parabolában metszi.



124. ábra.

Az ellipszoidot és a kétpalástú hiperboloidot, továbbá a másodrendű vonalfelületek közül az egypalástú hiperboloidot *centrális másodrendű felületnek* nevezzük.

Az *euklidesi térben* egy *centrális másodrendű felület tengelyén* értünk minden olyan átmérőt, mely merőleges a konjugált átmérősíkra. Mint a kúpfelületek s az egypalástú hiperboloidok esetében tettük, megvizsgáljuk az υ végtelen távoli síknak azt a **T** kollineációját, mely az $\mathcal{F}$ másodrendű felület által az υ síkban létesített Ω polaritásnak az Ω_0 abszolut polaritással való szorzata. A végtelen távoli sík **T** leképezése vagy az *azonosság*, vagy egy *általános perspektivitás*, vagy egy *I típusú (három fixponttal bíró) leképezés* (**36**.3).

Ha **T** a végtelen távoli síkon az azonosság, akkor az Ω polaritás megegyezik az Ω_0 abszolut polaritással, vagyis az $\mathcal{F}$ felület minden átmérője merőleges a hozzá konjugált átmérősíkra. Az $\mathcal{F}$ felületet ez esetben *gömb*nek nevezzük. *A gömbnek minden síkmetszete kör;* ugyanis a sík végtelen távoli egyenesének a metszésvonalra vonatkozóan konjugált pontjai az Ω_0 abszolut polaritásnál is konjugáltak, vagyis a sík és a gömb metszésvonalának minden átmérője merőleges a konjugált átmérőre ; ez a kör jellemző tulajdonsága (67. §). Ha O az $\mathcal{F}$ gömb középpontja, s P a gömb tetszőleges pontja, az OP szakaszt a *gömb sugará*nak nevezzük.

Ha a **T** leképezés a végtelen távoli síknak egy perspektivitása, akkor a perspektivitás Z középpontja és u tengelye egymásnak felel meg az abszolut polaritásnál, vagyis az OZ átmérő és a hozzá konjugált Ou átmérősík merőleges egymásra ; e szerint OZ tengelye az $\mathcal{F}$ felületnek. Az Ou síkban fekvő, s az O ponton átmenő bármely egyenes is tengelye $\mathcal{F}$-nek ; az Ou síknak s a vele párhuzamos síkoknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonala kör. Az $\mathfrak{F}$ felületet ebben az esetben *forgási ellipszoidnak*, illetve *kétpalástú forgási hiperboloidnak* nevezzük.

Végül, ha **T** az υ síkban nem perspektív leképezés, három fixpontját jelöljük X, Y, Z-vel ; az OX, OY, OZ egyenesek az $\mathfrak{F}$ felületnek tengelyei, s más tengelye nincs.

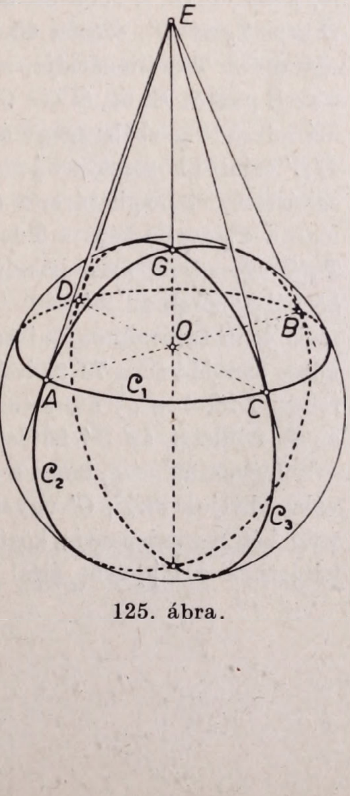
Az *elliptikus paraboloid* végtelen távoli pontját jelöljük X-szel, s ennek az Ω_0 abszolut polaritásnál megfelelő végtelen távoli egyenest u-val. Mivel u-nak nincs az $\mathfrak{F}$ felülettel közös pontja, $\mathfrak{F}$-nek két érintősíkja megy át az u egyenesen (**72**.9) ; ezek közül az egyik a végtelen távoli sík ; a másiknak érintési pontját O-val jelöljük s a *paraboloid csúcsának* nevezzük. Az u egyenesen az Ω_0-nál konjugált pontok, s az $\mathfrak{F}$-re vonatkozóan konjugált pontok két elliptikus involucuiót alkotnak ; ha ezek azonosak egymással, akkor minden, az u egyenesen átmenő sík $\mathfrak{F}$-et körben metszi ; ebben az esetben $\mathfrak{F}$-et *forgási paraboloidnak* nevezzük. Ha pedig az u egyenes két involuciója különböző, akkor szorzatuk hiperbolikus leképezés (**16**.5) ; ennek két fixpontját jelöljük Y-nal és Z-vel. Az OX, OY, OZ egyenesek páronkint merőlegesek egymásra. Az OXY és az OXZ sík $\mathfrak{F}$-et parabolában, az OYZ síkkal párhuzamos síkok ellipszisekben metszik, melyeknek tengelyei párhuzamosak OY-nal és OZ-vel.

80. §. Elliptikus másodrendű felületek projektív leképezései.

A tér minden kollineációjánál egy elliptikus másodrendű felületnek ugyanilyen típusú felület a képe (**72**.3). Megmutatjuk, hogy az öszszes elliptikus másodrendű felületek aequivalensek egymással a tér projektív csoportja szerint.

80.1. Tétel. *Ha $\mathfrak{F}$ és $\mathfrak{F}'$ két tetszőleges, elliptikus másodrendű felület, akkor van a térnek olyan kollineációja, mely $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$-be viszi át.*

Bizonyítás. (125. ábra). Legyen A, B, C az $\mathfrak{F}$ felület három tetszőleges pontja ; mivel ezek nem feküsznek egy egyenesen, meghatá-



125. ábra.

roznak egy síkot, mely $\mathcal{F}$-et egy $\mathcal{C}_1$ másodrendű görbében metszi. Az ABC sík pólusa az $\mathcal{F}$ külsejében fekvő E pont. Az AB egyenesnek $\mathcal{C}_1$-re vonatkozó pólusát a C ponttal összekötő egyenes metszi $\mathcal{C}_1$-et egy C-től különböző D pontban, s az AB egyenest egy O pontban, mely a $\mathcal{C}_1$ görbe belsejéhez tartozik. Az OE egyenesnek az $\mathcal{F}$ felülettel két közös pontja van, ezek közül az egyiket jelöljük G-vel. Az ABG síknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonala egy $\mathcal{C}_2$ másodrendű görbe, melynek érintői az EA és EB egyenesek. A CDG síknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonala egy $\mathcal{C}_3$ másodrendű görbe, melynek érintői az EC és ED egyenesek.

Az $\mathcal{F}'$ felületen felveszünk három tetszőleges A', B', C' pontot, s ezek alapján a fentihez hasonló módon értelmezzük a D', E', O', G' pontokat, valamint a $\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2, \mathcal{C}'_3$ másodrendű görbéket.

A **64**.3 tétel szerint van az ABC síknak az $A'B'C'$ síkra egy és csak egy olyan $\mathbf{T}_0$ kollineációja, mely a $\mathcal{C}_1$ görbét $\mathcal{C}'_1$-be, az elsőnek A, B, C pontjait a másiknak A', B', C' pontjaiba viszi át. A $\mathcal{C}_1$-re vonatkozóan konjugált AB és CD egyeneseknek a $\mathcal{C}'_1$-re vonatkozóan konjugált $A'B'$ és $C'D'$ egyenesek felelnek meg (**64**.4), s ezért a D pont képe D'. Az AB és CD egyenesek O metszéspontjának az $A'B'$ és $C'D'$ egyenesek O' metszéspontja felel meg. Mivel az O, G, E pontok is, s az O', G', E' pontok is egy-egy egyenesen feküsznek, s mivel O képe $\mathbf{T}_0$-nál O', ezért a **45**.11 tétel szerint van a térnek egy és csak egy olyan $\mathbf{T}$ kollineációja, mely az ABC síkban $\mathbf{T}_0$-val megegyezik, s az E pontot E'-be, és G-t G'-be viszi át. A $\mathcal{C}_2$ görbe $\mathbf{T}$-nél egy olyan másodrendű görbébe megy át, melynek A', B', G' pontjai, s $E'A'$ és $E'B'$ érintői közösek a $\mathcal{C}'_2$ görbével; mivel ez az öt adat a $\mathcal{C}'_2$ görbét egyértelműen meghatározza (**60**.12), tehát $\mathcal{C}_2$ képe a $\mathcal{C}'_2$ görbe. Hasonlóan a $\mathcal{C}_3$ görbe képe a $\mathbf{T}$ leképezésnél a $\mathcal{C}'_3$ görbe. — Az $\mathcal{F}$ felület $\mathbf{T}$-nél egy olyan másodrendű felületbe megy át, melynek $\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2, \mathcal{C}'_3$ görbéi közösek az $\mathcal{F}'$ felülettel; mivel ennek a három görbének a síkja nem tartozik egy síksorhoz, s közülök bármely kettőnek két közös pontja van, a **73**.2 tétel szerint a három görbén csak egy másodrendű felület megy át, s ez az $\mathcal{F}'$ felület. E szerint a $\mathbf{T}$ kollineáció az $\mathcal{F}$ felületet az $\mathcal{F}'$ felületbe viszi át.

Jegyezzük meg, hogy a G' pontot az $\mathcal{F}'$ felületen kétféleképpen választhatjuk meg; G' ugyanis az $E'O'$ egyenesnek az $\mathcal{F}'$ felülettel való két metszéspontja közül *akármelyik* lehet; a két pont az $\mathcal{F}'$ felületnek a $\mathcal{C}'_1$ görbe által meghatározott két különböző részéhez tartozik. A fenti bizonyításból tehát a **80**.1 tétel következő kiegészítése is adódik:

80.2. Tétel. *Ha $\mathfrak{F}$ és $\mathfrak{F}'$ két elliptikus másodrendű felület, s A, B, C az egyiknek, A', B', C' a másiknak három-három tetszőleges pontja, akkor van a térnek pontosan két olyan kollineációja, mely $\mathfrak{F}$-et $\mathfrak{F}'$-be, s az A, B, C pontot az A', B', C' pontba viszi át. A két leképezés $\mathfrak{F}$-nek egy megadott irányítását $\mathfrak{F}'$-nek két, egymással ellenkező irányításába viszi át.*

A **T** *kollineációnál, mely $\mathfrak{F}$-et $\mathfrak{F}'$-be viszi át, $\mathfrak{F}$ belseje $\mathfrak{F}'$ belsejébe, s $\mathfrak{F}$ külseje $\mathfrak{F}'$ külsejébe megy át.* Ugyanis $\mathfrak{F}$-nek egy tetszőleges érintősíkját a **T** leképezés $\mathfrak{F}'$-nek a megfelelő pontjához tartozó érintősíkjába viszi át, s mivel ezeknek pontjai $\mathfrak{F}$-re, illetve $\mathfrak{F}'$-re nézve külső pontok, tehát $\mathfrak{F}$ külső pontjainak **T**-nél $\mathfrak{F}'$ külső pontjai felelnek meg, és megfordítva.

Az *affin geometria* szempontjából az elliptikus másodrendű felületeknek három osztálya van: ellipszoidok, kétpalástú hiperboloidok és elliptikus paraboloidok. A tér affin leképezéseinél mindegyik felület egy ugyanahhoz az osztályhoz tartozó felületbe megy át. A **80**.2 tétel alapján megmutatjuk, hogy megfordítva, bármely két, ugyanahhoz az osztályhoz tartozó felület aequivalens egymással az affin csoport szerint.

Legyen $\mathfrak{F}$ és $\mathfrak{F}'$ két tetszőleges ellipszoid. Felvesszük az egyiknek három, páronkint konjugált átmérőjét, melyeknek az $\mathfrak{F}$ felülettel való metszéspontjai rendre A, B; C, D; G, H; az $\mathfrak{F}'$ felület három tetszőleges, páronkint konjugált átmérője legyen $A'B', C'D', G'H'$, ahol szintén A' stb. jelenti az illető átmérőnek a felülettel való metszéspontjait. Jelöljük O-val és O'-vel a két felület középpontját, s E-vel és E'-vel a GH és a $G'H'$ egyenes végtelen távoli pontját. Van a térnek két olyan kollineációja, melynél az $\mathfrak{F}$ felület $\mathfrak{F}'$-be, s az A, B, C pont az A', B', C' pontba megy át; mint a **80**.1 tétel bizonyításában láttuk, ezeknél a leképezéseknél az O és E pont rendre az O' és E' pontba, továbbá G és H a G' és H', vagy a H' és G' pontba megy át. A végtelen távoli síknak, mely az O pontnak $\mathfrak{F}$-re vonatkozó polársíkja, mindkét leképezésnél az O' pontnak az $\mathfrak{F}'$ felületre vonatkozó polársíkja, vagyis a végtelen távoli sík felel meg, tehát a leképezés a tér affinitása. E szerint:

80.3. Tétel. *Bármely két ellipszoidot átvihetünk egymásba a tér affin leképezésével úgy, hogy az egyiknek három tetszőleges, páronkint* *konjugált átmérője a másiknak három tetszőleges, páronkint konjugált átmérőjébe megy át.*

Ha $\mathfrak{F}$ és $\mathfrak{F}'$ két tetszőleges kétpalástú hiperboloid, felveszünk az υ végtelen távoli síkban két olyan, $\mathfrak{F}$-et metsző AB és CD egyenest, melyek konjugáltak egymáshoz az $\mathfrak{F}$ által az υ síkban létesített polaritásnál (más szóval: felvesszük két, $\mathfrak{F}$-et metsző konjugált átmérősík végtelen távoli AB és CD egyenesét). Ezeknek $\mathfrak{F}$-fel való metszéspontja legyen A, B, C, D, s a két egyenes metszéspontja Q. A Q pontot $\mathfrak{F}$ középpontjával összekötő egyenes és $\mathfrak{F}$ két metszéspontját jelöljük G-vel és H-val. Az $\mathfrak{F}'$ felületre vonatkozóan hasonlóan vesszük fel az A' stb. pontot. A tér olyan **T** kollineációja, mely a **80**.2 tétel értelmében az $\mathfrak{F}$ felületet $\mathfrak{F}'$-be, s az A, B, C pontot A', B', C'-be viszi át, a végtelen távoli síkot önmagának felelteti meg, tehát a leképezés a tér affinitása. Meghatározása szerint pedig az $\mathfrak{F}$ felületnek két, $\mathfrak{F}$-et metsző, konjugált átmérősíkját az $\mathfrak{F}'$ felületnek két tetszőleges, $\mathfrak{F}'$-t metsző, konjugált átmérősíkjába viszi át. Ha $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ az $\mathfrak{F}$ felületnek, és $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ az $\mathfrak{F}'$ felületnek három-három tetszőleges, páronkint konjugált átmérője, amelyek közül $\mathfrak{c}$ és $\mathfrak{c}'$ metszők, akkor a fentiek szerint átvihetjük a tér affinitásával $\mathfrak{F}$-et $\mathfrak{F}'$-be s az $\mathfrak{ac}$ és $\mathfrak{bc}$ konjugált átmérősíkokat az $\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'$ és $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ konjugált átmérősíkokba. A $\mathfrak{c}$ átmérőhöz konjugált $\mathfrak{ab}$ átmérősík a $\mathfrak{c}'$ höz konjugált $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ átmérősíkba megy át; ezért az $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ átmérők képe $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$. E szerint:

80.4. T é t e l. *Ha $\mathfrak{F}$ és $\mathfrak{F}'$ két tetszőleges kétpalástú hiperboloid, s $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ az egyiknek, $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ a másiknak három-három tetszőleges konjugált átmérője, melyek közül $\mathfrak{c}$ és $\mathfrak{c}'$ metsző, akkor van a térnek olyan affinitása, mely $\mathfrak{F}$-et $\mathfrak{F}'$-be, s az $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ átmérőket az $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ átmérőkbe viszi át.*

Végül ha $\mathfrak{F}$ és $\mathfrak{F}'$ két elliptikus paraboloid, akkor a térnek minden olyan kollineációja, mely $\mathfrak{F}$-et $\mathfrak{F}'$-be, s $\mathfrak{F}$ végtelen távoli A pontját $\mathfrak{F}'$ végtelen távoli A' pontjába viszi át, a térnek egy affinitása, mivel $\mathfrak{F}$-nek az A ponthoz tartozó érintősíkja, vagyis a végtelen távoli sík a leképezésnél $\mathfrak{F}'$-nek az A' ponthoz tartozó érintősíkjába, vagyis önmagába megy át. E szerint:

80.5. T é t e l. *Két tetszőleges elliptikus paraboloidot át lehet vinni egymásba a térnek két olyan affinitásával, mely az egyiknek két pontját a másiknak két tetszőleges pontjába viszi át.*

81. §. Az elliptikus másodrendű felületek projektív leképezéseinek jellemzése.

Sztereográfikus vetítés.

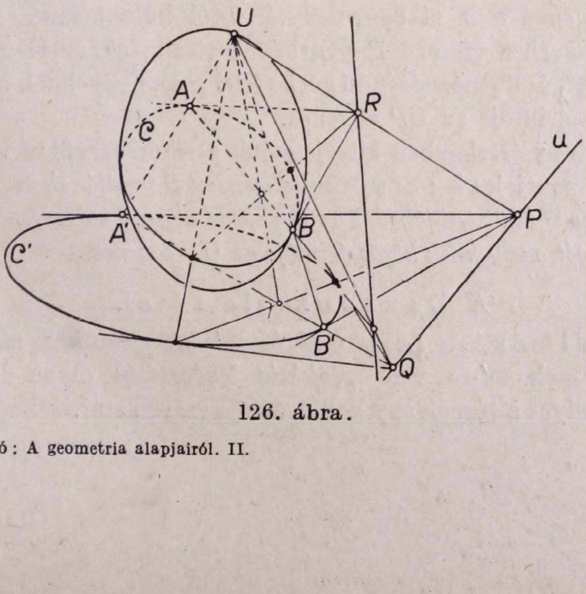
Legyen $\mathcal{F}$ egy elliptikus másodrendű felület, U ennek valamely pontja, és υ az U ponthoz tartozó érintősík. Legyen továbbá σ egy tetszőleges olyan sík, mely nem megy át az U ponton; jelöljük u-val az υ és σ sík metszésvonalát. Mivel az u egyenesnek nincs az $\mathcal{F}$ felülettel közös pontja, u-nak $\mathcal{F}$-re vonatkozóan konjugált pontjai egy **J** elliptikus involuciót alkotnak.

Az U középpontból való vetítésnél $\mathcal{F}$-nek U-tól különböző pontjai s a σ síknak u-hoz nem tartozó pontjai kölcsönösen egyértelmű módon felelnek meg egymásnak. A σ sík és az $\mathcal{F}$ felület pontjainak ezt a vonatkozását *sztereográfikus vetítés*nek nevezzük.

Legyen $\mathcal{C}$ az $\mathcal{F}$ felületnek egy olyan α síkkal való metszésvonala, mely nem megy át az U ponton. A $\mathcal{C}$ másodrendű görbét az U pontból egy másodrendű kúpfelület vetíti, s ennek a csúcsán át nem menő σ síkkal való metszésvonala egy $\mathcal{C}'$ másodrendű görbe.

81.1. *Az u egyenesen a $\mathcal{C}'$-re vonatkozóan konjugált pontok involuciója megegyezik az $\mathcal{F}$ felületre vonatkozóan konjugált pontok elliptikus involuciójával.*

Legyen ugyanis P és Q az u egyenes két olyan pontja, melyek $\mathcal{F}$-re vonatkozóan konjugáltak; P és Q az U ponthoz tartozó υ érintősík pontjai, tehát U-hoz is konjugáltak; ebből következik, hogy az UP és az UQ egyenes egymásnak $\mathcal{F}$-re vonatkozó polárisa, azaz UP



126. ábra.

bármely R pontjának ϱ polársíkja tartalmazza az UQ egyenest (és viszont). Legyen R az a síknak az UP egyenessel való metszéspontja. Az R pontból a $\mathcal{C}$ görbéhez húzott érintők A és B érintési pontja konjugált R-hez a $\mathcal{C}$ görbére, s ezért az $\mathcal{F}$ felületre vonatkozóan is, vagyis ez a két pont az R pont ϱ polársíkjához tartozik. Az A, B pontoknak az U-ból való vetítésnél a $\mathcal{C}'$ görbének a ϱ vetítősíkkal való A', B' metszéspontjai, s a $\mathcal{C}$ görbe RA, RB érintőinek a $\mathcal{C}'$ görbe PA', PB' érintői felelnek meg (**64**.4) (126. ábra). A P pontnak a $\mathcal{C}'$ görbére vonatkozó polárisa az $A'B'$ egyenes, vagyis a ϱ síknak σ-val való metszésvonala. Mivel ez az egyenes átmegy a Q ponton, tehát P és Q konjugált pontok a $\mathcal{C}'$ görbére vonatkozóan.

Hasonló meggondolással adódik a tétel következő megfordítása:

81.2. *Ha $\mathcal{C}'$ olyan másodrendű görbe a σ síkban, amelyre vonatkozóan konjugált pontok az u egyenesen ugyanazt a* **J** *elliptikus involúciót alkotják, mint az $\mathcal{F}$ felületre vonatkozóan konjugált pontok, akkor az U pontból való vetítésnél $\mathcal{C}'$-nek az $\mathcal{F}$ felületen az U ponton át nem menő $\mathcal{C}$ másodrendű görbe felel meg.*

Az $\mathcal{F}$ felületnek az U ponton átmenő síkmetszeteit az U pontból való vetítés a σ síkban fekvő egyenesekbe viszi át, s a σ sík minden, u-tól különböző egyenesének $\mathcal{F}$-en egy, az U ponton átmenő másodrendű görbe felel meg. Ha $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ az $\mathcal{F}$ felületnek két olyan, az U ponton átmenő síkmetszete, melynek U-n kívül nincs más közös pontja, akkor a két görbe α_1 és α_2 síkjának a metszésvonala érintője $\mathcal{F}$-nek, s az U pontban közös érintője a $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ görbének. Az a és u egyenesek P metszéspontja a $p_1 = \alpha_1\sigma$ és $p_2 = \alpha_2\sigma$ egyeneseknek, vagyis a két görbe vetületének közös pontja. Megfordítva, ha p_1 és p_2 két olyan egyenes a σ síkban, melyek u-tól különböznek, s egymást az u egyeneshez tartozó P pontban metszik, akkor ezeknek $\mathcal{F}$-en két olyan $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ másodrendű görbe felel meg, melyeknek az U pontban közös érintője az UP egyenes.

Ebben az értelemben kiterjesztjük a sztereográfikus vetítést az u egyenes pontjaira is: *az u egyenes minden P pontjának megfeleltetjük azoknak, az $\mathcal{F}$ felületen fekvő, s az U ponton átmenő másodrendű görbéknek a seregét, melyeknek közös érintője az UP egyenes.*

A Darboux-féle tétel.

Értelmezés. Legyen $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ *két elliptikus másodrendű felület; $\mathcal{F}$-nek $\mathcal{F}'$-re való projektív leképezésén* olyan leképezést értünk, melyet a térnek egy kollineációja származtat.

Az $\mathfrak{F}$ felületnek $\mathfrak{F}'$-re való projektív leképezésénél $\mathfrak{F}$ minden síkmetszetének, azaz minden, az $\mathfrak{F}$ felületen fekvő $\mathcal{C}$ másodrendű görbének az $\mathfrak{F}'$ felületen egy $\mathcal{C}'$ síkmetszet felel meg. Ez a tulajdonság egymagában jellemzi az elliptikus másodrendű felületek projektív leképezéseit ; ez a tartalma a következő tételnek :

81.3. Darboux-féle tétel. *Ha az $\mathfrak{F}$ elliptikus másodrendű felületnek az $\mathfrak{F}'$ elliptikus másodrendű felületre való kölcsönösen egyértelmű* **T** *leképezésénél $\mathfrak{F}$ minden síkmetszete $\mathfrak{F}'$-nek egy síkmetszetébe megy át, akkor* **T** *az $\mathfrak{F}$ felületnek $\mathfrak{F}'$-re való projektív leképezése, azaz megvalósítható a térnek egy kollineációjával.*

Bizonyítás. Legyen U az $\mathfrak{F}$ felület valamely pontja, U' az $\mathfrak{F}'$ felületnek az a pontja, melybe U a **T** leképezésnél átmegy ; jelöljük υ-nal és υ'-vel $\mathfrak{F}$-nek az U, és $\mathfrak{F}'$-nek az U' ponthoz tartozó érintősíkját. Feltesszük, hogy sem U nem tartozik υ'-höz, sem U' υ-hoz ; könnyű belátni, hogy ez a feltétel nem csorbítja az általánosságot, mivel az U pont alkalmas megválasztásával elérhető (feltéve, hogy **T** nem az azonos leképezés). Az υ és υ' síkok u metszésvonala feltételünk folytán nem megy át sem U-n, sem U'-n ; átfektetünk u-n egy σ síkot, mely nem megy át sem U-n, sem U'-n. Az $\mathfrak{F}$ felületet U-ból, s az $\mathfrak{F}'$ felületet U'-ből vetítjük a σ síkra ; ezeket a vetítéseket Σ_U, $\Sigma_{U'}$-vel jelöljük.

Az $\mathfrak{F}$ felületnek $\mathfrak{F}'$-re megadott **T** leképezését a Σ_U, $\Sigma_{U'}$ vetítésekkel átvisszük a σ síkra. Legyen P_1 a σ sík tetszőleges, u-hoz nem tartozó pontja, P a P_1 pontnak Σ_U^{-1}-nél származó képe, P' a P pont képe a **T** leképezésnél, és P_1' a P' pontnak a $\Sigma_{U'}$ vetítésnél megfelelő pont a σ síkban ; a P_1 pontnak a P_1' képpontot feleltetjük meg. A σ sík bármely két különböző, u-hoz nem tartozó pontjának két különböző, u-hoz nem tartozó képpont felel meg. Legyen Q_1 az u egyenes valamely pontja ; a Q_1U egyenesen átfektetett síkoknak $\mathfrak{F}$-fel való metszésvonalai olyan másodrendű görbék, melyeknek U-ban közös érintője a Q_1U egyenes ; közülök bármely kettőnek nincs U-n kívül más közös pontja. Ezeknek a görbéknek a **T** leképezésnél az $\mathfrak{F}'$ felületen olyan másodrendű görbék felelnek meg, melyek az U' ponton mennek át s közülük bármely kettőnek nincs U'-n kívül más közös pontja ; tehát ezeknek a görbéknek is közös az érintőjük az U' pontban ; a közös érintőnek u-val való Q_1' metszéspontját feleltetjük meg a Q_1 pontnak.

Ilyen módon meghatároztuk a σ síknak önmagára való $\mathbf{T}_1$

kölcsönösen egyértelmű leképezését, mely minden egyenest egyenesbe visz át, s ezért a síknak egy kollineációja (**26**.5). Bármely két, egymásnak megfelelő egyenes között $\mathbf{T}_1$ projektív vonatkozást létesít (**26**.1), s ugyancsak bármely két egymásnak megfelelő másodrendű görbe között is (**64**.4), így speciálisan azok között a görbék között is, melyek $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ síkmetszeteinek a sztereográfikus vetítéseknél megfelelnek. Mivel

$$\mathbf{T} = \Sigma_U \mathbf{T}_1 \Sigma_{U'}^{-1},$$

s mert Σ_U, $\mathbf{T}_1$, $\Sigma_{U'}^{-1}$ projektív leképezések, ebből következik, hogy *az $\mathcal{F}$ és az $\mathcal{F}'$ felület bármely két egymásnak megfelelő $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$ síkmetszete között a $\mathbf{T}$ leképezés projektív vonatkozást létesít.*

A $\mathcal{C}$ görbének $\mathcal{C}'$-re való $\mathbf{T}$ projektív leképezése egyértelműen meghatározza $\mathcal{C}$ síkjának $\mathcal{C}'$ síkjára való kollineációját (**64**.3). Az $\mathcal{F}$ felületet metsző síkoknak az $\mathcal{F}'$ felületet metsző síkokra ilyen módon meghatározott leképezései a térnek egy kollineációját származtatják; ezt a következő meggondolással igazoljuk.

Legyen O az $\mathcal{F}$ felület belsejének tetszőleges pontja; megmutatjuk, hogy bármely, O-n átmenő α síknak a megfelelő α' síkra való kollineációja az O pontnak ugyanazt az O' pontot felelteti meg. Felveszünk az O ponton át három olyan α, β, γ síkot, amely nem tartozik egy síksorhoz; metszésvonalukat jelöljük $a=\beta\gamma$, $b=\gamma\alpha$, $c=\alpha\beta$-val, s ezeknek $\mathcal{F}$-fel való metszéspontjait A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2-vel, továbbá az α, β, γ síknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonalát $\mathcal{C}_\alpha$, $\mathcal{C}_\beta$, $\mathcal{C}_\gamma$-val. A $\mathcal{C}_\alpha$, $\mathcal{C}_\beta$ görbéket a $\mathbf{T}$ leképezés az $\mathcal{F}'$ felület olyan $\mathcal{C}'_\alpha$, $\mathcal{C}'_\beta$ síkmetszeteibe viszi át, amelyeknek közös pontjai: C'_1, C'_2 a C_1 és a C_2 pont képe; hasonlóan az A_1, A_2 és a B_1, B_2 pontpár képe, A'_1, A'_2 és B'_1, B'_2 rendre a $\mathcal{C}'_\beta$ és $\mathcal{C}'_\gamma$, illetve a $\mathcal{C}'_\gamma$ és $\mathcal{C}'_\alpha$ görbéknek kétkét metszéspontja. A $\mathcal{C}'_\alpha$, $\mathcal{C}'_\beta$, $\mathcal{C}'_\gamma$ görbék síkját jelöljük α', β', γ'-vel. Az $a=A_1A_2$ egyenesnek az $a'=A'_1A'_2$ egyenest felelteti meg mind a β síknak β'-re, mind a γ síknak γ'-re való kollineációja; hasonló értelemben b képe a $b'=B'_1B'_2$, és c képe a $c'=C'_1C'_2$ egyenes. Az a', b', c' egyenesek közül bármely kettő egy síkban fekszik, de a három egyenes nem tartozik egy síkhoz. Ebből következik, hogy az O pontnak az a', b', c' egyenesek közös O' pontját felelteti meg mind α-nak α'-re, mind β-nak β'-re, mind γ-nak γ'-re való kollineációja.

Minthogy az $a=A_1A_2$ egyenesen átmenő bármely két síknak a megfelelő két síkra való kollineációja az a és az a' egyenesek között olyan projektív leképezéseket származtat, amelyek a-nak $\mathcal{F}$ belsejében fekvő pontjaiban megegyeznek egymással, ezért a két leképezés a minden pontjában azonos egymással. Ebből következik, hogy az $\mathcal{F}$-et metsző síkoknak az $\mathcal{F}'$-t metsző síkokra való kollineációi a tér *egyértelmű* leképezését értelmezik. Mivel fenti meggondolásunkban $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ szerepe szimmetrikus, következik továbbá, hogy a tér leképezése *kölcsönösen egyértelmű.*

Mivel az $\mathcal{F}$-et és az $\mathcal{F}'$-t metsző síkok kollineáris vonatkozással felelnek meg egymásnak, következik, hogy a tér leképezésénél minden egyenesnek egyenes felel meg, tehát a tér leképezése egy kollineáció (**45**.1), mely az $\mathcal{F}$ felületen annak $\mathcal{F}'$-re megadott **T** leképezésével megegyezik.

Az általánosított Darboux-féle tétel.

A Darboux-féle tételnek egyértelmű (de nem kölcsönösen egyértelmű) leképezésekre való általánosítását adja a következő tétel (l. Cartan: Géométrie projective complexe, 13. o.); ennek bizonyítása a **81**.3 tételnek egy másik bebizonyítását is tartalmazza.

81.4. Tétel. *Ha* **T** *az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felületnek az $\mathcal{F}'$ elliptikus másodrendű felületre való egyértelmű leképezése, amely bármely két különböző pontnak két különböző pontot, egy síkmetszeten fekvő bármely négy pontnak egy síkmetszeten fekvő négy pontot feleltet meg, s ha van $\mathcal{F}$-nek négy olyan pontja, amelynek képe nem tartozik $\mathcal{F}'$-nek egy síkmetszetéhez, akkor* **T** *az $\mathcal{F}$ felületnek $\mathcal{F}'$-re való projektív leképezése, azaz megvalósítható a térnek egy kollineációjával.*

Bizonyítás. Az $\mathcal{F}$ felület minden C síkmetszetének megfelel az $\mathcal{F}'$ felületen egy C' síkmetszet abban az értelemben, hogy bármely C-hez tartozó pont képe C'-höz tartozik; a C' görbét a C görbe **T**-nél származó képének nevezzük. Ha az $\mathcal{F}$-en fekvő C_1 és C_2 síkmetszetnek van egy vagy két közös pontja, akkor az $\mathcal{F}'$-n megfelelő C_1' és C_2' görbének legalább egy, illetve két közös pontja van, t. i. C_1 és C_2 egy vagy két közös pontjának a képe.

Az $\mathcal{F}$ felület bármely két különböző C_1 és C_2 síkmetszetének $\mathcal{F}'$-n két különböző C_1', C_2' síkmetszet felel meg. Feltevésünk szerint létezik $\mathcal{F}$-en négy olyan A, B, C, D pont, amelynek A', B', C', D' képe nem tartozik egy síkhoz. Az utóbbi négy pont között van tehát három olyan, például A', B', C', amely által meghatározott síknak $\mathcal{F}'$-vel való C_0' metszésvonala különbözik a C_1' görbétől. Az ABC sík és az $\mathcal{F}$ felület C_0 metszésvonalának a képe C_0'. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}$ felület két különböző C_1 és C_2 síkmetszetének C_1' és C_2' képe azonos.

A **T** leképezés a $\mathcal{C}_0$ görbének legfeljebb két pontját viszi át $\mathcal{C}_1'$-höz tartozó pontba; $\mathcal{C}_0$-nak egy, ezektől különböző pontján, valamint a $\mathcal{C}_1$ és a $\mathcal{C}_2$ görbe belsejének egy-egy pontján át olyan síkot fektetünk, amely $\mathcal{C}_1$-et és $\mathcal{C}_2$-t négy, egymástól különböző pontban metszi; ennek a síknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonalát jelöljük $\mathcal{C}_3$-mal, s a $\mathcal{C}_3$ görbe képét $\mathcal{C}_3'$-vel. A $\mathcal{C}_3'$ görbe különbözik $\mathcal{C}_1'$-től, mivel átmegy a $\mathcal{C}_0'$ görbének egy, $\mathcal{C}_1'$-höz nem tartozó pontján. $\mathcal{C}_3$-nak $\mathcal{C}_1$-gyel és $\mathcal{C}_2$-vel való négy metszéspontja a $\mathcal{C}_3'$ és a $\mathcal{C}_1'=\mathcal{C}_2'$ görbe két metszéspontjába menne át, tehát feltételünkkel ellenkezően két különböző pontnak ugyanaz a képpont felelne meg.

Az $\mathcal{F}$ felület külsejében értelmezünk egy $\mathbf{T}_0$ egyértelmű leképezést a következő előírással. Legyen Q az $\mathcal{F}$ felület külsejének tetszőleges pontja, $\mathcal{C}$ a Q pont polársíkjának $\mathcal{F}$-fel való metszésvonala, $\mathcal{C}'$ a $\mathcal{C}$ görbe **T**-nél származó képe, és Q' a $\mathcal{C}'$ görbe síkjának $\mathcal{F}'$-re vonatkozó pólusa; a Q pontnak a Q' képpontot feleltetjük meg. Az előbbi bekezdés szerint *bármely két különböző pontnak a* $\mathbf{T}_0$ *leképezés két különböző képpontot feleltet meg.*

Az $\mathcal{F}$ *felület* A *pontjához tartozó* α *érintősíkjának* A*-tól különböző pontjait a* $\mathbf{T}_0$ *leképezés olyan pontokba viszi át, amelyek* $\mathcal{F}'$*-nek a megfelelő* A' *ponthoz tartozó* α' *érintősíkjában feküsznek.* Az α sík A-tól különböző, tetszőleges Q pontjának $\mathcal{F}$-re vonatkozó polársíkja átmegy ugyanis az A ponton; ennek a síknak $\mathcal{F}$-fel való $\mathcal{C}$ metszésvonalát a **T** leképezés az A' ponton átmenő $\mathcal{C}'$ síkmetszetbe viszi át, s ezért $\mathcal{C}'$ síkjának $\mathcal{F}'$-re vonatkozó Q' pólusa, vagyis Q-nak $\mathbf{T}_0$-nál származó képe $\mathcal{F}'$-nek az A' ponthoz tartozó α' érintősíkjában fekszik.

Bármely, az $\mathcal{F}$ *felületet nem metsző* a *egyenes pontjainak a* $\mathbf{T}_0$ *leképezés olyan pontokat feleltet meg, amelyek egy* ($\mathcal{F}'$*-t nem metsző*) a' *egyenesen feküsznek.* Az a egyenesnek $\mathcal{F}$-re vonatkozó polárisa ugyanis az $\mathcal{F}$ felületet két A, B pontban metszi; a bármely Q pontjának $\mathcal{F}$-re vonatkozó polársíkja átmegy az A, B pontokon, a sík és az $\mathcal{F}$ felület $\mathcal{C}$ metszésvonalának $\mathcal{C}'$ képe átmegy az A, B pontok képén, A'-n és B'-n. A $\mathcal{C}'$ görbe síkjának $\mathcal{F}'$-re vonatkozó Q' pólusa tehát az $A'B'$ egyenesnek $\mathcal{F}'$-re vonatkozó a' polárisán fekszik. Az a' egyenest az a egyenes $\mathbf{T}_0$-nál származó képének nevezzük.

Legyen α az $\mathcal{F}$ felületet nem metsző sík. Az α sík bármely két különböző a, b egyenesének a $\mathbf{T}_0$ leképezés két különböző a', b' egyenest feleltet meg, amelyeknek közös pontja az a, b egyenesek metszéspontjának képe. Az α sík három olyan a, b, c egyenesének, amelynek nincs közös pontja, három olyan a', b', c' egyenes felel meg, amelynek ugyancsak nincs közös pontja. Ebből következik, hogy az α síkban fekvő összes egyenes képe egy α' síkhoz tartozik. Az α síknak α'-re $\mathbf{T}_0$ által származtatott leképezése egyértelmű, bármely két különböző pontnak két különböző pontot, egy egyenesen fekvő bármely három pontnak egy egyenesen fekvő három pontot feleltet meg, s van három olyan pont, amelynek képe nem fekszik egy egyenesen. A **26**.4 tétel szerint $\mathbf{T}_0$ *kölcsönösen egyértelmű kollineáció az* α *és az* α' *sík között.*

Legyen α és β két, az $\mathcal{F}$ felületet nem metsző sík, α' és β' ezeknek $\mathbf{T}_0$-nál származó képe. Mivel a $\mathbf{T}_0$ által származtatott kollineációja az α síknak α'-re s a β síknak β'-re megegyezik egymással az α és a β sík metszésvonalán, a **45**.8 tétel szerint van a térnek egy és csak egy olyan $\mathbf{T}_1$ kollineációja, mely az α és a β síkban megegyezik $\mathbf{T}_0$-val. A $\mathbf{T}_0$ és $\mathbf{T}_1$ leképezések megegyeznek egymással az $\mathcal{F}$ felület minden külső Q pontjában. Legyen ugyanis γ egy, a Q ponton átmenő, az $\mathcal{F}$ felületet nem metsző sík, amely nem megy át α és β metszésvonalán. A γ síknak a $\mathbf{T}_0$ leképezés egy γ' síkot feleltet meg, s a két sík között kollineációt létesít. A γ síknak a $\mathbf{T}_0$ és a $\mathbf{T}_1$ által származtatott kollineációja megegyezik egymással az α és a β síkkal való metszésvonalakon, ezért az egész γ síkban (l. **26**.10), s így nevezetesen a Q pontban is. Eszerint *az* $\mathcal{F}$ *felület külsejében értelmezett* $\mathbf{T}_0$ *leképezés kiterjeszthető az egész tér* $\mathbf{T}_1$ *kollineációjává.*

Legyen A az $\mathcal{F}$ felület tetszőleges pontja, α $\mathcal{F}$-nek A-hoz tartozó érintősíkja, A' az A pontnak $\mathbf{T}$-nél származó képe, és α' $\mathcal{F}'$-nek A'-höz tartozó érintősíkja. Mint fent megjegyeztük, az α síknak A-tól különböző pontjait a $\mathbf{T}_0$ leképezés az α' síkban fekvő pontokba viszi át. Mivel $\mathcal{F}$ külsejében a $\mathbf{T}_0$ leképezés megegyezik a $\mathbf{T}_1$ kollineációval, ezért a $\mathbf{T}_1$ kollineáció az α síkot α'-be viszi át, s α-nak A-tól különböző, azaz $\mathcal{F}$ külsejében fekvő pontjai és α'-nek $\mathcal{F}'$ külsejében fekvő, azaz A'-től különböző pontjai között kölcsönösen egyértelmű vonatkozást létesít; ebből következik, hogy az A pontnak a $\mathbf{T}_1$ kollineáció az A' pontot felelteti meg. E szerint a tér $\mathbf{T}_1$ kollineációja az $\mathcal{F}$ felületet $\mathcal{F}'$-be viszi át, s az $\mathcal{F}$ felületen megegyezik a megadott $\mathbf{T}$ leképezéssel. Ezzel bebizonyítottuk a **81**.4 tételt.

82. §. Elliptikus másodrendű felület tükrözései (antiinvoluciók).

82.1. Tétel. *Ha a Q pont nem tartozik az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felülethez, s ϱ a Q pontnak $\mathcal{F}$-re vonatkozó polársíkja, akkor a Q középponthoz és a ϱ perspektivitási síkhoz tartozó harmonikus perspektivitás önmagába viszi át az $\mathcal{F}$ felületet.*

Bizonyítás. A Q pont s a ϱ sík tetszőleges Q' pontja harmonikusan választja el egymástól a QQ' egyenesnek $\mathcal{F}$-fel való két metszéspontját; alkalmazzuk ugyanis az **59**.13 tételt $\mathcal{F}$-nek egy tetszőleges olyan síkkal való metszésvonalára, mely átmegy a QQ' egyenesen.

82.2. Tétel. *Ha a tér valamely* $\mathbf{T}_0$ *perspektivitásánál az* $\mathcal{F}$ *elliptikus másodrendű felület önmagába megy át, akkor* $\mathbf{T}_0$ *egy harmonikus perspektivitás, melynek középpontja,* Q *a perspektivitás* ϱ *síkjának* $\mathcal{F}$*-re vonatkozó pólusa.*

Bizonyítás. A Q középpontot összekötjük $\mathcal{F}$-nek egy olyan A pontjával, mely nem tartozik a perspektivitás ϱ síkjához. Mivel a perspektivitásnál nincs Q-n és ϱ pontjain kívül más fixpont, A egy tőle különböző, s a QA egyenesen és az $\mathcal{F}$ felületen fekvő B pontba megy át. Ebből következik, hogy a Q pont nem tartozhatik az $\mathcal{F}$ felülethez, s hogy QA metszője $\mathcal{F}$-nek. A $\mathbf{T}_0$ leképezésnél B egy, a QA egyenesen s $\mathcal{F}$-en fekvő pontba megy át, mely különbözik B-től; az egyetlen ilyen pont A. Tehát a $\mathbf{T}_0^2$ leképezésnél fixpontok A és B, továbbá Q, s a ϱ sík pontjai; ezért $\mathbf{T}_0^2$ az azonosság (**45**.11), s $\mathbf{T}_0$ harmonikus perspektivitás. A QA egyenesnek a ϱ síkkal való Q' metszéspontja és a Q pont harmonikusan választja el az A, B pontokat, vagyis Q' a Q pontnak $\mathcal{F}$-re vonatkozó polársíkjához tartozik. Mivel A az $\mathcal{F}$ felület tetszőleges olyan pontja, mely nem tartozik ϱ-hoz, ebből következik, hogy ϱ a Q pontnak az $\mathcal{F}$ felületre vonatkozó polársíkja.

Értelmezés. Ha Q az $\mathcal{F}$ felület külső pontja, ennek ϱ polársíkja metszője $\mathcal{F}$-nek; a Q középponthoz és ϱ síkhoz tartozó $\mathbf{T}_0$ harmonikus perspektivitás az $\mathcal{F}$ felületen olyan involutorius leképezést származtat, melynél egy $\mathcal{C}$ másodrendű görbe összes pontja fixpont ($\mathcal{C}$ a ϱ síknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonala). Az $\mathcal{F}$ felületnek ezt a leképezését *a* $\mathcal{C}$ *görbére vonatkozó tükrözés*nek vagy *elsőfajú antiinvolucíó*nak nevezzük.

Értelmezés. Ha Q az $\mathcal{F}$ felület belső pontja, ennek ϱ polársíkja nem metszi $\mathcal{F}$-et; a Q középponthoz és ϱ síkhoz tartozó $\mathbf{T}_0$ harmonikus perspektivitás az $\mathcal{F}$ felületen fixpontnélküli, involutorius leképezést származtat, melyet az $\mathcal{F}$ felületnek *a* Q *pontra vonatkozó tükrözés*ének vagy *másodfajú antiinvolucíó*nak nevezünk.

82.3. *Mind az első-, mind a másodfajú antiinvoluciók megfordítják az* $\mathcal{F}$ *felület irányítását.* Egy elsőfajú antiinvoluciónál a $\mathcal{C}$ görbe minden pontja fixpont, s a felületnek $\mathcal{C}$ által meghatározott két része egymásba megy át ; ebből következik, hogy a leképezés megfordítja $\mathcal{F}$ irányítását. Egy másodfajú antiinvolució esetében jelöljük $\mathcal{C}$-vel a perspektivitás Q középpontján átmenő tetszőleges síknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonalát ; legyen A, B, C a $\mathcal{C}$ görbe három pontja, s A', B', C' ezeknek Q-ra vonatkozó tükörképe (vagyis a QA, QB, QC egyenesnek $\mathcal{F}$-fel való másik metszéspontja). Az (ABC) és $(A'B'C')$ elrendezések a $\mathcal{C}$ görbén ugyanazt az irányítást határozzák meg, s $\mathcal{F}$-nek a $\mathcal{C}$ görbe által meghatározott két része a leképezésnél egymásba megy át. Ebből következik, hogy a Q pontra vonatkozó tükrözés is megfordítja az $\mathcal{F}$ felület irányítását.

83. §. Elliptikus másodrendű felület homográfikus leképezései.

Értelmezés. Az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület önmagára való projektív leképezését *homográfikus* vagy *antihomográfikus leképezés*nek (rövidebben : homográfiának vagy antihomográfiának) nevezzük, ha megtartja, illetve ha megfordítja az $\mathcal{F}$ felület irányítását. Az involutorius, homográfikus és antihomográfikus leképezéseket *involuciók*nak és *antiinvoluciók*nak nevezzük (l. 82. §).

Az $\mathcal{F}$ felület bármely antihomográfikus leképezése előállítható egy homográfiának egy antiinvolucióval való szorzataként ; a megadott antihomográfiának egy tetszőleges antiinvolucióval való szorzata ugyanis megtartja az $\mathcal{F}$ felület irányítását, s ezért homográfikus leképezés.

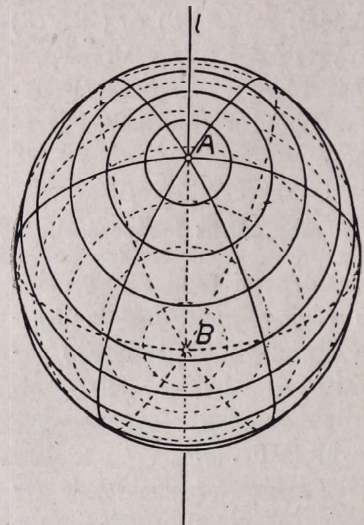
Az $\mathcal{F}$ felület három-három tetszőleges A, B, C és A', B', C' pontjának megfelel egy és csak egy olyan homográfia (s ugyancsak egy és csak egy antihomográfia), mely az A, B, C pontot az A', B', C' pontba viszi át (**80**.2). Ezt így fejezzük ki :

83.1. *Az $\mathcal{F}$ felület homográfikus leképezéseiből álló* **G** *csoport az $\mathcal{F}$ felületen háromszorosan tranzitív.*

Legyen **T** az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület olyan homográfikus leképezése, melynek $\mathcal{F}$-en két A és B fixpontja van. Jelöljük ugyancsak **T**-vel a térnek azt a kollineációját, mely $\mathcal{F}$-en a **T** homográfiát származtatja.

A **T** kollineációnak invariáns egyenese az $l=AB$ egyenes, továbbá ennek $\mathcal{F}$-re vonatkozó l' polárisa ; az utóbbi egyenes nem metszője $\mathcal{F}$-nek (**72**.10). Az $\mathcal{F}$-re nézve konjugált pontok az l' egyenesen egy **J**$'$ elliptikus involuciót, s az l egyenesen egy hiperbolikus involuciót alkotnak, mely utóbbinak fixpontjai A és B. A **T** kollineációnál az l és l' tengelyű síksor is invariáns, s ezekben az $\mathcal{F}$-re nézve konjugált síkok involuciója elliptikus, illetve hiperbolikus. (Az Al' és Bl' síkok érintősíkjai $\mathcal{F}$-nek rendre az A és a B pontban).

83.2. Az $\mathcal{F}$ felület **G** homográfikus csoportjának mindazok a **T** leképezései, melyeknek fixpontja A és B, egy alcsoportot alkotnak, melyet $\mathbf{g}_{AB}$-vel jelölünk, s az A, B fixpontokhoz tartozó *redukált alcsoport*nak nevezünk. *A* $\mathbf{g}_{AB}$ *csoport az* $\mathcal{F}$ *felületen az* A, B *pontokon kívül egyszeresen tranzitív,* azaz bármely A-tól és B-től különböző C és C' pontnak a $\mathbf{g}_{AB}$ csoport egy és csak egy olyan leképezése felel meg, mely C-t C'-be viszi át.



127. ábra.

Mivel a $\mathbf{g}_{AB}$ csoport leképezéseinél az l és az l' egyenes, valamint az ezekhez tartozó síksorok invariánsak, tehát mind az l, mind az l' tengelyű síksor elemeinek $\mathcal{F}$-fel való metszésvonalai egymásba mennek át. Az $l=AB$, és az l' egyenesen átmenő síkoknak az $\mathcal{F}$ felülettel való metszésvonalait *hosszúsági*, illetve *szélességi körök*nek nevezzük (az A, B sarkokra vonatkozóan) ; egy hosszúsági körnek az A, B pontok által meghatározott két ívét *délkör*nek nevezzük. (A 127. ábrán l' végtelen távoli egyenes.)

Elliptikus homográfiák és involuciók.

Az l' egyenesnek azok az elliptikus leképezései, melyek a $\mathbf{J}'$ elliptikus involucióval felcserélhetők, kommutatív, s az l' egyenesen egyszeresen tranzitív csoportot alkotnak (**17**.10, 11) ; legyen $\mathbf{t}_0$ ennek valamely eleme, s P' az l' egyenes P pontjának $\mathbf{t}_0$-nál származó képe. Felveszünk az AB egyenesen egy $\mathcal{F}$ belsejéhez tartozó Q pontot ; jelöljük C-vel és C'-vel a QP és a QP' egyenesnek $\mathcal{F}$-fel való egyik metszéspontját. A **45**.12 tétel szerint van a térnek egy és csak egy olyan **T** kollineációja, mely az $l=AB$ egyenesen az azonos leképezés, az l' egyenesen $\mathbf{t}_0$-val megegyezik, s a C pontot C'-be viszi át. A **T** kollineációnál a C ponton átmenő $\mathcal{C}$ szélességi kör önmagába megy át ; ugyanis $\mathcal{C}$ a Ql' síkban egy III típusú kúpszeletsorhoz tartozik, melyet a Q pont, az l' egyenes s l'-nek $\mathbf{J}'$ involuciója határoz meg. Mivel pedig **T**-nél Q és l' invariáns, s az l' egyenesen **T** felcserélhető **J**'-vel, tehát a $\mathcal{C}$ görbe képe ugyanehhez a kúpszeletsorhoz tartozik, s mert van $\mathcal{C}$-vel egy C' közös pontja, ezért azonos $\mathcal{C}$-vel. Legyen D a $\mathcal{C}$ szélességi kör tetszőleges pontja, D' a D pont **T**-nél származó képe ; az ABD síknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonala egy $\mathcal{C}_1$ hosszúsági kör, ez **T**-nél egy olyan másodrendű görbébe megy át, melynek pontjai A, B, D', s érintői az ABD' síknak az Al' és Bl' síkkal való metszésvonalai ; ez az öt adat meghatározza a D' ponton átmenő $\mathcal{C}_1'$ hosszúsági kört (**60**.12) s így $\mathcal{C}_1$-nek **T**-nél származó képe $\mathcal{C}_1'$. Ebből következik, hogy a **T** *kollineációnál az* $\mathcal{F}$ *felület önmagába megy át.*

Ha az l' egyenes $\mathbf{t}_0$ leképezése az azonosságtól különbözik, akkor **T** a térnek *elliptikus típusú, általános tengelyes kollineációja*, amelynek ponttengelye l és síktengelye l'. Ha pedig $\mathbf{t}_0$ az l' egyenes azonos leképezése, de **T** nem az azonosság, akkor **T** *kettőstengelyű hiperbolikus involució.* A **T** által $\mathcal{F}$-en származtatott leképezést mindkét esetben *elliptikus homográfiá*nak, s a második esetben *involució*nak is nevezzük. Fenti meggondolásunk eredményét a következő tételben foglaljuk össze :

83.3. Tétel. *Az A, B fixpontokhoz tartozó elliptikus homográfiák a szélességi köröket önmagukba, a hosszúsági köröket egymásba viszik át, s kommutatív csoportot alkotnak. Minden délkört bármely más délkörbe a csoportnak egy és csak egy eleme visz át.*

Az $\mathcal{F}$ felület involucióit a következő tulajdonság jellemzi (hasonlóan, mint az egyenes involucióit, l. **14**.1) :

83.4. Tétel. *Ha az $\mathcal{F}$ felület* **J** *homográfikus leképezése a felüle két pontját felcseréli egymással, akkor* **J** *involució.*

Bizonyítás. Ha az $\mathcal{F}$ felület C és D pontja **J**-nél egymásba megy át, akkor a $CD=e$ egyenes invariáns **J**-nél, s ugyancsak invariáns e-nek $\mathcal{F}$-re vonatkozó e' polárisa ; e metszője, e' nem metszője az $\mathcal{F}$ felületnek. A CD egyenesnek $\mathcal{F}$ belsejéhez tartozó CD szakasza **J**-nél önmagába megy át, végpontjai felcserélődnek, van tehát a szakaszon legalább egy O fixpont (**10**.5). Az Oe' sík, s ennek $\mathcal{F}$-fel való $\mathcal{C}$ metszésvonala invariáns **J**-nél. Mivel **J** megtartja $\mathcal{F}$ irányítását, s egymásba viszi át a C és D pontot, valamint a felületnek a $\mathcal{C}$ görbe által meghatározott két részét is, ezért **J** a $\mathcal{C}$ görbét megfordított irányítással képezi le önmagára ; ebből következik, hogy $\mathcal{C}$ önmagára való leképezése hiperbolikus ; fixpontjai legyenek A és B. Mivel a

$\mathbf{J}^2$ leképezésnek, mely megtartja $\mathcal{F}$ irányítását, $\mathcal{F}$-en négy különböző fixpontja van: A, B és C, D, azért $\mathbf{J}^2$ az azonos leképezés, azaz $\mathbf{J}$ involució. Az $l=AB$ egyenes önmagára való $\mathbf{J}$ leképezésénél fixpontok A, B és O, tehát $\mathbf{J}$ az l egyenesen az azonosság. Az O pont s az l egyenes l' polárisa által meghatározott Ol' síknak $\mathcal{F}$-fel való C' metszésvonalán $\mathbf{J}$ involuciót létesít, mely megtartja C' irányítását, tehát elliptikus; ezt a leképezést az Ol' síkban az O középpontú, l' tengelyű harmonikus perspektivitás származtatja. Ebből következik, hogy $\mathbf{J}$-nél az l' egyenesnek is minden pontja fixpont, tehát $\mathbf{J}$ az l, l' kettőstengelyekkel bíró hiperbolikus involució.

Hiperbolikus homográfiák.

A fentihez hasonló módon szerkesztünk olyan *hiperbolikus típusú, általános tengelyes kollineációk*at, melyeknek síktengelye $l=AB$, s ponttengelye l', s melyek az $\mathcal{F}$ felületet önmagába viszik át. Legyen $\mathbf{t}_0$ az AB egyenes tetszőleges olyan hiperbolikus leképezése, melynek fixpontjai A és B, s mely az $\mathcal{F}$ belsejéhez tartozó AB szakaszt önmagába viszi át; e szakasz valamely Q pontjának $\mathbf{t}_0$-nál származó képe legyen Q'. Az l' egyenes tetszőleges P pontját összekötjük Q-val és Q'-vel, s a PQ és PQ' egyenesnek $\mathcal{F}$-fel való metszéspontjai közül C, C'-vel jelölünk egy-egy olyan pontot, melyek egy délkörön feküsznek. A **45**.12 tétel szerint van a térnek egy és csak egy olyan $\mathbf{T}$ kollineációja, mely az l' egyenesen az azonosság, l-en $\mathbf{t}_0$-val megegyezik, s a C pontot C'-be viszi át. Ennél a leképezésnél az $\mathcal{F}$ felület önmagába megy át; ezt ugyanúgy láthatjuk be, mint elliptikus homográfiák esetében. $\mathbf{T}$-nél $\mathcal{F}$ délkörei önmagukba, szélességi körei egymásba mennek át. A $\mathbf{T}$ által az $\mathcal{F}$ felületen származtatott leképezést *hiperbolikus homográfiá*nak nevezzük. Jellemző tulajdonságait a következő tételben foglaljuk össze:

83.5. Tétel. *Az A, B fixpontokhoz tartozó hiperbolikus homográfiák $\mathcal{F}$ mindegyik délkörét önmagába, szélességi köreit egymásba viszik át, s kommutatív csoportot alkotnak. Minden szélességi kört bármely más szélességi körbe a csoportnak egy és csak egy eleme visz át.*

Ha C és C' az $\mathcal{F}$ felület két olyan, A-tól és B-től különböző pontja, melyek nem feküsznek sem ugyanazon a délkörön, sem ugyanazon a szélességi körön, akkor jelöljük D-vel C szélességi körének C' délkörével, továbbá D'-vel C délkörének C' szélességi körével való metszéspontját. Legyen $\mathbf{T}_1$ az az elliptikus homográfia, mely C-t D-be, s $\mathbf{T}_2$ az a hiperbolikus homográfia, mely D-t C'-be viszi át. $\mathbf{T}_1$-nél a D' pont C'-be, s $\mathbf{T}_2$-nél a C pont D'-be megy át. E szerint mind a $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$, mind a $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ leképezésnél a C pont C'-be megy át. Mivel az A, B fixpontokhoz tartozó $\mathfrak{g}_{AB}$ redukált alcsoportban csak egy olyan leképezés van, mely C-t C'-be viszi át, ebből következik, hogy $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$, vagyis, hogy *a* $\mathfrak{g}_{AB}$ *alcsoporthoz tartozó elliptikus és hiperbolikus homográfiák felcserélhetők egymással.*

Loxodromikus homográfiák.

Az A, B fixpontokhoz tartozó *loxodromikus homográfiá*nak nevezzük egy-egy, ezekhez a fixpontokhoz tartozó, s az azonosságtól különböző elliptikus és hiperbolikus homográfia szorzatát. A fenti meggondolás eredményeként kimondhatjuk a következő tételt :

83.6. Tétel. *Az A, B fixpontokhoz tartozó elliptikus, hiperbolikus és loxodromikus homográfiák együtt kommutatív csoportot alkotnak, mely az A, B pontokon kívül az $\mathcal{F}$ felületen egyszeresen tranzitív; ez a csoport tehát a $\mathfrak{g}_{AB}$ redukált alcsoporttal azonos* (l. **83**.2).

Az A, B fixpontokhoz tartozó valamely $\mathbf{T}$ loxodromikus homográfiának a tér olyan $\mathbf{T}$ kollineációja felel meg, melynél invariáns elemek az A, B pontok, az $l=AB$ és l' egyenesek, s az Al' és Bl' síkok, vagyis $\mathcal{F}$-nek A-hoz és B-hez tartozó érintősíkjai. Ha $\mathbf{T}$-nek van A-n és B-n kívül más fixpontja, akkor ez az l' egyeneshez tartozik. Ha ugyanis P egy A-tól, B-től és l' pontjaitól különböző fixpont volna, akkor P vagy az $l=AB$ egyeneshez tartozik, s ekkor $\mathbf{T}$ elliptikus homográfia, vagy pedig az AP és BP egyenesek közül legalább az egyik, például AP metszője az $\mathcal{F}$ felületnek, s A-tól különböző metszéspontja $\mathcal{F}$-nek egy harmadik fixpontja volna ; ebben az esetben pedig $\mathbf{T}$ az azonos leképezés. Ha az l' egyenes valamely P pontja $\mathbf{T}$-nél fixpont, akkor az ABP sík, s ennek $\mathcal{F}$-fel való metszésvonala, vagyis egy $\mathcal{C}_1$ hosszúsági kör invariáns ; mivel $\mathbf{T}$ feltevés szerint nem hiperbolikus, $\mathcal{C}_1$-nek az A, B pontok által meghatározott két délköre $\mathbf{T}$-nél egymásba, $\mathbf{T}^2$-nél önmagába megy át. E szerint $\mathbf{T}^2$ hiperbolikus, minden délkört önmagába visz át ; a $\mathbf{T}$ leképezés minden hosszúsági körnek két délkörét felcseréli egymással. Ebben az esetben tehát az l' egyenes minden pontja fixpont, vagyis $\mathbf{T}$ a tér *hiperbolikus típusú, általános tengelyes kollineációja.*

Ha a $\mathbf{T}$ loxodromikus homográfiának megfelelő $\mathbf{T}$ kollineációnál nincs az l' egyenesen fixpont, akkor $\mathbf{T}$-nek az A, B fixpontokon, az l, l' egyeneseken, s az Al', Bl' síkokon kívül nincs más invariáns eleme ; **T** a véges sok invariáns elemmel bíró kollineációk 3) típusához tartozik (l. **50**.3).

Parabolikus homográfiák.

Az $\mathcal{F}$ felület olyan **T** homográfikus leképezését, melynek $\mathcal{F}$-en csak egy fixpontja van, *parabolikus homográfiá*nak nevezzük.

Tegyük fel, hogy a **T** parabolikus homográfiának fixpontja az A pont ; a tér megfelelő **T** kollineációjánál $\mathcal{F}$-nek az A ponthoz tartozó α érintősíkja invariáns. Az A ponton átmegy legalább egy invariáns egyenes (**28**.1), s ez szükségképpen az α síkban fekszik, mert különben $\mathcal{F}$-fel való másik metszéspontja is fixpont volna, **T**-re vonatkozó feltevésünkkel ellentétben.

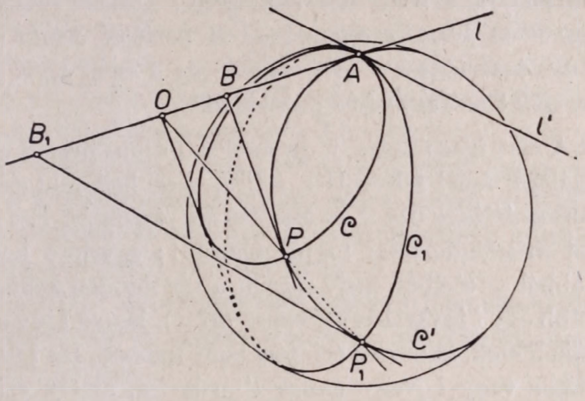
T *minden invariáns egyenese átmegy az A ponton.* Ha ugyanis b egy, az A ponton át nem menő invariáns egyenes volna, ez vagy érintője $\mathcal{F}$-nek egy A-tól különböző B pontban, mely szintén fixpont ; vagy pedig b, vagy b-nek szintén invariáns polárisa, metszője $\mathcal{F}$-nek, s a két metszéspont vagy fixpont, vagy pedig egymásba megy át **T**-nél, s ekkor is van **T**-nek $\mathcal{F}$-en két fixpontja (**83**.4). Mindez ellenkezik **T**-re vonatkozó feltevésünkkel.

Legyen a egy, az A ponton átmenő, s az α síkban fekvő invariáns egyenes ; az (A, α) sugársorban a konjugált egyenesek involuciója elliptikus, s ezért a polárisa, a' különbözik a-tól s szintén invariáns **T**-nél. Mivel az α síkban van két invariáns egyenes, tehát van még egy, A-tól különböző, B fixpont is (**29**.6). Az AB egyenest jelöljük l-lel, polárisát l'-vel. A B pont β polársíkja invariáns **T**-nél, az $\mathcal{F}$ felületet egy invariáns $\mathcal{C}$ görbében metszi. A $\mathcal{C}$ görbe önmagára való leképezése, melyet **T** származtat, parabolikus, mivel egyetlen fixpontja A ; ennek a leképezésnek kollineációs tengelye a $\mathcal{C}$ görbének az A ponthoz tartozó érintője, vagyis az l' egyenes, amelyen **T** szintén parabolikus leképezést származtat.

A térben egy **T**$'$ kollineációt értelmezünk a következő előírással : a β síkban legyen **T**$'$ azonos azzal a leképezéssel, melyet ebben a síkban a megadott **T** kollineáció származtat, s az α síkban azzal a speciális perspektivitással, melynek tengelye l, középpontja A, s mely az l' egyenesen a **T** által származtatott parabolikus leképezéssel megegyezik. A **T**$'$ kollineáció, melyet a fenti adatok egyértelműen meghatároznak (**45**.11), *parabolikus típusú, speciális tengelyes kollineáció* (**47**.9).

A **T**$'$ kollineációnál az $\mathcal{F}$ felület önmagába megy át, s minden az l'

egyenesen átmenő síkkal való metszésvonala invariáns. Legyen ugyanis β_1 egy, az l' egyenesen átmenő sík ; ennek B_1 pólusa az l egyenesen fekszik, s ezért fixpontja $\mathbf{T}'$-nek. A β_1 síknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonalát jelöljük $\mathcal{C}_1$-gyel, továbbá az A pontnak a B, B_1 pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltját O-val. *A $\mathcal{C}$ és a $\mathcal{C}_1$ görbe perspektív az O középpontra vonatkozóan,* vagyis $\mathcal{C}_1$ rajta fekszik azon az $(O, \mathcal{C})$ másodrendű kúpfelületen, mely az O pontból vetíti a $\mathcal{C}$ görbét (128. ábra).



128. ábra.

Ha ugyanis P és P_1 a $\mathcal{C}$ és a $\mathcal{C}_1$ görbe egy-egy olyan pontja, mely egy tetszőleges, az l egyenesen átmenő γ síkban fekszik, akkor a γ sík $\mathcal{F}$-fel való $\mathcal{C}'$ metszésvonalának érintői a PB és a P_1B_1 egyenesek, s a PP_1 egyenes átmegy az O ponton (**61**.8). A $\mathbf{T}'$ leképezésnél a $\mathcal{C}$ görbe invariáns, úgy mint $\mathbf{T}$-nél, mivel a $\mathcal{C}$ görbe síkjában $\mathbf{T}$ és $\mathbf{T}'$ megegyezők ; $\mathbf{T}'$-nél invariáns továbbá az O pont is, mert $\mathbf{T}'$ ponttengelyén fekszik ; ebből következik, hogy a $\mathcal{C}$ görbét az O pontból vetítő $(O, \mathcal{C})$ kúpfelület $\mathbf{T}'$-nél önmagába megy át. A β_1 sík, mivel $\mathbf{T}'$ síktengelyén, az l' egyenesen megy át, szintén invariáns $\mathbf{T}'$-nél ; ebből következik, hogy β_1-nek az $(O, \mathcal{C})$ kúpfelülettel való metszésvonala, vagyis a $\mathcal{C}_1$ görbe $\mathbf{T}'$-nél önmagába megy át. A $\mathbf{T}'$ által az $\mathcal{F}$ felületen származtatott leképezés megtartja $\mathcal{F}$ irányítását, mivel a $\mathcal{C}$ görbét megmaradó irányítással (t. i. egy parabolikus leképezéssel) önmagába, s a $\mathcal{C}$ által a felületen meghatározott két felületrészt is önmagába viszi át. Tehát $\mathbf{T}'$ az $\mathcal{F}$ felületen homográfiát származtat, mely a $\mathcal{C}$ görbén megegyezik a $\mathbf{T}$ homográfiával. Ebből következik, hogy $\mathbf{T}$ és $\mathbf{T}'$ az $\mathcal{F}$ felületen, s az egész térben is azonos egymással. Eredményünket a következő két tételben mondjuk ki :

83.7. Tétel. *Ha* **T** *az* $\mathcal{F}$ *felület parabolikus homográfiája, akkor a tér megfelelő* **T** *kollineációja parabolikus típusú, speciális tengelyes kollineáció, melynek ponttengelye és síktengelye* **T**-*nek az* $\mathcal{F}$ *felületen levő A fixpontján megy át, s az A ponthoz tartozó α érintősíkban fekszik; a két tengely egymásnak* $\mathcal{F}$-*re vonatkozó polárisa.*

83.8. Tétel. *A* **T** *parabolikus homográfiánál invariánsak azok az* $\mathcal{F}$ *felületen fekvő, s az A ponton átmenő másodrendű görbék, melyeknek közös érintője a* **T** *kollineáció síktengelye. Minden más olyan görbesereg, mely* $\mathcal{F}$-*en fekvő, s egymást az A pontban érintő másodrendű görbékből áll, invariáns a* **T** *leképezésnél, de a sereg egyik görbéje sem invariáns, ezek* **T**-*nél egymásba mennek át.*

83.9. Annak igazolására, hogy az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület homográfiáinak fenti felsorolása teljes, meg kell mutatnunk, hogy *minden homográfiának van* $\mathcal{F}$-*en legalább egy fixpontja.* Ezt a 87. §-ban geometriai meggondolással fogjuk igazolni; egyelőre levezethetjük azonban abból a tételből, mely szerint a tér minden kollineációjának van legalább egy l invariáns egyenese (**57**.2). Ha az l invariáns egyenes érintője $\mathcal{F}$-nek, akkor az érintési pont fixpont. Ha l nem érintője $\mathcal{F}$-nek, akkor vagy l, vagy ennek l' polárisa, amely szintén invariáns egyenes, metszője $\mathcal{F}$-nek. Egy $\mathcal{F}$-et metsző invariáns egyenesnek $\mathcal{F}$-fel való két metszéspontja vagy fixpont, vagy egymásba megy át; az utóbbi esetben az $\mathcal{F}$ felület megadott homográfiája involució, melynek két fixpontja van a felületen (**83**.4).

84. §. A homográfikus csoport alcsoportjairól.

Az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felületnek azok a homográfiái, melyeknek fixpontja az $\mathcal{F}$ felület U pontja, az U pontból való sztereográfikus vetítésnél egy, az U ponton át nem menő σ síkban azoknak a kollineációknak felelnek meg, melyeknek invariáns egyenese a σ síknak s az U ponthoz tartozó υ érintősíknak u metszésvonala, s melyek felcserélhetők az u egyenesen az $\mathcal{F}$-re vonatkozóan konjugált pontok **J** elliptikus involuciójával.

Az U fixpontú parabolikus homográfiáknak ilyen módon a σ síkban az u tengelyű speciális perspektivitások felelnek meg. Ha O az $\mathcal{F}$ felületnek egy U-tól különböző pontja, és O_1 az UO egyenesnek a σ síkkal való metszéspontja, akkor az O, U fixpontokkal bíró hiperbolikus homográfiáknak a σ síkban az O_1 középpontú és u tengelyű általános perspektivitások felelnek meg, melyek minden, az O_1 ponton átmenő egyenesnek az u-val való metszéspontja és az O_1 pont által meghatározott két szakaszát önmagába viszik át. Az O, U fixpontú $\mathbf{J}_{OU}$ involuciónak a sztereográfikus vetítésnél a σ síknak az O_1 középpontú és u tengelyű harmonikus perspektivitása felel meg. Egy olyan O, U fixpontú loxodromikus homográfiának, melynek négyzete hiperbolikus, a σ síkban ugyancsak egy O_1 középpontú és u tengelyű általános perspektivitás felel meg, mely azonban felcseréli egymással bármely, az O_1 ponton átmenő egyenesnek az u-val való metszéspontja és az O_1 pont által meghatározott két szakaszát. A többi loxodromikus homográfiának, valamint az elliptikus homográfiáknak, melyeknek fixpontjai O és U, a σ síkban *III* típusú kollineációk felelnek meg, melyeknél invariáns az u egyenesnek $\mathbf{J}$ involuciója és az O_1 pont által meghatározott *III* típusú kúpszeletsor. Elliptikus homográfia esetében ennek a kúpszeletsornak minden eleme invariáns, loxodromikus homográfia esetében ellenkezően: a kúpszeletsornak minden, el nem fajult görbéje egy másik görbébe megy át.

A sík projektív csoportjára vonatkozó eredményeinkből a fentiek alapján a homográfikus csoport alcsoportjaira vonatkozóan a következő tételeket kapjuk.

84.1. Tétel. *Az $\mathfrak{F}$ elliptikus másodrendű felületnek azok a parabolikus homográfiái, melyeknek közös fixpontja U, kommutatív, s az U ponton kívül az $\mathfrak{F}$ felületen egyszeresen tranzitív csoportot alkotnak. A csoport aequivalens az affin sík eltolásainak csoportjával* (l. **30**.8).

84.2. Tétel. *Az $\mathfrak{F}$ elliptikus másodrendű felületnek azok az elliptikus és parabolikus homográfiái, melyeknek közös fixpontja U, csoportot alkotnak, mely az euklidesi sík mozgáscsoportjával aequivalens* (l. **65**.20).

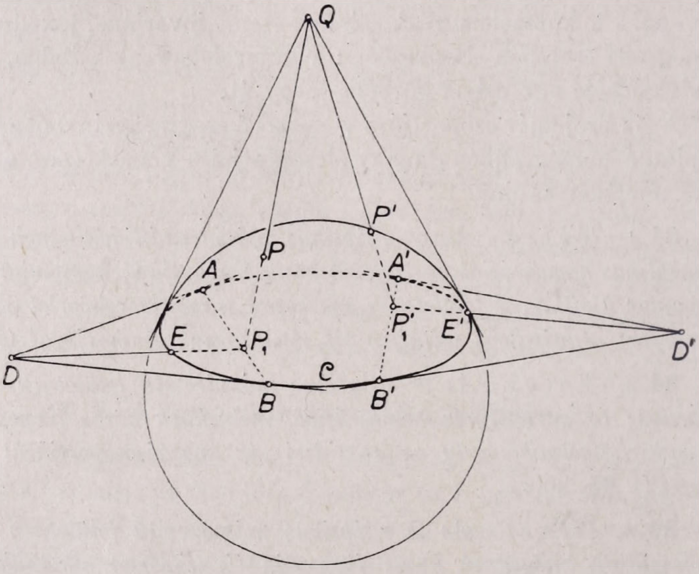
84.3. Tétel. *Az $\mathfrak{F}$ elliptikus másodrendű felületnek azok a homográfiái, melyeknek közös fixpontja U, csoportot alkotnak, amely az U ponton kívül az $\mathfrak{F}$ felületen kétszeresen tranzitív; vagyis ha A, B és A', B' az $\mathfrak{F}$ felületnek két-két tetszőleges, egymástól és U-tól különböző pontja, akkor a csoportnak egy és csak egy leképezése viszi át az A pontot az A' pontba és B-t B'-be. A csoport aequivalens az euklidesi sík hasonlósági csoportjával. A csoporthoz tartozó parabolikus homográfiák invariáns alcsoportot alkotnak.*

A homográfikus csoport más fontos alcsoportjait alkotják azok a homográfiák, melyek egy megadott első- vagy másodfajú antiinvolucióval felcserélhetők. Ezekre vonatkoznak a következő tételek.

84.4. Tétel. *Az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felületnek azok a homográfiái, melyek egy, a felületen fekvő $\mathcal{C}$ másodrendű görbét önmagába visznek át, csoportot alkotnak, s ez aequivalens a $\mathcal{C}$ görbe γ síkjának ama kollineációiból álló csoporttal, melyek a $\mathcal{C}$ görbét önmagába viszik át. A két csoportnak azok az alcsoportjai, melyek a $\mathcal{C}$ görbe irányítását megtartó leképezésekből állanak, szintén aequivalensek egymással.*

A $\mathcal{C}$ görbe bármely önmagára való projektív leképezése ugyanis meghatározza mind a γ síknak önmagára való projektív leképezését, mind az $\mathcal{F}$ felületnek egy homográfiáját (l. **64**.3 és **80**.2).

A csoport az $\mathcal{F}$ felületen a $\mathcal{C}$ görbe pontjain kívül tranzitív. Legyen ugyanis P és P' az $\mathcal{F}$ felület két tetszőleges pontja, mely nem tartozik $\mathcal{C}$-hez, továbbá Q a γ síknak az $\mathcal{F}$ felületre vonatkozó pólusa. A QP és



129. ábra.

a QP' egyenesnek a γ síkkal való metszéspontját jelöljük P_1-gyel és P_1'-vel; legyenek A, B egy, a P_1 ponton, és A', B' egy, a P_1' ponton átmenő egyenesnek a $\mathcal{C}$ görbével való metszéspontjai, D és D' az AB és az $A'B'$ egyenesnek $\mathcal{C}$-re vonatkozó pólusa, végül E és E' a P_1D, illetve a $P_1'D'$ egyenesnek a $\mathcal{C}$ görbével való egyik metszéspontja (129. ábra). Van a γ síknak egy és csak egy olyan $\mathbf{T}_0$ kollineációja, mely az A, B, D, E pontokat az A', B', D', E' pontokba, s ezért a P_1 pontot a P_1' pontba viszi át (**26**.7); ennél a leképezésnél a $\mathcal{C}$ görbe önmagába megy át (**64**.3). Van továbbá a térnek egy és csak egy olyan **T** kollineációja, mely a γ síkban $\mathbf{T}_0$-val megegyezik, s a Q pontot önmagába, és a P pontot P'-be viszi át (**45**.11); **T**-nél az $\mathcal{F}$ felület önmagába megy át (l. **80**.1). Ha **T** megfordítja $\mathcal{F}$ irányítását, megszorozzuk **T**-t azzal a harmonikus perspektivitással, amelynek középpontja a PP' egyenes polárisának $\mathcal{C}$ síkjával közös Q_0 pontja, s perspektivitási síkja Q_0-nak $\mathcal{F}$-re vonatkozó polársíkja.

84.5. Az $\mathcal{F}$ felületnek azok a homográfiái, melyeknél a $\mathcal{C}$ görbe önmagába megy át, azzal a tulajdonsággal is jellemezhetők, hogy *felcserélhetők egy elsőfajú antiinvolucióval*, t. i. a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozó tükrözéssel.

84.6. Az $\mathcal{F}$ felületnek azok a homográfiái, melyek a $\mathcal{C}$ görbét *megmaradó irányítással* önmagába viszik át, a következők:

elliptikus homográfiák, melyeknek fixpontjai egymásnak $\mathcal{C}$-re vonatkozó tükörképei;

hiperbolikus homográfiák, melyeknek fixpontjai a $\mathcal{C}$ görbe két tetszőleges pontja;

parabolikus homográfiák, melyeknek fixpontja a $\mathcal{C}$ görbének egy tetszőleges pontja; a megfelelő térbeli kollineációk síktengelye a $\mathcal{C}$ görbének a fixponthoz tartozó érintője.

84.7. Tétel. *Az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felületnek azok a homográfiái, melyek felcserélhetők egy másodfajú antiinvolucióval, csoportot alkotnak, mely aequivalens a gömbfelület forgásaiból álló csoporttal.*

Ha ugyanis a másodfajú antiinvoluciót a térnek az O középpontra és ennek o polársíkjára vonatkozó harmonikus perspektivitása származtatja, akkor vegyük fel (az $\mathcal{F}$-et nem metsző) o síkot végtelen távoli síknak, s az ebben az $\mathcal{F}$ felületre vonatkozó polaritást abszolut polaritásnak. A megadott antiinvolucióval felcserélhető homográfiáknak a tér olyan kollineációi felelnek meg, melyek az O pontot, az o síkot s az $\mathcal{F}$ felületet önmagába viszik át, s ezért felcserélhetők az o síkban az $\mathcal{F}$-re vonatkozó, vagyis az abszolut polaritással. A megfelelő homográfiák tehát az $\mathcal{F}$ gömbfelület forgásai (l. **52**.4).

85. §. Homográfiák előállítása involuciókkal és antiinvoluciókkal.

85.1. Tétel. *Ha az $\mathfrak{F}$ elliptikus másodrendű felületnek az A, B fixpontokhoz tartozó $\mathbf{J}_{AB}$ involuciójánál a felület C és D pontja egymásba megy át, akkor a C, D fixpontú $\mathbf{J}_{CD}$ involució felcseréli egymással az A és a B pontot.*

Bizonyítás. A **83**.1 tétel szerint van az $\mathfrak{F}$ felületnek egy és csak egy olyan homográfikus leképezése, mely az A, B, C pontokat a C, D, A pontokba viszi át, s a **83**.4 tétel szerint ez egy $\mathbf{J}'$ involució; ebből következik, hogy $\mathbf{J}'$-nél a D pont képe B. A $\mathbf{J}_{AB}$ involuciónak $\mathbf{J}'$-vel való transzformáltja az az involució, melynek fixpontjai A-nak és B-nek $\mathbf{J}'$-nél származó C és D képe, azaz:

$$\mathbf{J}'\mathbf{J}_{AB}\mathbf{J}' = \mathbf{J}_{CD}.$$

Az A pont $\mathbf{J}'$-nél C-be, ez a $\mathbf{J}_{AB}$ involuciónál feltevésünk szerint D-be és a D pont $\mathbf{J}'$-nél B-be megy át; e szerint a $\mathbf{J}_{CD}$ involució felcseréli egymással A-t és B-t.

85.2. Tétel. *Az $\mathfrak{F}$ elliptikus másodrendű felület minden* $\mathbf{T}$ *homográfiája előállítható két involució szorzataként.*

Bizonyítás. (CARTAN szerint). Ha a $\mathbf{T}$ homográfiának két fixpontja van, A és B, akkor legyen $\mathbf{J}_{AB}$ az A, B fixpontokhoz tartozó involució, C a fixpontoktól különböző pont, és D ennek $\mathbf{J}_{AB}$-nél származó képe. $\mathbf{T}$-nek a C, D fixpontú $\mathbf{J}_{CD}$ involucióval való $\mathbf{T}.\mathbf{J}_{CD}$ szorzata felcseréli egymással A-t és B-t, mivel ezek a pontok $\mathbf{T}$-nél invariánsak és $\mathbf{J}_{CD}$-nél egymásba mennek át (**85**.1). A **83**.4 tétel szerint tehát $\mathbf{T}.\mathbf{J}_{CD}$ egy $\mathbf{J}'$ involució, és

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}'.\mathbf{J}_{CD}.$$

Ha a $\mathbf{T}$ homográfiának csak egy A fixpontja van, legyen B tetszőleges, A-tól különböző pont, és B' ennek $\mathbf{T}$-nél származó képe. Jelentse C az A pont képét a B, B' fixpontokhoz tartozó $\mathbf{J}_{BB'}$ involuciónál. A $\mathbf{J}_{AB}$ és $\mathbf{J}_{AC}$ involuciók $\mathbf{T}' = \mathbf{J}_{AB}\mathbf{J}_{AC}$ szorzatánál invariáns az A pont, de ezenkívül nincs más fixpont. Ha ugyanis valamely, A-tól különböző P pont $\mathbf{J}_{AB}$-nél származó P' képe $\mathbf{J}_{AC}$-nél P-be menne át, akkor a P' pont $\mathbf{J}_{AB}$-nél P-be, s ez $\mathbf{J}_{AC}$-nél P'-be menne át, vagyis A, P, P' három, egymástól különböző fixpontja volna a $\mathbf{T}'$ homográfiának, ellentétben a **83**.1 tétellel. E szerint $\mathbf{T}'$ az A fixponthoz tartozó parabolikus homográfia; minthogy pedig a B pont $\mathbf{J}_{AB}$-nél önmagába, és $\mathbf{J}_{AC}$-nél B'-be megy át (**85**.1), tehát $\mathbf{T}'$ azonos $\mathbf{T}$-vel (**84**.1), s ezért:

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}_{AB} \cdot \mathbf{J}_{AC}.$$

85.3. Tétel. *Az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület két $\mathbf{J}_{AB}$ és $\mathbf{J}_{CD}$ involuciójának szorzata parabolikus homográfia, ha a két involució egyik fixpontja közös; elliptikus vagy hiperbolikus homográfia, ha a négy fixpont különböző s $\mathcal{F}$-nek egy $\mathcal{C}$ másodrendű görbéjén fekszik, és ezen az A, B és C, D pontpárok elválasztják, illetve nem választják el egymást. Ha a négy fixpont nem fekszik $\mathcal{F}$-nek egy síkmetszetén, akkor a két involució szorzata loxodromikus homográfia.*

Bizonyítás. A tételnek a parabolikus homográfiákra vonatkozó állítása már szerepelt az előző tétel bizonyításában. Ha az A, B, C, D pontok egy $\mathcal{C}$ másodrendű görbén feküsznek, ez a görbe invariáns a $\mathbf{T} = \mathbf{J}_{AB}\,\mathbf{J}_{CD}$ homográfiánál, s önmagára való leképezése elliptikus vagy a $\mathcal{C}$ görbe irányítását megtartó hiperbolikus leképezés a szerint, hogy az A, B és C, D pontpárok elválasztják, vagy nem választják el egymást a $\mathcal{C}$ görbén (l. **65**.10); ennek megfelelően az $\mathcal{F}$ felület homográfikus leképezése is elliptikus, illetve hiperbolikus. Megfordítva, ha a $\mathbf{T}$ elliptikus vagy hiperbolikus homográfia a $\mathbf{J}_{AB}$ és $\mathbf{J}_{CD}$ involuciók szorzata, akkor a két involució fixpontjai különböznek egymástól, s a négy fixpont $\mathcal{F}$-nek egy síkmetszetén fekszik. A $\mathbf{J}_{CD}$ involució felcseréli ugyanis egymással $\mathbf{T}$ két fixpontját, X-et és Y-t, s ezért a $\mathbf{J}_{XY}$ involució felcseréli egymással C-t és D-t (**85**.1). Ebből következik, hogy a CD egyenes metszi az $l = XY$ egyenest, valamint l-nek $\mathcal{F}$-re vonatkozó l' polárisát is. Hiperbolikus (illetve elliptikus) $\mathbf{T}$ homográfia esetében a Cl (illetve a Cl') invariáns síknak és az $\mathcal{F}$ felületnek $\mathcal{C}$ metszésvonalát $\mathbf{T}$ megmaradó irányítással, $\mathbf{J}_{CD}$ megfordított irányítással, tehát szorzatuk: $\mathbf{T}.\mathbf{J}_{CD} = \mathbf{J}_{AB}$ megfordított irányítással önmagába viszi át; ennek folytán a $\mathbf{J}_{AB}$ involució A, B fixpontjai a C, D pontokat tartalmazó $\mathcal{C}$ görbén feküsznek. Ebből következik végül, hogyha a két involució négy fixpontja nem tartozik $\mathcal{F}$-nek egy síkmetszetéhez, akkor szorzatuk loxodromikus homográfia.

85.4. Tétel. *Az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület minden involuciója előállítható két elsőfajú antiinvolució szorzataként.*

Bizonyítás. A $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{AB}$ involució A, B fixpontjain átfektetünk egy tetszőleges γ síkot, ennek $\mathcal{F}$-fel való metszésvonala legyen $\mathcal{C}$, s $\mathcal{F}$-re vonatkozó pólusa a C pont. A C középponthoz és a γ síkhoz tartozó harmonikus perspektivitás az $\mathcal{F}$ felületen egy $\mathbf{A}$ elsőfajú antiinvoluciót származtat, ez az $\mathcal{F}$ felületnek a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozó tükrözése. A **JA** antihomográfiánál a $\mathcal{C}$ görbe invariáns, s ennek az A, B pontok által meghatározott két íve egymásba megy át. A **JA** antihomográfia négyzeténél a $\mathcal{C}$ görbe minden pontja fixpont, s mivel $(\mathbf{JA})^2$ az $\mathcal{F}$ felület homográfiája, tehát

$$(\mathbf{JA})^2 = \mathbf{I}.$$

Ebből következik, hogy $\mathbf{JA}=\mathbf{A}'$ antiinvolució, s mivel van fixpontja (például A és B), tehát elsőfajú. E szerint:

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}'.\mathbf{A}.$$

Az $\mathbf{A}'$ antiinvolució egy, az A, B pontokon átmenő $\mathcal{C}_1$ görbére vonatkozó tükrözés. A $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}_1$ görbéket az A, B metszéspontokban egymásra *merőlegeseknek* nevezzük; ezeknek síkjai az AB tengelyű síksornak $\mathcal{F}$-re vonatkozóan konjugált elemei.

Az értelmezésből közvetlenül következik:

85.5. Tétel. *Az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület két merőleges síkmetszete bármely homográfikus, vagy antihomográfikus leképezésnél két merőleges síkmetszetbe megy át.*

A **85**.2 és 4 tétel folytán *minden homográfia előállítható négy elsőfajú antiinvolució szorzataként.*

85.6. Tétel. *Az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület minden* **T** *homográfiája, mely nem loxodromikus, előállítható két elsőfajú antiinvolució szorzataként.*

Bizonyítás. Ha a **T** homográfia elliptikus vagy hiperbolikus, akkor előállítjuk két $\mathbf{J}_{CD}$ és $\mathbf{J}_{C'D'}$ involució szorzataként; ezeknek C, D, C', D' fixpontjai $\mathcal{F}$-nek egy $\mathcal{C}$ síkmetszetén feküsznek (**85**.3). Jelöljük $\mathcal{C}_1$-gyel és $\mathcal{C}_2$-vel $\mathcal{F}$-nek azokat a síkmetszeteit, melyek a C, D, illetve a C', D' pontokban merőlegesek $\mathcal{C}$-re. A $\mathbf{J}_{CD}$ és $\mathbf{J}_{C'D'}$ involuciók előállíthatók a $\mathcal{C}$-re és a $\mathcal{C}_1$-re, illetve a $\mathcal{C}$-re és a $\mathcal{C}_2$-re vonatkozó $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}_1$, illetve $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}_2$ antiinvoluciók szorzataként (**85**.4); ezek a szorzatok felcserélhetők, mivel $\mathbf{J}_{CD}$ és $\mathbf{J}_{C'D'}$ involutorius. Tehát:

$$\mathbf{J}_{CD} = \mathbf{A}_1.\mathbf{A}, \quad \mathbf{J}_{C'D'} = \mathbf{A}.\mathbf{A}_2,$$

s ebből:

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}_{CD}.\mathbf{J}_{C'D'} = \mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2.$$

Ha **T** parabolikus és fixpontja A, akkor előállítható két $\mathbf{J}_{AB}$ és $\mathbf{J}_{AC}$ involució szorzataként; legyen $\mathcal{C}$ az $\mathcal{F}$ felületnek az A, B, C

pontokon átmenő síkmetszete és $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ azok a síkmetszetei, melyek az A és B, illetve az A és C pontokban merőlegesek $\mathcal{C}$-re. Jelöljük $\mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$-vel $\mathcal{F}$-nek a $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ görbékre vonatkozó tükrözését; mint az előbbi esetben:

$$\mathbf{J}_{AB} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}, \quad \mathbf{J}_{AC} = \mathbf{A}\,\mathbf{A}_2,$$

tehát

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}_{AB} \cdot \mathbf{J}_{AC} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2.$$

85.7. Tétel. *Az $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ elsőfajú antiinvoluciók szorzata elliptikus, parabolikus vagy hiperbolikus homográfia, ha a két tükrözés pontonként invariáns görbéjének 2, 1 vagy 0 közös pontja van.*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ jelenti a $\mathcal{C}_1$ és a $\mathcal{C}_2$ görbére vonatkozó tükrözést és l a két görbe síkjának metszésvonalát, l' pedig az l egyenesnek $\mathcal{F}$-re vonatkozó polárisát, akkor a két antiinvoluciót származtató harmonikus perspektivitások szorzatának ponttengelye a perspektivitási síkok l metszésvonala, és síktengelye a középpontokat összekötő l' egyenes. Ha $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ két pontban metszi egymást, akkor az l ponttengely $\mathcal{F}$-nek metszője, tehát $\mathbf{T}=\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ elliptikus homográfia. Ha $\mathcal{C}_1$-nek és $\mathcal{C}_2$-nek nincs közös pontja, akkor l nem metsző, tehát $\mathbf{T}$-nek a tér hiperbolikus típusú, általános tengelyes kollineációja felel meg. Az l' síktengelyen átmenő tetszőleges síknak $\mathcal{F}$-fel való $\mathcal{C}$ metszésvonalán $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ egy-egy hiperbolikus involuciót létesít, ezeknek szorzata $\mathcal{C}$-nek irányítását megtartó hiperbolikus leképezése. E szerint $\mathbf{T}$ az $\mathcal{F}$ felületnek hiperbolikus homográfiája. Végül, ha $\mathcal{C}_1$-nek és $\mathcal{C}_2$-nek egy és csak egy közös pontja van, ebben a pontban érintői $\mathcal{F}$-nek az l és l' pont- és síktengely, tehát $\mathbf{T}$ parabolikus típusú, speciális tengelyes kollineáció, s az $\mathcal{F}$ felületen parabolikus homográfia.

85.8. *Két másodfajú antiinvolució szorzata hiperbolikus homográfia, továbbá egy első- és egy másodfajú antiinvolució szorzata olyan loxodromikus homográfia, melynek négyzete hiperbolikus.* Ugyanis a két antiinvoluciónak megfelelő harmonikus perspektivitások középpontját összekötő egyenes metszője az $\mathcal{F}$ felületnek, s ez síktengelye a két harmonikus perspektivitás szorzatának. Az $\mathcal{F}$ felületnek a fixpontokon átmenő hosszúsági körei tehát invariánsak a két antiinvolució szorzatánál. Mindegyik hosszúsági körnek a fixpontok által meghatározott két délköre önmagába megy át, ha mindkét antiinvolució másodfajú; a két délkör egymásba megy át, ha az egyik antiinvolució első- s a másik másodfajú.

86. §. Elliptikus másodrendű felületek síkmetszetei.

86.1. Tétel. *Az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület három különböző pontját jelöljük U, X, Y-nal, s jelöljük $\mathbf{A}^{XY}$-nal $\mathcal{F}$-nek azt az egyértelműen meghatározott, elsőfajú antiinvolucióját, melynek fixpontja U, s mely felcseréli egymással az X és az Y pontot. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $\mathcal{F}$ felület négy A, B, C, D pontja, melyek egymástól és U-tól különböznek, $\mathcal{F}$-nek egy síkmetszetéhez tartozzék:*

$$\mathbf{A}^{AB}.\,\mathbf{A}^{BC}.\,\mathbf{A}^{CD}.\,\mathbf{A}^{DA} = \mathbf{I}.$$

Bizonyítás. Ha az A, B, C, D pontok egy síkhoz tartoznak, jelöljük l'-vel ennek a síknak s az U ponthoz tartozó υ érintősíknak a metszésvonalát, továbbá l-lel l'-nek $\mathcal{F}$-re vonatkozó polárisát. Az $\mathbf{A}^{AB}$ antiinvoluciót a térnek az a harmonikus perspektivitása származtatja, melynek középpontja az AB és l' egyenesek metszéspontja ; a perspektivitás síkja a középpontnak $\mathcal{F}$-re vonatkozó polársíkja, mely átmegy az l egyenesen. E szerint l minden pontja invariáns az $\mathbf{A}^{AB}$-nek, s hasonlóan az $\mathbf{A}^{BC}$, $\mathbf{A}^{CD}$, $\mathbf{A}^{DA}$ antiinvolucióknak megfelelő harmonikus perspektivitásoknál, tehát az l egyenes a négy perspektivitás szorzatának ponttengelye. Az A pont nem tartozik l-hez, mivel az $\mathbf{A}^{AB}$ leképezésnél B-be megy át. Ha az U pont nem tartozik az $ABCD$ síkhoz, akkor l metszi az $\mathcal{F}$ felületet két pontban, melyek közül az egyik az U pont ; az $\mathbf{A}^{AB}.\mathbf{A}^{BC}.\mathbf{A}^{CD}.\mathbf{A}^{DA}$ homográfiának fixpontjai az l egyenesnek $\mathcal{F}$-fel való két metszéspontja továbbá fixpont A is. Ha pedig U az $ABCD$ síkban fekszik, akkor ennek a síknak $\mathcal{F}$-fel való $\mathcal{C}$ metszésvonalát a négy antiinvolució szorzata parabolikus leképezéssel (l. **65**.10, 11) önmagába viszi át, s mivel ezen a görbén fixpontok A és U, ezért $\mathcal{C}$ minden pontja fixpont. Mindkét esetben :

$$\mathbf{A}^{AB}.\,\mathbf{A}^{BC}.\,\mathbf{A}^{CD}.\,\mathbf{A}^{DA} = \mathbf{I}.$$

Viszont ha fennáll ez a vonatkozás, akkor

$$\mathbf{A}^{AB}.\,\mathbf{A}^{BC} = \mathbf{A}^{AD}.\,\mathbf{A}^{DC}.$$

Az $\mathbf{A}^{AB}.\mathbf{A}^{BC}$ homográfiának megfelelő térbeli kollineáció síktengelye az ABC és υ síkok metszésvonala, az $\mathbf{A}^{AD}.\mathbf{A}^{DC}$ homográfiának megfelelő kollineáció síktengelye pedig az ADC és υ síkok metszésvonala. Mivel a két leképezés megegyezik egymással, tehát az ABC és ADC síkok azonosak, vagyis az A, B, C, D pontok egy síkban feküsznek.

86.2. Tétel. *Az $\mathfrak{F}$ elliptikus másodrendű felület síkmetszeteire, vagyis az $\mathfrak{F}$-en fekvő másodrendű görbékre érvényes a következő két tulajdonság:*

1) *az $\mathfrak{F}$ felület bármely három A, B, C pontján átmegy $\mathfrak{F}$-nek egy és csak egy síkmetszete* (t. i. az ABC síknak $\mathfrak{F}$-fel való metszésvonala);

2) *ha A, B, C, D és A', B', C', D' az $\mathfrak{F}$ felület olyan, egymástól különböző pontjai, melyek közül az*

$$ABCD, \quad ABA'B', \quad BCB'C', \quad CDC'D', \quad DAD'A'$$

pontnégyesek egy-egy síkmetszethez tartoznak, akkor az

$$A'B'C'D'$$

pontnégyes is $\mathfrak{F}$-nek egy síkmetszetéhez tartozik.

Bizonyítás. Legyen U az F felületnek az $A, B, C, D, A', B', C', D'$ pontoktól különböző, tetszőleges pontja; jelöljük, mint fent, $\mathbf{A}^{AB}$-vel azt az elsőfajú antiinvoluciót, amelynek fixpontja U, s amely felcseréli egymással A-t és B-t, stb. Feltételeink az előbbi tétel szerint a következő vonatkozásokkal aequivalensek:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}^{AB}.\,\mathbf{A}^{BC}.\,\mathbf{A}^{CD}.\,\mathbf{A}^{DA} = \mathbf{I}\,,\\
&\mathbf{A}^{A'B'} = \mathbf{A}^{A'A}.\,\mathbf{A}^{AB}.\,\mathbf{A}^{BB'},\\
&\mathbf{A}^{B'C'} = \mathbf{A}^{B'B}.\,\mathbf{A}^{BC}.\,\mathbf{A}^{CC'},\\
&\mathbf{A}^{C'D'} = \mathbf{A}^{C'C}.\,\mathbf{A}^{CD}.\,\mathbf{A}^{DD'},\\
&\mathbf{A}^{D'A'} = \mathbf{A}^{D'D}.\,\mathbf{A}^{DA}.\,\mathbf{A}^{AA'}.
\end{aligned}$$

Az utóbbi négy egyenletből szorzással adódik:

$$\mathbf{A}^{A'B'}.\,\mathbf{A}^{B'C'}.\,\mathbf{A}^{C'D'}.\,\mathbf{A}^{D'A'} = \mathbf{A}^{A'A}\left(\mathbf{A}^{AB}.\,\mathbf{A}^{BC}.\,\mathbf{A}^{CD}.\,\mathbf{A}^{DA}\right)\mathbf{A}^{AA'} = \mathbf{I},$$

s ez a vonatkozás a **86**.1 tétel szerint egyértelmű azzal, hogy az A', B', C', D' pontok egy síkban feküsznek.

Ha az $\mathfrak{F}$ felületet egy U pontjából az U ponton át nem menő, σ síkra vetítjük, s ezt a síkot *euklidesi sík*nak vesszük fel olyan módon hogy σ-nak az U ponthoz tartozó υ érintősíkkal való u metszésvonala σ végtelen távoli egyenese, s az ezen $\mathfrak{F}$-re vonatkozóan konjugált pontok involuciója az abszolut involució, akkor a **86**.2 tételnek a következő két tétel felel meg, a szerint, hogy U különbözik a felvett nyolc ponttól, vagy közülök az egyikkel egybeesik.

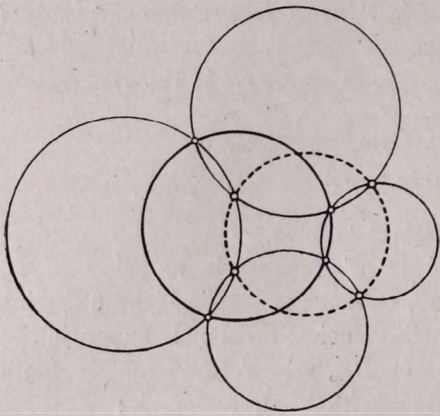
86.3. Miquel-féle tétel. *Ha A, B, C, D, A', B', C', D' az euklidesi sík egymástól különböző pontjai, s ha ezek közül egy-egy körhöz tartoznak a következő pontnégyesek:*

$$ABCD,\ ABA'B',\ BCB'C',\ CDC'D',\ DAD'A',$$

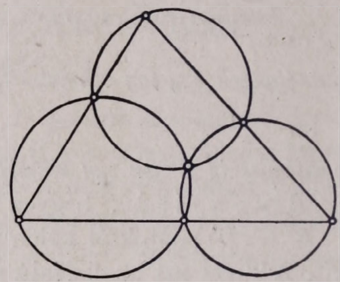
akkor az

$$A'B'C'D'$$

pontnégyes is egy körön fekszik (130. ábra).



130. ábra.



131. ábra.

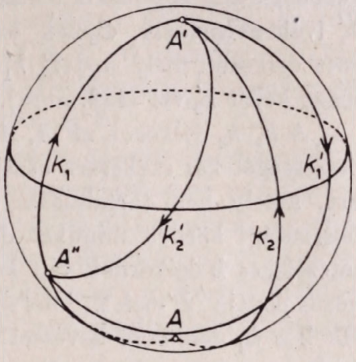
86.4. Miquel-féle tétel. *Ha a PQR háromszög PQ, QR, RP oldalának egy-egy tetszőleges, a csúcsoktól különböző pontja R', P', Q', akkor a $PQ'R'$, $QR'P'$, $RP'Q'$ pontokon átmenő köröknek van egy S közös pontja* (131. ábra). (A **86**.2 tétel jelöléseivel megegyezően: $P=A$, $Q=C, R=D'$, $P'=C'$, $Q'=A'$, $R'=B$, $S=B'$, $U=D$).

87. §. A homográfikus leképezések fixpont-tétele.

87.1. Tétel. *Az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület minden homográfikus leképezésének van legalább egy fixpontja.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy nincs $\mathcal{F}$-en egy olyan pontpár sem, melyet **T** felcserél egymással, különben **T** involutórius s van két fixpontja (**83**.4). Feltehetjük továbbá, hogy **T**-nél nem invariáns $\mathcal{F}$-nek egy síkmetszete sem; ha ugyanis $\mathcal{F}$-nek valamely $\mathcal{C}$ síkmetszete **T**-nél önmagába megy át, akkor vagy van $\mathcal{C}$-n legalább egy fixpont, vagy pedig $\mathcal{C}$ önmagára való leképezése elliptikus, s ekkor a **T**-nek megfelelő térbeli kollineációnak van $\mathcal{C}$ síkjában, $\mathcal{C}$ belsejében legalább egy P fixpontja (**65**.6); további fixpont $\mathcal{C}$ síkjának $\mathcal{F}$-re vonatkozó Q pólusa, tehát a PQ egyenes invariáns, s ennek $\mathcal{F}$-fel való metszéspontjai fixpontok, mivel **T** megtartja $\mathcal{F}$ irányítását.

Legyen A az $\mathfrak{F}$ felület tetszőleges olyan pontja, mely különbözik **T**-nél származó A' képétől; A' képe, A'' különbözik A-tól és A'-től, feltételeink folytán. Az $AA'A''$ sík és $\mathfrak{F}$ metszésvonalának, $\mathfrak{C}_1$-nek azt, az A, A' pontok által meghatározott délkörét, mely tartalmazza A''-t, jelöljük k_1-gyel, s ennek **T**-nél származó képét k_1'-vel; feltételeink folytán az A', A'' pontokat összekötő k_1' ív nem fekszik az $AA'A''$ síkban (132. ábra).



132. ábra.

Az $\mathfrak{F}$ felületnek az A' ponthoz tartozó érintősíkja legyen α'; az (A', α') sugársorban egy projektív leképezést értelmezünk a következő előírással: a sugársor tetszőleges p egyenesén és az A ponton átmenő síknak $\mathfrak{F}$-fel való metszésvonala legyen $\mathfrak{C}$, ennek **T**-nél származó képe $\mathfrak{C}'$, és $\mathfrak{C}'$ síkjának α'-vel való metszésvonala p'; a p egyenesnek a p' egyenest feleltetjük meg. A p egyenes valamely irányításának az A pontból való vetítésnél megfelel a $\mathfrak{C}$ görbe egy irányítása, ennek **T**-nél a $\mathfrak{C}'$ görbe egy irányítása, s az utóbbinak az A'' pontból való vetítésnél a p' egyenesnek egy irányítása; ezt feleltetjük meg a p egyenes megadott irányításának. Mivel a **T** leképezés megtartja az $\mathfrak{F}$ felület irányítását, az (A', α') sugársorban értelmezett leképezés megfordítja a sugársor irányítását; az A, A' sarkokhoz tartozó hosszúsági körök sorának valamely irányítása ugyanis az A és az A' pontban az $\mathfrak{F}$ felület két, egymással ellenkező irányítását határozza meg. Van tehát a sugársorban két egyenes, mely önmagának felel meg (**15**.1); ezek közül az egyiknek irányítása önmagába, a másiké az ellenkező irányításba megy át. Legyen p az az egyenes, mely a sugársor önmagára való leképezésénél megfordított irányítással önmagának felel meg. Az Ap sík és az $\mathfrak{F}$ felület metszésvonalát jelöljük $\mathfrak{C}_2$-vel; $\mathfrak{C}_2$-nek és képének, $\mathfrak{C}_2'$-nek az A' pontban közös érintője a p egyenes.

Az $\mathfrak{F}$ felületet a $\mathfrak{C}_2$ görbe két tartományra osztja fel; ezek közül azt, mely tartalmazza az A'' pontot, $\mathfrak{C}_2$ *belsejének* nevezzük. A $\mathfrak{C}_2'$ görbe $\mathfrak{C}_2$ belsejében fekszik; az $\mathfrak{F}$ felületnek azt, a $\mathfrak{C}_2'$ által határolt tartományát, amely $\mathfrak{C}_2$ belsejének része, $\mathfrak{C}_2'$ *belsejének* nevezzük. Mivel a $\mathfrak{C}_2$ és a $\mathfrak{C}_2'$ görbének p-re vonatkozóan ellenkező irányítása felel meg egymásnak, ezért a **T** leképezésnél $\mathcal{C}_2$ belseje $\mathcal{C}_2'$ külsejébe megy át. A k_1-et tartalmazó $\mathcal{C}_1$ hosszúsági körnek az A, A' pontok által meghatározott, k_1-től különböző délköre $\mathcal{C}_2$ külsejében, ennek képe $\mathcal{C}_2'$ belsejében fekszik. Ennekfolytán k_1 képe C_2' külsejében fekszik, s mivel a $\mathcal{C}_1$ görbe $\mathcal{C}_1'$ képének és $\mathcal{C}_2$-nek metszéspontja A', van a két görbének még egy másik metszéspontja, mely a fentiek szerint $\mathcal{C}_1'$-nek k_1' ívéhez tartozik. $\mathcal{C}_2$-nek azt, az A, A' pontok által meghatározott délkörét, mely metszi k_1'-t, jelöljük k_2-vel, s ennek **T**-nél származó képét k_2'-vel (132. ábra).

A k_1, k_2 délkörök az A, A' sarkok által meghatározott délkörök összességét két szakaszra osztják fel; jelöljük ezek közül (k_1, k_2)-vel azt, amely nem tartalmazza bármely az A, A' pontokon átmenő hosszúsági körnek mindkét délkörét. A (k_1, k_2) szakaszhoz tartozó tetszőleges k délkörnek van képével, k'-vel egy A'-től különböző P' közös pontja; P'-nek $\mathbf{T}^{-1}$-nél származó képe, P a k délkörhöz tartozik. Ha k a k_2 délkörtől kevéssel különbözik, akkor P' az A' pontnak, és P az A pontnak tetszőleges kis környezetében fekszik, s ezért a k délkörön való elrendezésük $APP'A'$. Ha pedig k a k_1 délkörtől kevéssel tér el, akkor P' az A'' pontnak, és P az A' pontnak tetszőleges kis környezetében fekszik, s ezért a k délkörön való elrendezésük $AP'PA'$. A (k_1, k_2) szakaszban DEDEKIND-féle szeletalkotást értelmezünk a két különböző elrendezésnek megfelelően; a szeletalkotást meghatározó k délkörnek képével, k'-vel való P' metszéspontja egybeesik $\mathbf{T}^{-1}$-nél származó P képével, vagyis fixpont a **T** leképezésnél; ezzel a fenti tételt bebizonyítottuk.

88. §. A másodrendű kúpfelületek analitikus kifejezése.

Legyenek (x_1, x_2, x_3, x_4) térbeli homogén pontkoordináták, melyeknek alaptetraédere $A_1A_2A_3A_4$, s egységpontja E. Az ugyanerre a tetraéderre vonatkozó síkkoordinátákat, melyeknek egységsíkja az E pontnak az alaptetraéderre vonatkozó polársíkja, (u_1, u_2, u_3, u_4)-gyel jelöljük. Az x pont és az u sík egyesített helyzetének feltételét az

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

egyenlet fejezi ki (l. 56. §).

Ha $\mathcal{F}$ egy másodrendű kúpfelület, vegyük fel a koordinátatetraédert úgy, hogy annak A_4 csúcsa a kúp csúcsával egybeessék. A kúpfelületnek az $A_1A_2A_3$ síkkal való metszésvonala egy $\mathcal{C}$ másodrendű görbe, melyet a 68. § szerint az (x_1, x_2, x_3) koordinátákban homogén négyzetes egyenlet fejez ki:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0 \quad (i, k=1, 2, 3) \quad (a_{ik} = a_{ki}); \tag{1}$$

ugyanez az $\mathcal{F}$ kúpfelületnek az egyenlete, mivel a kúpfelület tetszőleges, az A_4 csúcstól különböző P pontjának (x_1, x_2, x_3) koordinátái egyenlők az A_4P egyenes és az $A_1A_2A_3$ sík metszéspontjához tartozó (x_1, x_2, x_3) koordinátákkal. Az (1) négyzetes alaknak megfelelő harmadrendű determináns értéke nem 0.

Fejezzük ki az $\mathcal{F}$ kúpfelületet egy másik koordinátarendszerben. Mivel az 57. § szerint a két koordinátarendszer egymásra való transzformációját a homogén koordinátáknak egy, 0-tól különböző determinánsú, homogén lineáris transzformációja állítja elő, az (1) egyenlet baloldalán álló négyzetes alaknak általában az új koordinátáknak egy négyváltozós négyzetes alakja felel meg; jelöljük ezt következőképpen:

$$f_{xx} = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \quad (a_{ik} = a_{ki}) \tag{2}$$

ahol az a_{ik} együtthatók mások, mint az (1) egyenletben.

Az f_{xx} négyzetes alaknak megfelelő bilineáris alak:

$$f_{xy} = \sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{3}$$

Az f_{xx} négyzetes alak a_{ik} együtthatóiból alkotott determináns 0. Ennek igazolására megmutatjuk, hogy a kúpfelület csúcsának x_i koordinátái az $f_{xx} = 0$ egyenleten kívül a következőket is kielégítik:

$$f_{x_i} = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + a_{i4} x_4 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{4}$$

Nyilvánvaló ez az állítás, ha a kúp csúcsa az új koordináta-tetraéder valamelyik csúcsával egybeesik; zárjuk ki ezt az esetet. Ha például f_{x_4} értéke 0-tól különböző volna, tegyük fel, hogy a kúpfelület csúcsa nem fekszik az $A_1A_2A_3$ síkban, s jelöljük $\mathcal{C}$-vel ennek a síknak a kúpfelülettel való metszésvonalát, mely nem elfajult másodrendű görbe. A $\mathcal{C}$ görbe tetszőleges pontjának koordinátái legyenek (y_1, y_2, y_3, y_4) $(y_4 = 0)$; a

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

egyenes a kúpfelületnek alkotója, s így minden λ, μ értékre:

$$f_{\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y} = \lambda^2 f_{xx} + 2\lambda\mu f_{xy} + \mu^2 f_{yy} = 0, \tag{5}$$

tehát

$$f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 0.$$

E szerint :

$$f_{xy} = y_1 f_{x_1} + y_2 f_{x_2} + y_3 f_{x_3} = 0;$$

mivel feltevésünk szerint $f_{x_1} \neq 0$, ez egy egyenes egyenlete, melynek eleget tennének a $\mathcal{C}$ másodrendű görbe összes pontjainak (y_1, y_2, y_3) koordinátái ; ez azonban ellenmondás.

A fentiek szerint tehát a kúpfelület csúcsának (x_1, x_2, x_3, x_4) koordinátái kielégítik a (4) egyenletrendszert, s ezért az a_{ik} együtthatókból alkotott determináns értéke 0.

Megfordítva, ha az f_{xx} együtthatóiból alkotott determináns értéke 0, akkor van a (4) egyenletrendszernek nem triviális (x_1, x_2, x_3, x_4) megoldása. Ha (y_1, y_2, y_3, y_4) az $f_{xx} = 0$ egyenletnek tetszőleges másik megoldása, akkor az x és y pontokat összekötő egyenes összes pontjának koordinátái kielégítik az $f_{xx}=0$ egyenletet ; ez a fenti (4) és (5) képletek alapján nyilvánvaló. Ebben az esetben válasszuk az x pontot egy új koordinátarendszer A_4 csúcspontjának ; az új koordinátákban az f_{xx} négyzetes alaknak egy háromváltozós $f_{x'x'}$ négyzetes alak felel meg. Ha az utóbbinak együtthatóiból alkotott (harmadrendű) determináns nem 0, akkor $f_{x'x'}=0$ egy másodrendű kúpfelület egyenlete. Ha azonban az $f_{x'x'}$ négyzetes alak együtthatóiból alkotott determináns is 0, akkor ugyanilyen módon tovább csökkenthetjük a változók számát.

Az $\|a_{ik}\|$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ *mátrix rangját* következőképpen értelmezzük : ha van a mátrixnak egy r-edrendű aldeterminánsa, melynek értéke nem 0, de az összes $r+1$-edrendű aldetermináns értéke 0, akkor az r számot a *mátrix* rangjának nevezzük. Ha az $|a_{ik}|$ determináns értéke nem 0, akkor a mátrix rangja értelmezés szerint $r=4$. Ha a mátrix minden eleme 0, akkor rangja $r=0$, s megfordítva. Ennek a fogalomnak a segítségével fenti eredményünket következőképpen fogalmazhatjuk meg :

88.1. *Ha az $f_{xx'}$ négyzetes alak mátrixának rangja r, akkor az x_i változók homogén lineáris transzformációjával, melynek determinánsa 0-tól különbözik, átvihetjük f_{xx}-et egy r változójú, de nem vihetjük át r-nél kevesebb változójú négyzetes alakba.*

88.2. *Ha az f_{xx} négyzetes alak mátrixának rangja* 3, *akkor $f_{xx}=0$ egy másodrendű kúpfelület egyenlete, s megfordítva, minden másodrendű* *kúpfelület előállítható ilyen alakban.* Ha a mátrix rangja 2, vagy 1, akkor a felület síkpárrá, illetve egy kétszeresen számított síkká fajul el.

89. §. A másodrendű felületek kifejezése homogén koordinátákkal.

Az 57. §-ban megismertük, hogy a tér bármely nem szinguláris polaritását az

$$u_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

egyenletekkel állíthatjuk elő, ahol (x_1, x_2, x_3, x_4) jelenti egy tetszőleges x pontnak, s (u_1', u_2', u_3', u_4') az x pont polársíkjának a koordinátáit ; az $\| a_{ik} \|$ mátrix szimmetrikus $(a_{ik} = a_{ki})$ és determinánsa 0-tól különbözik.

Tegyük fel, hogy az (1) képlettel előállított Ω polaritás hiperbolikus ; az Ω-nál önmagukhoz konjugált pontokból álló $\mathfrak{F}$ másodrendű felület egyenlete :

$$f_{xx} = \sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, x_k = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{2}$$

Jelöljük f_{xy}-nal az f_{xx} négyzetes alaknak megfelelő bilineáris alakot :

$$f_{xy} = \sum_i x_i f_{yi} = \sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, y_k. \tag{3}$$

Az

$$f_{xy} = 0 \tag{4}$$

egyenlet azt fejezi ki, hogy az x és y pont *konjugált* az $f_{xx} = 0$ egyenlettel előállított $\mathfrak{F}$ másodrendű felületre vonatkozóan. Ha x fix, és y változó pontot jelent, akkor (4) egy síknak az egyenlete ; ez az x pontnak $\mathfrak{F}$-re vonatkozó *polársíkja*, s nevezetesen, ha az x pont az $\mathfrak{F}$ felülethez tartozik, akkor $\mathfrak{F}$-nek az x ponthoz tartozó *érintősíkja*.

Az (u_1, u_2, u_3, u_4) síkkoordinátákkal bíró sík akkor és csak akkor érintősíkja az $\mathfrak{F}$ másodrendű felületnek, ha koordinátái kielégítik az

$$F_{uu} = \sum_{i,k} A_{ik}\, u_i\, u_k = 0 \tag{5}$$

egyenletet, melyben A_{ik} jelenti az $A = | a_{ik} |$ determinánsban az a_{ik} elemhez tartozó algebrai adjungáltat (l. 57. §, (2) és (3) képlet) .

Legyen x és y a tér két tetszőleges pontja ; az x és y pontokon átmenő egyenes pontjainak z_i koordinátáit a

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{6}$$

egyenletekkel fejezhetjük ki. Ez az egyenes az $\mathcal{F}$ felületnek akkor és csak akkor *alkotója*, ha λ, μ minden értékénél

$$f_{zz} \equiv \lambda^2 f_{xx} + 2\lambda\mu f_{xy} + \mu^2 f_{yy} = 0, \tag{7}$$

vagyis, ha

$$f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 0.$$

Megfordítva, ha ez a feltétel teljesül, akkor az x, y pontokon átmenő egyenes $\mathcal{F}$-nek alkotója.

Ha a (7) egyenlet nem azonosan áll fenn, akkor általában két $\frac{\lambda}{\mu}$ érték elégíti ki; ha van az egyenletnek $\frac{\lambda}{\mu}$-re vonatkozóan két különböző valós megoldása, akkor az egyenes *metszője* $\mathcal{F}$-nek ; ha egy valós megoldása van, akkor *érintője*, s ha nincs valós gyöke, akkor az egyenes *nem metszője* az $\mathcal{F}$ felületnek. A három esetnek megfelelően a (7) egyenlet diszkriminánsa :

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

negatív, nulla, vagy pozitív.

Ha az x pont nem tartozik az $\mathcal{F}$ felülethez, akkor az x pontból $\mathcal{F}$-hez húzott érintők y érintési pontjaira fennáll az

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 \tag{8}$$

egyenlet ; fix x és változó y pontnál ez az x ponthoz tartozó *érintő kúpfelület* egyenlete, feltéve, hogy van valós y megoldása. Az $\mathcal{F}$ felülettel közös pontjaira fennáll a (8) egyenleten kívül az $f_{yy} = 0$ egyenlet is, tehát $f_{xy} = 0$, ami azt jelenti, hogy az x ponthoz tartozó érintő kúpfelületnek $\mathcal{F}$-fel közös pontjai az x pont polársíkjában feküsznek.

Az $\mathcal{F}$ felület x pontjához tartozó érintősík változó pontját jelöljük y-nal ; az érintősík egyenlete $f_{xy} = 0$; ennek az $\mathcal{F}$ felülettel való metszésvonalát az

$$f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 0$$

egyenletrendszer fejezi ki. Ha van ennek x-től különböző valós y megoldása, akkor, mivel $f_{xx} = 0$, a (7) egyenlet azonosság, s az x, y pontokat összekötő egyenes $\mathcal{F}$-nek alkotója. Az érintősíknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonala ebben az esetben egyenespár. — Megfordítva, ha valamely síknak van az $\mathcal{F}$ felülettel az x ponton átmenő közös l egyenese, akkor ez a sík $\mathcal{F}$-nek érintősíkja az l egyenes valamely pontjában. Legyen ugyanis z a sík tetszőleges olyan pontja, mely nem tartozik l-hez; z polársíkjának van l-lel legalább egy közös y pontja, s erre fennáll az $f_{yz}=0$ és az $f_{yx}=0$ egyenlet; az x, y, z pontokon átmenő sík tehát az $\mathcal{F}$ felület érintősíkja az y pontban.

Vegyük fel az $\mathcal{F}$ felület valamely pontját a koordináta-tetraéder A_4 csúcsának, s $\mathcal{F}$-nek az A_4 ponthoz tartozó érintősíkjában vegyük fel az A_2 és A_3 csúcsot. Az A_4 pont koordinátái $(0, 0, 0, 1)$, s az $A_2A_3A_4$ sík egyenlete $x_1=0$. Ha $f_{xx}=0$ jelenti az $\mathcal{F}$ felületnek erre a koordinátarendszerre vonatkozó egyenletét, akkor a $(0, 0, 0, 1)$ számnégyes kielégíti az egyenletet s ezért

$$a_{44}=0.$$

Az A_4 ponthoz tartozó érintősík egyenlete

$$a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3+a_{44}x_4=0$$

azonos az

$$x_1=0$$

egyenlettel, tehát

$$a_{24}=a_{34}=a_{44}=0, \qquad \text{és} \qquad a_{14}\neq 0.$$

Ebben a koordinátarendszerben tehát $\mathcal{F}$ egyenlete a következő:

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{14}x_1x_4+2a_{23}x_2x_3=0. \quad (9)$$

Az $x_1=0$ érintősíknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonalát az

$$a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0 \quad (10)$$

egyenlet fejezi ki; ennek baloldala két lineáris kifejezés szorzata, melyeknek együtthatói akkor és csak akkor lehetnek valósak, ha a (10) egyenlet diszkriminánsa:

$$a_{22}a_{33}-a_{23}^2\leqq 0. \quad (11)$$

Az f_{xx} négyzetes alak diszkriminánsa, vagyis az együtthatóiból alkotott determináns a következő:

$$A'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=a_{14}^2(a_{23}^2-a_{22}a_{33}),$$

ez ellenkező előjelű, mint a (11) diszkrimináns, illetve azzal együtt 0. Azonban f_{xx} diszkriminánsa nem lehet 0, különben $f_{xx} = 0$ kúpfelület egyenlete volna. Az A_4 ponthoz tartozó érintősíknak tehát vagy két közös egyenese van az $\mathcal{F}$ felülettel, vagy pedig A_4-en kívül nincs más közös pontja, a szerint, hogy A' pozitív vagy negatív.

Ha az $\mathcal{F}$ felületet egy tetszőleges másik koordinátarendszerben állítjuk elő, s ha A jelenti $\mathcal{F}$ egyenletének diszkriminánsát, B pedig annak a koordináta-transzformációnak a determinánsát, mely az előbbi koordinátarendszert a másik koordinátarendszerbe viszi át, akkor

$$A = A' . B^2,$$

mint számolással könnyen adódik, s ezért *A és A' megegyező előjelű*. Ebből következik, hogy *az $\mathcal{F}$ felület valamennyi pontja ugyanolyan típusú, mégpedig hiperbolikus vagy elliptikus, a szerint, hogy az $\mathcal{F}$-et előállító $f_{xx} = 0$ egyenlet diszkriminánsa pozitív vagy negatív* (l. 72.2).

Ha a koordináta-tetraédert úgy vesszük fel, hogy az $\mathcal{F}$ felületre vonatkozó poláris tetraéder legyen, akkor az 57. § (13) képlete szerint az Ω polaritást az $u'_i = a_{ii} x_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ egyenletrendszer, s ennek megfelelően az $\mathcal{F}$ felületet az

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0$$

egyenlet állítja elő. Ha az együtthatók közül háromnak az előjele megegyező, s a negyediké ellenkező, akkor az A diszkrimináns negatív és $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület. Ha pedig az együtthatók közül kettő pozitív, s a másik kettő negatív, akkor A pozitív és $\mathcal{F}$ hiperbolikus másodrendű felület. Mindkét esetben elérhetjük az egységpont alkalmas megválasztásával, vagy — ami ugyanaz — az

$$x'_i = \sqrt{|a_{ii}|}\, x_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

koordináta-transzformációval, hogy az együtthatók ± 1-gyel egyenlők legyenek. E szerint az *elliptikus másodrendű felületeket*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0,$$

és a *másodrendű vonalfelületeket*

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$$

alakú egyenlettel állíthatjuk elő.

90. §. A másodrendű felületek kifejezése párhuzamos koordinátákkal.

Az (x_1, x_2, x_3, x_4) homogén koordinátákat vegyük fel olyan módon, hogy $x_4 = 0$ legyen a végtelen távoli sík egyenlete. Vezessük be az

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

párhuzamos koordinátákat. Az $\mathcal{F}$ másodrendű felületet ezekkel a koordínátákkal az

$$\begin{aligned} a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} xz + 2a_{23} yz + \\ + 2a_{14} x + 2a_{24} y + 2a_{34} z + a_{44} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

egyenlet fejezi ki.

Az (x', y', z') pont *polársík*jának egyenlete:

$$\begin{aligned} (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14})x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24})y + \\ (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34})z + (a_{41}x' + a_{42}y' + a_{43}z' + a_{44}) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

melyben $a_{ik} = a_{ki}$. Ha az x', y', z' pont az $\mathcal{F}$ felülethez tartozik, akkor (2) az illető ponthoz tartozó *érintősík* egyenlete.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ *centrális másodrendű felület.* A végtelen távoli sík koordinátái: $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, $u_4 = 1$; pólusának, vagyis $\mathcal{F}$ középpontjának koordinátái a 89. § (1) képletéből:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = A_{41} : A_{42} : A_{43} : A_{44},$$

azaz:

$$x = \frac{A_{41}}{A_{44}}, \quad y = \frac{A_{42}}{A_{44}}, \quad z = \frac{A_{43}}{A_{44}};$$

mivel x, y, z véges értékek, tehát $A_{44} \neq 0$; ez a feltétel jellemzi a centrális másodrendű felületeket.

Ha az $\mathcal{F}$ felület középpontját vesszük fel az (x, y, z) koordinátarendszer kezdőpontjának, akkor $\mathcal{F}$ egyenlete a következő:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{44} = 0. \tag{3}$$

Ha az x, y, z tengelyeket úgy vesszük fel, hogy ezeknek végtelen távoli pontjai és a koordinátarendszer O kezdőpontja egy $\mathcal{F}$-re vonatkozó poláris tetraéder csúcsai legyenek, akkor $\mathcal{F}$ egyenlete a következő:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0. \tag{4}$$

Az $\mathcal{F}$ felület és az $x_4 = 0$ végtelen távoli sík metszésvonalát az (x_1, x_2, x_3) koordinátákkal az

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0 \tag{5}$$

egyenlet állítja elő. Ha a_{11}, a_{22}, a_{33} előjele megegyező (s a_{44} előjele ezekével ellenkező), akkor az (5) egyenletnek nincs valós megoldása, s ezért az $\mathcal{F}$ felületnek nincs végtelen távoli pontja, tehát $\mathcal{F}$ ellipszoid. Ha pedig a_{11}, a_{22}, a_{33} előjele nem megegyező, akkor az (5) egyenlet (nem elfajult) másodrendű görbét állít elő ; ez esetben $\mathcal{F}$ hiperboloid, mégpedig egy- vagy kétpalástú, a szerint, hogy

$$A = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

pozitív vagy negatív.

Bevezetjük a következő jelöléseket :

$$\pm a^2 = -\frac{a_{44}}{a_{11}}, \quad \pm b^2 = -\frac{a_{44}}{a_{22}}, \quad \pm c^2 = -\frac{a_{44}}{a_{33}} \, ;$$

ezeknek alkalmazásával a centrális másodrendű felületeket a következő egyenletek állítják elő (esetleg felcserélve egymással a koordináták jelölését) :

ellipszoid: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \, ;$$

kétpalástú hiperboloid : $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \, ;$$

egypalástú hiperboloid : $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \, .$$

Az *euklidesi térben* fekvő centrális másodrendű felületeket a fenti egyenletek állítják elő egy olyan (x, y, z) derékszögű koordinátarendszerben, melynek tengelyei az illető másodrendű felületnek tengelyei.

Az ellipszoid egyenletéből az $a = b = c = r$ esetben adódik a *gömb egyenlete:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

melyben $r(>0)$ a gömb sugara, s a gömb középpontja a koordinátarendszer kezdőpontja. Ha az ellipszoid egyenletében a, b, c közül kettő egyenlő, akkor az egyenlet *forgási ellipszoid*ot állít elő. Hasonlóan, $b=c$, illetve $a=b$ esetében a két-, illetve az egypalástú hiperboloid egyenlete *forgási hiperboloid*ot állít elő.

A *nem centrális másodrendű felületek* előállítása céljából vegyük fel az (x_1, x_2, x_3, x_4) homogén koordinátarendszer alaptetraéderét a következő módon. Legyen $x_4=0$ a végtelen távoli sík; ennek az $\mathfrak{F}$ felületre vonatkozó pólusa, vagyis az $x_4=0$ síkhoz tartozó érintési pont legyen az alaptetraéder A_3 csúcsa; A_4 jelentse a felületnek tetszőleges, végesben fekvő pontját. Az A_3A_4 egyenesnek $\mathfrak{F}$-re vonatkozó polárisán tetszőlegesen vesszük fel az A_1 pontot, s A_2-vel jelöljük ugyanennek az egyenesnek azt a pontját, mely A_1-hez $\mathfrak{F}$-re vonatkozóan konjugált. Ebben az esetben az $\mathfrak{F}$ felületnek az A_3 és az A_4 pontjához tartozó érintősíkját az $x_4=0$ és $x_3=0$ egyenlet állítja elő, tehát az $\mathfrak{F}$ felület $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ alakú egyenletében:

$$a_{14} = a_{24} = a_{44} = 0 \quad \text{és} \quad a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0\,;$$

mivel továbbá az A_1 és A_2 pontok konjugáltak egymáshoz, tehát

$$a_{12} = 0.$$

E szerint $\mathfrak{F}$ egyenlete:

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{34} x_3 x_4 = 0,$$

vagy párhuzamos koordinátákkal:

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{34} z = 0.$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\pm\frac{1}{p} = -\frac{a_{11}}{a_{34}}, \quad \pm\frac{1}{q} = -\frac{a_{22}}{a_{34}} \qquad (p>0,\ q>0)\,;$$

ennek alkalmazásával az $\mathfrak{F}$ felület egyenletét a következő alakban írhatjuk fel (z előjelének esetleges megváltoztatása után):

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Ha az A diszkrimináns negatív, akkor a baloldalon mindkét együttható pozitív előjelű, s az $\mathfrak{F}$ felület elliptikus paraboloid. Ha pedig A pozitív, akkor az egyenlet baloldalán álló két tag előjele ellenkező, s $\mathfrak{F}$ hiperbolikus paraboloid. A nem centrális másodrendű felületek következő kifejezését kaptuk:

elliptikus paraboloid: $$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

hiperbolikus paraboloid: $$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Ha x, y, z derékszögű koordináták az euklidesi térben, akkor a $p=q$ esetben az

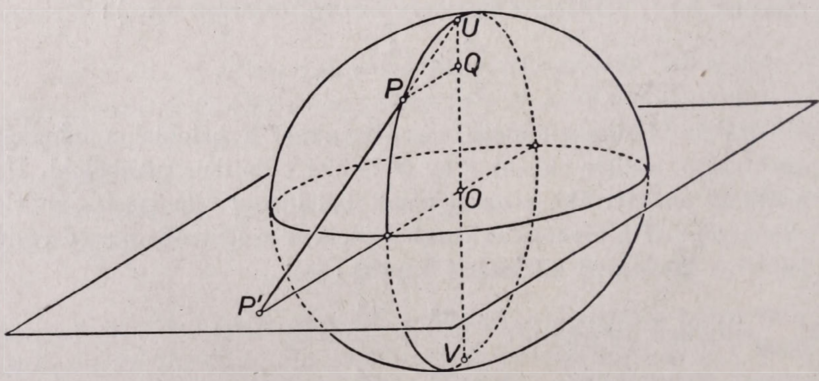
$$x^2 + y^2 = 2pz$$

egyenlet *forgási paraboloidot* állít elő.

91. §. A homográfikus leképezések analitikus kifejezése.

Legyen $\mathcal{F}$ egy elliptikus másodrendű felület, O egy, a felület belsejében fekvő pont és υ az O pontnak $\mathcal{F}$-re vonatkozó polársíkja. Az υ síkot végtelen távoli síknak vesszük fel, s az ebben az $\mathcal{F}$ felületre vonatkozó polaritást abszolut polaritásnak. Az ezáltal értelmezett *euklidesi térben $\mathcal{F}$ gömbfelület,* melynek középpontja O. Az $\mathcal{F}$ gömb sugarát vesszük fel a térben értelmezendő ξ, η, ζ derékszögű koordináták egységszakaszának; a koordinátarendszer kezdőpontja legyen O. Jelöljük a $\zeta=0$ síkot α-val, s egy tetszőleges pontjának ξ, η koordinátáit x, y-nal.

Az $\mathcal{F}$ felületnek a pozitív és a negatív ζ-tengellyel való metszéspontját jelöljük U-val és V-vel. Az U pontból való sztereográfikus vetítéssel kölcsönösen egyértelmű vonatkozást létesítünk az $\mathcal{F}$ gömbfelületnek U-tól különböző pontjai s az α sík végesben fekvő pontjai között. Ha P a gömb valamely, U-tól különböző pontja, s P' ennek az U pontból az α síkra való vetülete, továbbá Q a P ponton átmenő, s az α síkkal párhuzamos síknak az OU tengellyel való metszéspontja, akkor a P pont ξ, η, ζ és a P' pont x, y koordinátái között a következő összefüggések állanak fenn, tekintettel az UQP és UOP' derékszögű háromszögek hasonlóságára (133. ábra):



33. ábra.

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}. \tag{1}$$

Mivel $\mathfrak{F}$ egyenlete:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

tehát

$$x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{1+\zeta}{1-\zeta};$$

ebből:

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \text{és} \quad 1 - \zeta = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Az utóbbi kifejezésből s az (1) képletekből adódik:

$$\xi = x(1-\zeta) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \eta = y(1-\zeta) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}. \tag{2}$$

Az α síkban bevezetjük a

$$z = x + iy$$

komplex koordinátát ($i = \sqrt{-1}$), s ezt az U pontból való sztereográfikus vetítéssel átvisszük az $\mathfrak{F}$ gömbfelületre is; az U pontnak a $z = \infty$ értéket feleltetjük meg. Az ilyen módon komplex koordinátákkal ellátott gömbfelületet *komplex gömb*nek nevezzük. Az α síkot egy ideális, végtelen távoli ponttal bővítjük ki, melynek a $z = \infty$ értéket feleltetjük meg; ezt a síkot *zárt komplex sík*nak vagy *függvénytani sík*nak nevezzük. A komplex gömb és a függvénytani sík pontjai között az U pontból való sztereográfikus vetítés kivétel nélkül kölcsönösen egyértelmű megfelelkezést létesít.

Az $\mathfrak{F}$ gömbfelületen fekvő körök (azaz $\mathfrak{F}$ síkmetszetei) és az α síkban fekvő egyenesek és körök a sztereográfikus vetítésnél egymásnak felelnek meg (**81**.1, 2). Az α síkban fekvő körök és egyenesek egyenlete:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0 \quad \text{és} \quad ux + vy + w = 0$$

a következő alakban foglalható össze:

$$A z \bar{z} + B z + \bar{B} \bar{z} + C = 0, \tag{3}$$

ahol

$$\bar{z} = x - iy$$

jelenti a z komplex értékhez konjugált komplex értéket; hasonlóan $\bar{B}$ jelenti a B-hez konjugált komplex számot, s az A és C együtthatók valósak. A (3) egyenlet akkor és csak akkor állít elő egyenest, ha $A = 0$. Ha pedig $A \neq 0$, s ha van a (3) egyenletnek legalább két különböző megoldása, akkor (3) körnek az egyenlete; ennek szükséges és elégséges feltétele:

$$B\overline{B} - AC > 0. \tag{3'}$$

A (3) egyenletet *általános köregyenlet*nek nevezzük.

91.1. *A z komplex változó*

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

lineáris transzformációja, melynek együtthatói tetszőleges komplex számok, s determinánsa: $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, *a sík köreinek és egyeneseinek összességét önmagába viszi át.*

Ennek az állításnak igazolására helyettesítsük a (3) köregyenletben a z komplex változót a

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

komplex értékkel, s jegyezzük meg, hogy ennek konjugáltja:

$$\overline{z}' = \frac{\overline{\alpha}\overline{z} + \overline{\beta}}{\overline{\gamma}\overline{z} + \overline{\delta}}$$

A helyettesítés eredményeként (a törtek nevezőjével való szorzás után) a következő egyenletet kapjuk:

$$A_1 z\overline{z} + B_1 z + \overline{B}_1\overline{z} + C_1 = 0, \tag{4}$$

melyben:

$$\begin{aligned}
A_1 &= A\alpha\overline{\alpha} + B\alpha\overline{\gamma} + \overline{B}\overline{\alpha}\gamma + C\gamma\overline{\gamma},\\
B_1 &= A\alpha\overline{\beta} + B\alpha\overline{\delta} + \overline{B}\overline{\beta}\gamma + C\gamma\overline{\delta},\\
\overline{B}_1 &= A\overline{\alpha}\beta + B\beta\overline{\gamma} + \overline{B}\overline{\alpha}\delta + C\overline{\gamma}\delta,\\
C_1 &= A\beta\overline{\beta} + B\beta\overline{\delta} + \overline{B}\overline{\beta}\delta + C\delta\overline{\delta};
\end{aligned}$$

ezekből a kifejezésekből látható, hogy A_1 és C_1 valós, s a B_1 és $\overline{B}_1$ együtthatók konjugált komplex számok, tehát (4) is köregyenlet.

A Darboux-féle tételből (**81**.3) következik a fenti eredmény alapján, hogy *a z komplex változó tetszőleges lineáris transzformációja az $\mathfrak{F}$ felület homográfikus leképezését fejezi ki.*

Megfordítva: *$\mathfrak{F}$-nek minden homográfikus leképezése kifejezhető a z komplex változó lineáris transzformációjával.* Ennek igazolására a

83.1 tétel szerint elegendő megmutatni azt, hogy $\mathfrak{F}$ három tetszőleges pontját $\mathfrak{F}$ bármely három pontjába átvihetjük a z komplex változó lineáris transzformációjával. A három-három megadott pont legyen A, B, C és A', B', C', s az ezeknek megfelelő komplex koordinátaértékek : a, b, c és a', b', c'. A

$$z' = \frac{(z-a)(b-c)}{(z-c)(b-a)}$$

lineáris transzformáció az A, B, C pontokat a 0, 1, ∞ koordinátájú pontokba, továbbá a

$$z' = \frac{(b'-a')c'z-(b'-c')a'}{(b'-a')z \quad -(b'-c')}$$

lineáris transzformáció a 0, 1, ∞ koordinátájú pontokat az A', B', C' pontokba viszi át. A két lineáris transzformációnak ebben a sorrendben képezett szorzata, mely ugyancsak lineáris transzformáció (l. **22**.2), az A, B, C pontokat az A', B', C' pontokba viszi át.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt :

91.2. Tétel. *Az $\mathfrak{F}$ felület homográfikus leképezéseit az $\mathfrak{F}$ felületen bevezetett z komplex koordináta lineáris transzformációi állítják elő, és z minden lineáris transzformációja $\mathfrak{F}$-nek homográfikus leképezését fejezi ki.*

A

$$z' = \bar{z}$$

transzformáció minden kört körbe, s egyenest egyenesbe visz át, és az x-tengely minden pontját változatlanul hagyja ; tehát ez a transzformáció az $\mathfrak{F}$ felületnek elsőfajú antiinvolucióját fejezi ki. Minden antihomográfikus leképezés előállítható ennek az antiinvoluciónak s egy homográfiának a szorzataként. A **91**.2 tételből következik tehát :

Az $\mathfrak{F}$ felület antihomográfiáit a

$$z' = \frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$$

transzformációk állítják elő, melyeknek determinánsa: $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$.

91.3. A különböző típusú homográfiák kifejezésével fogunk most foglalkozni. Tekintsük először azokat a homográfiákat, melyeknek két fixpontja van, mégpedig a ζ-tengelynek $\mathfrak{F}$-fel való U és V metszéspontja ; ezeknek a fixpontoknak a koordinátája $z=\infty$, és $z=0$. A

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

lineáris transzformáció fixpontjai a

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha)z - \beta = 0$$

egyenlet gyökei; jelen esetben tehát

$$\beta = \gamma = 0;$$

jelöljük az $\frac{\alpha}{\delta}$ számot μ-vel. A $z=0$ és $z=\infty$ fixpontokkal bíró lineáris transzformációk közös alakja e szerint a következő:

$$z' = \mu z. \tag{5}$$

Ha a μ szorzó pozitív valós szám, akkor az (5) egyenlet valós és képzetes részének elválasztásával nyert

$$x' = \mu x, \qquad y' = \mu y$$

képletek az (x, y)-sík homothétikus leképezését fejezik ki, mely az O pontból kiinduló minden félsugarat önmagába visz át. Ezeknek a félsugaraknak az $\mathfrak{F}$ gömbfelületen az U, V pontokat összekötő délkörök felelnek meg. *Ha tehát μ pozitív valós szám, akkor az* (5) *képlet hiperbolikus homográfiát állít elő.*

Ha a μ szorzó egység abszolut értékű komplex szám, akkor az (5) *képlet elliptikus homográfiát állít elő.* Ebben az esetben ugyanis z és $z'=\mu z$ abszolut értéke egyenlő, tehát a z síkban minden, O középpontú kör önmagába megy át, s az $\mathfrak{F}$ felület leképezésénél az U, V sarkok által meghatározott szélességi körök invariánsak.

A $\mu = -1$ értéknek megfelelő $z' = -z$ *képlet az U, V fixpontokkal bíró involuciót fejezi ki.*

Végül, *ha μ nem pozitív valós szám, s abszolut értéke különbözik* 1-*től, akkor az* (5) *képlet loxodromikus homográfiát fejez ki.*

Az U fixpontú parabolikus homográfiák kifejezése:

$$z' = z + \nu, \tag{6}$$

ahol ν tetszőleges komplex (vagy valós) szám. A (6) képlettel kifejezett homográfiának ugyanis egyetlen fixpontja $U(z=\infty)$, s a ν konstans alkalmas megválasztásával elérhetjük, hogy a (6) leképezés két tetszőleges, U-tól különböző pont közül az egyiket a másikba vigye át. A **84**.1 tételből következik tehát, hogy minden, az U fixponthoz tartozó parabolikus homográfia kifejezhető a (6) képlettel.

Ha a **T** homográfiának két fixpontja van, s ezek közül az egyik U, a másiknak koordinátája z_1, akkor jelöljük **S**-sel a

$$z' = z - z_1 \tag{7}$$

lineáris transzformációt, mely z_1-et a V ($z=0$) pontba, s U-t önmagába viszi át. Ha pedig **T** fixpontjainak koordinátái a z_1, z_2 véges számok, akkor jelöljük **S**-sel a

$$z' = \frac{z - z_1}{z - z_2} \tag{8}$$

lineáris transzformációt, mely **T** fixpontjait V-be és U-ba viszi át. A **T** lineáris transzformációnak **S**-sel való transzformáltja:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{S}$$

ugyancsak lineáris transzformáció, s ennek fixpontjai a V, U pontok, tehát $\mathbf{T}'$ kifejezése a fenti (5) képlet. Ebből és a (7), (8) képletekből kapjuk a $\mathbf{T}=\mathbf{S}\mathbf{T}'\mathbf{S}^{-1}$ transzformáció következő kifejezését:

$$z' - z_1 = \mu (z - z_1), \quad \text{vagy} \quad \frac{z' - z_1}{z' - z_2} = \mu \frac{z - z_1}{z - z_2} \tag{9}$$

melyet a *két fixponttal bíró lineáris transzformáció normálalakjának* nevezünk. Mivel **T** és **T'** aequivalens egymással, ezért előbbi eredményünk szerint *a* (9) *képlet hiperbolikus vagy elliptikus homográfiát állít elő, ha a μ szorzó pozitív valós, vagy egység abszolut értékű komplex szám, más esetben pedig loxodromikus homográfiát.*

Hasonló meggondolással adódik, hogy *minden parabolikus homográfiát, melynek fixpontja az U-tól különböző, z_1 koordinátájú pont,*

$$\frac{1}{z' - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + \nu \tag{10}$$

normálalakban fejezhetünk ki.

Annak eldöntésére, milyen típusú homográfiát állít elő egy megadott lineáris transzformáció, jegyezzük meg, hogy ha a fixpontokat meghatározó

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0$$

egyenletnek csak egy gyöke van, akkor a leképezés parabolikus; ez az eset áll fenn, ha

$$\gamma = 0 \quad \text{és} \quad \alpha = \delta,$$

vagy ha

$$\gamma \neq 0 \quad \text{és} \quad (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0.$$

Más esetben a homográfiának két fixpontja van ; ha $\gamma=0$, akkor ezek közül az egyik az U pont, s a másik a

$$z_1=\frac{\beta}{\delta-\alpha}$$

koordinátájú pont, a normálalakban szereplő μ szorzó pedig

$$\mu=\frac{\alpha}{\delta}\,.$$

Ha azonban $\gamma\neq 0$, akkor a két fixpont koordinátája

$$z_1,z_2=\frac{\alpha-\delta\pm\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}{2\gamma} \tag{11}$$

a normálalak :

$$\frac{z'-z_1}{z'-z_2}=\frac{\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}-\dfrac{\alpha z_1+\beta}{\gamma z_1+\delta}}{\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}-\dfrac{\alpha z_2+\beta}{\gamma z_2+\delta}}=\frac{\gamma z_2+\delta}{\gamma z_1+\delta}\cdot\frac{z-z_1}{z-z_2},$$

s a μ szorzó kifejezése :

$$\mu=\frac{\gamma z_2+\delta}{\gamma z_1+\delta}=\frac{\alpha+\delta-\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}{\alpha+\delta+\sqrt{(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma}}\,. \tag{12}$$

91.4. *Bármely lineáris transzformáció előállítható a következő lineáris transzformációk szorzataként:*

1. *a V, U fixpontokhoz tartozó hiperbolikus homográfiák:* $z'=\mu z$ (μ pozitív valós szám)

2) *a V, U fixpontokhoz tartozó elliptikus homográfiák:* $z'=\mu z$ (μ egység abszolut értékű komplex szám) ;

3) *az U fixponthoz tartozó parabolikus homográfiák:* $z'=z+\nu$;

4) *a $z=\pm 1$ fixpontokhoz tartozó involució:* $z'=\dfrac{1}{z}$.

Ennek az állításnak analitikus bizonyítása a $\gamma=0$ esetben nyilvánvaló; ha pedig $\gamma\neq 0$, akkor a

$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma z+\delta)}$$

kifejezésből adódik, mely szerint a megadott transzformáció a következő transzformációk szorzata :

a) $z'=\gamma z$, b) $z'=z+\delta$, c) $z'=\dfrac{\gamma}{\beta\gamma-\alpha\delta}z$, d) $z'=\dfrac{1}{z}$, e) $z'=z+\dfrac{\alpha}{\gamma}$.

Ezek közül b) és e) a 3) csoporthoz tartozik, d) a 4) alatt jelzett involució, a) és c) pedig előállítható 1) és 2)-höz tartozó leképezések szorzataként.

A fenti állítás geometriai bizonyítása a következő meggondolással adódik.

Minden olyan **T** *homográfia, melynek fixpontja* U $(z=\infty)$, *előállítható az* 1), 2) *és* 3) *csoportokhoz tartozó homográfiák szorzataként.* Legyen ugyanis A az U és V $(z=0)$ pontoktól különböző pont, $A'=\mathbf{T}(A)$ és $V'=\mathbf{T}(V)$ az A és a V pont képe. Jelöljük $\mathbf{T}_1$-gyel azt a parabolikus homográfiát, melynek fixpontja U, s mely V'-t V-be viszi át (**84.**1); legyen $A_1=\mathbf{T}_1(A')$. Jelöljük $\mathbf{T}_2$-vel azt a V, U fixpontokkal bíró elliptikus homográfiát, mely az A_1 ponton átmenő délkört az A ponton átmenő délkörbe viszi át, s legyen $A_2=\mathbf{T}_2(A_1)$. Jelöljük $\mathbf{T}_3$-mal azt a V, U fixpontokkal bíró, hiperbolikus homográfiát, mely A_2-t A-ba viszi át. A **T** és a $(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3)^{-1}$ homográfiák az U, V, A pontokat az U, V', A' pontokba viszik át, ezért azonosak egymással (**83.**1), azaz:

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}_3^{-1}\mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{T}_1^{-1}.$$

Minden olyan $\mathbf{J}'$ *involució, melynek fixpontjai különböznek* U*-tól, előállítható a* $z=\pm 1$ *fixpontokkal bíró* **J** *involuciónak egy* U *fixpontú* $\mathbf{T}'$ *homográfiával való transzformáltjaként.* Ugyanis egy U fixpontú $\mathbf{T}'$ homográfiával átvihetjük a $z=\pm 1$ pontokat a $\mathbf{J}'$ involució fixpontjaiba, s így

$$\mathbf{J}'=\mathbf{T}'^{-1}\mathbf{J}\mathbf{T}'.$$

A $\mathbf{J}'$ involuciót ilyen módon 1), 2), 3) és 4) típusú leképezések szorzataként állíthatjuk elő.

Minden olyan **S** *homográfia, melynél az* U *pont nem invariáns, előállítható egy* U *fixpontú* **T** *homográfiának s egy olyan* $\mathbf{J}'$ *involuciónak a szorzataként, melynek fixpontjai különböznek* U*-tól.* Jelöljük ugyanis C-vel U-nak **S**-nél származó képét, és legyen A, B két olyan pont, mely a C, U fixpontokkal bíró $\mathbf{J}_{CU}$ involuciónál egymásba megy át. A **85.**1 tétel szerint az A, B fixpontokkal bíró $\mathbf{J}_{AB}=\mathbf{J}'$ involució egymásba viszi át C-t és U-t. Legyen A' és B' az A és a B pont képe, az $\mathbf{S}^{-1}$ leképezésnél. Jelöljük **T**-vel azt a homográfiát, mely az A', B', U pontokat az A, B, U pontokba viszi át. A $\mathbf{TJ}'$ homográfiánál ugyanúgy mint **S**-nél, az A', B', U pontok az A, B, C pontokba mennek át, s ezért

$$\mathbf{S}=\mathbf{TJ}'.$$

A fenti három állítás összefoglalásából következik, hogy az **S** homográfia előállítható 1), 2), 3), 4) típusú homográfiák szorzataként. Ezt az eredményt a következő tételben fejezzük ki:

Ha az U fixpontú homográfiák csoportját egy tetszőleges olyan **J** *involucióval bővítjük, melynek nem fixpontja U, a bővített csoport* (mely értelmezés szerint tartalmazza az eredeti csoport elemeiből s **J**-ből alkotott összes szorzatokat) *a teljes homográfikus csoporttal azonos.*

Valós együtthatójú lineáris transzformációk.

91.5. *A homográfikus csoportnak azt az alcsoportját, melynél az x-tengely, illetve az ennek az $\mathcal{F}$ felületen megfelelő $\mathcal{C}$ hosszúsági kör önmagába megy át, a valós együtthatójú lineáris transzformációk állítják elő.*

Ha ugyanis az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ együtthatók valósak, akkor minden valós z értéknek valós z' érték felel meg, tehát az x-tengely a leképezésnél önmagába megy át. Megfordítva, ha egy **T** homográfikus leképezésnél az x-tengelynek megfelelő $\mathcal{C}$ hosszúsági kör önmagába megy át, akkor ennek önmagára való projektív leképezése, melyet **T** származtat, kifejezhető egy valós együtthatójú

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

lineáris transzformációval (**66**.4). A z komplex változónak ugyanezekkel az együtthatókkal képezett

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

lineáris transzformációja az $\mathcal{F}$ felületnek olyan homográfikus leképezését állítja elő, mely a $\mathcal{C}$ hosszúsági körön s ezért az egész felületen is megegyezik a megadott **T** homográfikus leképezéssel.

Jelöljük z' valós és képzetes részét x'-vel és iy'-vel; ha az együtthatók valósak, akkor

$$y' = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma) . y}{(\gamma x + \delta)^2 + \gamma^2 y^2},$$

tehát y és y' előjele megegyező vagy ellenkező, a szerint, hogy az $\alpha\delta - \beta\gamma$ determináns pozitív vagy negatív. Az első esetben a $\mathcal{C}$ hosszúsági kör irányítása változatlan marad, s a $\mathcal{C}$ által a felületen meghatározott két rész közül mindegyik önmagába megy át. A második esetben a leképezés megfordítja a $\mathcal{C}$ hosszúsági kör irányítását s egymásba viszi át az $\mathfrak{F}$ felületnek $\mathcal{C}$ által meghatározott két részét. (Ennek az eredménynek más levezetését l. 22. §).

Ha az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ valós együtthatókkal képezett

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

lineáris transzformációnak a valós tengelyen nincs fixpontja, akkor a megfelelő homográfia *elliptikus*, mivel a (12) képlet szerint a μ szorzó egység abszolut értékű komplex szám. A leképezés két fixpontjának két konjugált komplex koordináta felel meg a (11) képlet szerint. Mindazok a valós együtthatójú lineáris transzformációk, melyeknek fixpontjai ugyanazok a konjugált komplex számok, együtt egytagú ciklikus csoportot alkotnak. A csoport tartalmaz egy involuciót, mely a valós tengelyen (mint projektiv egyenesen) elliptikus involuciót származtat. A csoport elemei által az x-tengelyen származtatott elliptikus leképezéseket az a tulajdonság jellemzi, hogy felcserélhetők a nevezett elliptikus involucióval (l. 18. §).

Ha a fenti transzformációnak két valós fixpontja van, akkor a leképezés vagy *hiperbolikus*, vagy olyan *loxodromikus* homográfia, melynek négyzete hiperbolikus, vagy pedig egy *involució*. (Az elnevezés más, mint az, amelyet a valós egyenes önmagára való projektív leképezéseinek tárgyalásakor használtunk; azokat a loxodromikus leképezéseket, melyeknek négyzete hiperbolikus, az egyenes projektív leképezéseinek felsorolásában az irányítást megfordító hiperbolikus leképezéseknek neveztük.) — Végül, ha egy valós együtthatójú lineáris transzformációnak egy valós fixpontja van, akkor a megfelelő leképezés *parabolikus*.

A gömb forgásai.

91.6. A homográfikus leképezések csoportjában a gömb forgásait az a tulajdonság jellemzi, hogy egy forgás a gömb bármely két átellenes pontját két átellenes pontba viszi át (**84**.7). A gömb két átellenes pontjának koordinátái:

$$\xi, \eta, \zeta \quad \text{és} \quad -\xi, -\eta, -\zeta;$$

az ezeknek megfelelő komplex koordináták az (1) képletek szerint:

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} \quad \text{és} \quad z_0 = \frac{-\xi - i\eta}{1 + \zeta},$$

E két szám közül az egyiknek a másik konjugáltjával való szorzata :

$$\bar{z}.z_0 = \frac{-\xi^2-\eta^2}{1-\zeta^2} = -1,$$

tehát :

$$z_0 = -\frac{1}{\bar{z}}.$$

A gömb valamely **T** forgásánál a z és a $z_0 = -\frac{1}{\bar{z}}$ koordinátájú pontok képe :

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{és} \quad z_0' = \frac{\alpha\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) + \beta}{\gamma\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) + \delta} = \frac{\beta\bar{z} - \alpha}{\delta\bar{z} - \gamma};$$

mivel ezek átellenes pontok, tehát $z_0' = -\frac{1}{\bar{z}'}$, azaz :

$$\frac{-\bar{\gamma}\bar{z} - \bar{\delta}}{\bar{\alpha}\bar{z} + \bar{\beta}} = \frac{\beta\bar{z} - \alpha}{\delta\bar{z} - \gamma}. \tag{13}$$

Feltehetjük, hogy a transzformáció determinánsa :

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1;$$

ez esetben $\bar{\alpha}\bar{\delta} - \bar{\beta}\bar{\gamma}$ is egyenlő 1-gyel, s a (13) képlet bal és jobb oldalán álló kifejezések megfelelő együtthatói legfeljebb előjelben különböznek ; tegyük fel, hogy

$$\beta = -\bar{\gamma}, \quad \alpha = \bar{\delta},$$

$$\alpha = d + ic, \qquad \beta = b + ia,$$

s ennek megfelelően :

$$\gamma = -(b - ia), \quad \delta = d - ic.$$

Az a, b, c, d valós számok négyzetösszege 1, ugyanis :

$$\alpha\delta - \beta\gamma = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

A fenti meggondolás eredménye a következő tétel :

91.7. *A gömb minden forgását kifejezhetjük*

$$z' = \frac{(d+ic)z + (b+ia)}{-(b-ia)z + (d-ic)} \tag{14}$$

alakú lineáris transzformációval, melyben a, b, c, d valós számok, és

$$a^2+b^2+c^2+d^2=1,$$

s viszont minden ilyen lineáris transzformáció a gömbnek egy forgását fejezi ki.

A (14) képlettel kifejezett forgás inverzét a következő képlet adja:

$$z'=\frac{(d-ic)z-(b+ia)}{(b-ia)z+(d+ic)} \tag{15}$$

91.8. *A gömb két forgásának szorzatát* az ezeket előállító lineáris transzformációknak megfelelő sorrendben képezett szorzata fejezi ki. Legyenek a, b, c, d és a', b', c', d' az illető transzformációk (14) alakú kifejezésében szereplő valós számok. A két lineáris transzformáció szorzatának együtthatói **22.2** szerint:

$$\begin{aligned}
\alpha''&=\alpha\alpha'+\gamma\beta'= && (dd'-aa'-bb'-cc')+(cd'+dc'+ab'-ba')i\,;\\
\beta''&=\beta\alpha'+\delta\beta'= && (bd'+db'+ca'-ac')+(ad'+da'+bc'-cb')i\,;\\
\gamma''&=\alpha\gamma'+\gamma\delta'= && -(bd'+db'+ca'-ac')+(ad'+da'+bc'-cb')i\,;\\
\delta''&=\beta\gamma'+\delta\delta'= && (dd'-aa'-bb'-cc')-(cd'+dc'+ab'-ba')i.
\end{aligned}$$

A fenti képletek szerint α'' és δ'', s ugyanúgy β'' és $-\gamma''$ konjugált komplex számok; legyen

$$\alpha''=d''+ic'',\quad \beta''=b''+ia'',\quad \gamma''=-(b''-ia''),\quad \delta''=d''-ic''.$$

Az a'', b'', c'', d'' számok kifejezése a fenti képletek szerint:

$$\begin{aligned}
a''&=ad'+da'+bc'-cb', & b''&=bd'+db'+ca'-ac',\\
c''&=cd'+dc'+ab'-ba', & d''&=dd'-aa'-bb'-cc'.
\end{aligned} \tag{16}$$

Ennek a négy számnak négyzetösszege szintén egyenlő 1-gyel.

A (16) képletek a *valós quaterniók* szorzási szabályát fejezik ki. A valós quaterniók értelmezésére felveszünk négy egységet, melyet $1, i, j, k$-val jelölünk, s ezekre a következő szorzási táblázatot adjuk meg:

$$1.1=1,\ 1.i=i.1=i,\ 1.j=j.1=j,\ 1.k=k.1=k\,;$$
$$i^2=j^2=k^2=-1\,;$$
$$i.j=k,\ j.k=i,\ k.i=j,\ j.i=-k,\ k.j=-i,\ i.k=-j.$$

Az a, b, c, d valós együtthatókkal s az $1, i, j, k$ egységekkel képezett

$$ai+bj+ck+d \qquad (d=d.1)$$

számokat valós quaternióknak nevezzük. Az együtthatók négyzetösszegéből vont

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

négyzetgyököt a quaternió abszolut értékének nevezzük.

A quaterniókra a következő műveleti szabályokat írjuk elő:

$$(ai+bj+ck+d)+(a'i+b'j+c'k+d')=$$
$$=(a+a')i+(b+b')j+(c+c')k+(d+d');$$
$$(ai+bj+ck+d)\varrho=\varrho(ai+bj+ck+d)=$$
$$(\varrho a)i+(\varrho b)j+(\varrho c)k+(\varrho d) \qquad (\varrho=\text{valós}),$$

továbbá bármely három $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ quaternióra a szorzás disztributív szabályát:

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=\mathfrak{c}\mathfrak{a}+\mathfrak{c}\mathfrak{b}, \quad (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\mathfrak{c}=\mathfrak{a}\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

Az $(ai+bj+ck+d)$ és $(a'i+b'j+c'k+d')$ quaterniók szorzata a fenti szabályok szerint:

$$(ai+bj+ck+d).(a'i+b'j+c'k+d')=(ad'+da'+bc'-cb')i+$$
$$(bd'+db'+ca'-ac')j+(cd'+dc'+ab'-ba')k+(dd'-aa'-bb'-cc').$$

A szorzat a'', b'', c'', d'' együtthatóinak kifejezése megegyezik a (16) képletekkel.

Az $(ai+bj+ck+d)$ quaternióhoz *reciprok* quaternió:

$$\frac{-ai-bj-ck+d}{a^2+b^2+c^2+d^2}; \tag{17}$$

a quaterniónak és reciprokjának szorzata 1.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

91.9. Tétel. *A gömb forgásai s az egység abszolút értékű valós quaterniók megfeleltethetők egymásnak* (**1**, **2**)*-értelmű és izomorf módon.*

91.10. Az antiinvoluciók analitikus kifejezése.

A

$$z'=\frac{A\bar{z}+B}{C\bar{z}+D} \quad (AD-BC\neq 0). \tag{18}$$

transzformáció egy antihomográfia kifejezése; ez akkor és csak akkor antiinvolució, ha megegyezik inverzével, azaz:

$$\frac{A\bar{z}+B}{C\bar{z}+D}=\frac{-\bar{D}\bar{z}+\bar{B}}{\bar{C}\bar{z}-\bar{A}}.$$

Tegyük fel, hogy az *AD—BC determináns valós;* ez esetben

$$A=-\bar{D},\quad B=\bar{B},\quad C=\bar{C},$$

tehát a (18) transzformáció antiinvoluciót állít elő, ha *B és C valós, A és —D konjugált komplex számok.*

Az antiinvoluciók kifejezésére alkalmas az együtthatók jelölésének következő módja:

$$z'=-\frac{\bar{B}_0\bar{z}+C_0}{A_0\bar{z}+B_0} \tag{19}$$

Ennek az antiinvoluciónak a fixpontjait a következő egyenlet határozza meg:

$$A_0z\bar{z}+B_0z+\bar{B}_0\bar{z}+C_0=0, \tag{20}$$

mely általános köregyenlet s kört vagy egyenest állít elő, ha

$$B_0\bar{B}_0-A_0C_0>0.$$

Ha tehát az utóbbi feltétel teljesül, akkor (19) *elsőfajú antiinvoluciót,* ha pedig $B_0\bar{B}_0-A_0C_0<0$, akkor *másodfajú antiinvoluciót* fejez ki.

Legyen két elsőfajú antiinvolúció analitikus kifejezése;

$$z'=-\frac{\bar{B}_1\bar{z}+C_1}{A_1\bar{z}+B_1},\qquad z'=-\frac{\bar{B}_2\bar{z}+C_2}{A_2\bar{z}+B_2}.$$

A két antiinvolució szorzata:

$$z'=\frac{(B_1\bar{B}_2-A_1C_2)z+(C_1\bar{B}_2-\bar{B}_1C_2)}{(-B_1A_2+A_1B_2)z-(C_1A_2-\bar{B}_1B_2)}$$

akkor és csak akkor involutorius (l. **22.**4), ha

$$(\bar{B}_1B_2+B_1\bar{B}_2)-(A_1C_2+C_1A_2)=0. \tag{21}$$

Ez a feltétele annak, hogy az

$$A_1z\bar{z}+B_1z+\bar{B}_1\bar{z}+C_1=0$$

és

$$A_2z\bar{z}+B_2z+\bar{B}_2\bar{z}+C_2=0$$

körök merőlegesek legyenek egymásra.

VII. Projektív mérték.

Cayley és Klein mutatták meg, hogy a projektív síkban és térben meg lehet határozni egy mértéket, azaz értelmezni lehet szakaszok egyenlőségét (és szögek egyenlőségét), hasonlóan, mint az euklidesi geometriában. Erre vonatkozó tárgyalásunk bevezetéseként megállapítjuk az euklidesi sík és tér kongruens leképezéseiből álló csoportnak : a *kongruenciacsoport*nak azokat a tulajdonságait, amelyek az egybevágósági axiómákkal aequivalensek. Ugyanezekkel a tulajdonságokkal jellemezzük a projektív sík és tér kollineáció-csoportjainak azokat az alcsoportjait, amelyek projektív mérték meghatározására szolgálnak. A lehetséges projektív mértékmeghatározások az euklidesi geometrián kívül elvezetnek a nem-euklidesi geometriákhoz, vagyis a Bolyai—Lobacsefszkij-féle hiperbolikus, és a Riemann-féle elliptikus geometriához.

92. §. Az euklidesi sík kongruens leképezéseinek csoportja.

Az euklidesi geometria elemi felépítése során szakaszok egyenlőségének fogalmát alapfogalomnak vettük fel, s ennek alapján értelmeztük a sík önmagára való kongruens leképezéseit azzal a tulajdonsággal, hogy a sík kongruens leképezései minden szakaszt vele egyenlő szakaszokba visznek át. Az összetartozási és rendezési axiómákat feltéve, az egyenlőségre vonatkozó axiómákból levezettük, hogy a sík önmagára való kongruens leképezései egy **G** *csoportot alkotnak* (első kötet, 87. o., 87. tétel), melyre érvényesek a következő tulajdonságok :

1. *A* **G** *csoport bármely leképezése a sík tetszőleges egyenesét egyenesbe viszi át s megtartja az egyenes pontjainak elrendezését* (első kötet, 78. o., 75. tétel és 87. o., 88. tétel)

2. *Ha a és a' két irányított egyenes és A, A' ezeknek egy-egy tetszőleges pontja, akkor a* **G** *csoportban pontosan két olyan leképezés van, mely az a egyenest a'-be, s az A pontot A'-be viszi át* (első kötet, 89. tétel s a **III.2** és **4** axióma folytán).

3. *Ha A és B a sík két tetszőleges pontja, akkor van a* **G** *csoportban legalább egy olyan leképezés, amely felcseréli egymással A-t és B-t* (első kötet, 88. o., 91. tétel).

A sík kongruenciacsoportját jellemzik a felsorolt tulajdonságok a következő értelemben. Tegyük fel, hogy érvényesek a síkra vonatkozó **I.1—3** és **II** axiómák. Legyen **G** a sík önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezéseinek olyan csoportja, amely eleget tesz az 1., 2., 3. feltételeknek. *A* **G** *csoport alapján értelmezzük szakaszok egyenlőségét:* az AB és az $A'B'$ szakaszt egyenlőnek nevezzük (jelölése $AB=A'B'$), ha van a **G** csoportban legalább egy olyan leképezés, amely A-t A'-be és B-t B'-be viszi át. Bebizonyítjuk, hogy ez az értelmezés kielégíti a **III.1—5** axiómákat.

III.1. Ha AB tetszőleges szakasz, akkor $AB=AB$, mivel az azonos leképezés, amely A-t és B-t önmagába viszi át, a **G** csoporthoz tartozik. Továbbá $AB=BA$ a 3. feltétel szerint. Ha $AB=A'B'$, akkor $A'B'=AB$; ugyanis az $AB=A'B'$ feltevés szerint van a **G** csoportban olyan **T** leképezés, amely A-t A'-be és B-t B'-be viszi át; **T** inverze, $\mathbf{T}^{-1}$ szintén **G**-hez tartozik, s az A' pontot A-ba, és B'-t B-be viszi át, s így az értelmezés szerint $A'B'=AB$. Ha $AB=A'B'$ és $AB=A''B''$, akkor feltevés szerint van a **G** csoportban egy-egy olyan **T** és **S** leképezés, mely A-t és B-t A'-be és B'-be, illetve A''-be és B''-be viszi át; a $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}$ leképezés ugyancsak a **G** csoporthoz tartozik, s A'-t A''-be, B'-t B''-be viszi át; e szerint $A'B'=A''B''$.

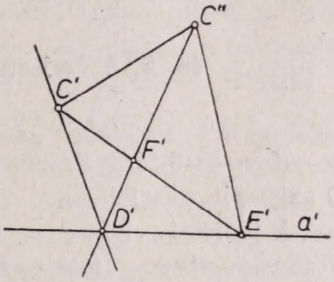
III.2. Ha A és B az a egyenes két tetszőleges pontja, és A' az a' egyenes valamely pontja, akkor az a' egyenesen az A' pont bármelyik oldalán van legalább egy olyan B' pont, melyre $AB=A'B'$; ez a 2. feltételből következik. Ha B' és B'' az a' egyenesnek két olyan pontja volna, amelyek az A' pontnak ugyanazon az oldalán feküsznek, s amelyekre $AB=A'B'$ és $AB=A'B''$, akkor **III.1** szerint $A'B'=A'B''$; van tehát a **G** csoportban legalább egy olyan **S** leképezés, mely az a' egyenest s ennek A' pontját önmagába, s a B' pontot B''-be viszi át. Mivel feltevésünk szerint B' és B'' az a' egyenesen az A' pontnak ugyanazon az oldalán feküsznek, tehát az **S** leképezés, mely az 1. feltétel szerint megtartja az a' egyenes pontjainak elrendezését, az a' egyenest megmaradó irányítással viszi át önmagába. Tegyük fel például, hogy fennáll az $A'B'B''$ elrendezés; a B'' pontnak **S**-nél származó B''' képére fennáll akkor az $A'B''B'''$ elrendezés, s ezért a négy pont elrendezése $A'B'B''B'''$. Ebből következik, hogy a B''' pont különbözik B'-től, s hogy az $\mathbf{S}^2$ leképezés, mely A'-t önmagába, és B'-t B'''-be viszi át, különbözik az azonosságtól (és **S**-től is). E szerint **I**, **S**, $\mathbf{S}^2$ a **G** csoport három olyan, egymástól különböző leképezése volna, amely az A' pontot önmagába, s az a' egyenest megmaradó irányítással önmagába viszi át, ellentétben a 2. feltétellel. Ebből az ellenmondásból következik, hogy a B' pont egybeesik B''-vel, azaz, hogy az a' egyenesen az A' pont mindegyik oldalán csak egy olyan B' pont van, amelyre $AB=A'B'$.

III. 3. Ha az a egyenesen fekvő AB és BC szakaszoknak nincs közös pontja, s az a' egyenesen fekvő $A'B'$ és $B'C'$ szakaszoknak sincs közös pontja, akkor az $AB=A'B'$ és $BC=B'C'$ egyenlőségből következik az $AC=A'C'$ egyenlőség. Legyen ugyanis **T** a **G** csoport olyan eleme, amely az a egyenest a'-be, s az A, B pontokat az A', B' pontokba viszi át. A C pontot a **T** leképezés az a' egyenesnek olyan C'' pontjába viszi át, amelyre értelmezés szerint fennáll a $BC=B'C''$ egyenlőség, s az $A'B'C''$ elrendezés. A C' és a C'' pont az a' egyenesen a B' pontnak ugyanazon az oldalán fekszik ; mivel pedig a **III. 1** axióma szerint a $BC=B'C'$ és $BC=B'C''$ egyenlőségből következik a $B'C'=B'C''$ egyenlőség, tehát a **III. 2** axióma folytán a C'' pont egybeesik C'-vel. Mivel a **T** leképezés A-t és C-t A'-be és C'-be viszi át, ezért $AC=A'C'$.

III. 4. Ha A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok, s ha A', B' olyan pontok, melyekre $AB=A'B'$, akkor az $A'B'$ egyenes mindegyik oldalán van egy és csak egy olyan C' pont, melyre $ABC\equiv A'B'C'$ (azaz : $AC=A'C', BC=B'C'$ és $AB=A'B'$). Legyen ugyanis **T** a **G** csoport olyan eleme, amely az A, B pontokat az A', B' pontokba viszi át, s legyen C' a C pont **T**-nél származó képe. Mivel **T** az AB egyenes pontjait és csak ezeket viszi át az $A'B'$ egyenes pontjaiba, ezért C' nem tartozik az $A'B'$ egyeneshez ; az értelmezés szerint $ABC\equiv A'B'C'$. A 2. feltétel folytán van a **G** csoportban **T**-n kívül még egy, és csak egy, olyan **T'** leképezés, amely az AB irányított egyenest az $A'B'$ irányított egyenesbe, s az A pontot A'-be viszi át. A **III. 2** axióma folytán **T** és **T'** megegyezik egymással az a egyenes valamennyi pontjában, s így nevezetesen a B pontot **T'** is a B' pontba viszi át ; C-nek **T'**-nél származó képe legyen C''. Az $\mathbf{S}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}'$ leképezés az $a'=A'B'$ egyenes minden pontját önmagába, s a C' pontot C''-be viszi át. A **G** csoporthoz tartozó **I**, **S**, $\mathbf{S}^2$ leképezések közül mindegyik az a' irányított egyenest önmagába s ennek A' pontját is önmagába viszi át ; a 2. feltétel folytán a három leképezés közül kettő azonos egymással; de mivel **I** és **S**, s ezért **S** és $\mathbf{S}^2$ is különböző, ezért $\mathbf{S}^2=\mathbf{I}$, azaz **S** *involutórius leképezés.*

A C'' pont különbözik C'-től; ellenkező esetben ugyanis **S** az $A'B'C'$ háromszög mindegyik oldalán az azonos leképezést származtatná, a III.2 axióma folytán. Továbbá, mivel a sík egy tetszőleges P pontján s az $A'B'C'$ háromszög belsejének valamely Q pontján átmenő egyenesnek van az $A'B'C'$ háromszög két oldalával közös pontja, s ezek **S**-nek fixpontjai, tehát a PQ egyenes minden pontja fixpont, s így **S** a sík azonos leképezése volna, feltevésünkkel ellentétben.

A $C'C''$ szakasznak van az a' egyenessel közös pontja. Ellenkező esetben legyen D' az a' egyenesnek olyan pontja, amely nem tartozik a $C'C''$ egyeneshez, továbbá E' olyan pontja, amelyet a $D'C''$ egyenes elválaszt a C' ponttól (134. ábra). Az $E'C'$ szakasznak van a $D'C''$ egyenessel egy F' közös pontja. Az a' egyenesnek nincs a $C'C''F'$ háromszög egyik oldalával sem közös pontja, mivel feltevésünk szerint a $C'C''$ szakasznak nincs az a' egyenessel közös pontja, s a $C'F'$ egyenesnek a'-vel való E' metszéspontjára fennáll a $C'F'E'$ elrendezés; ennek folytán a Pasch-féle axióma szerint a $C''F'$ szakasznak sincs a'-vel közös pontja. Ebből következik, hogy a $D'C'$ egyenesnek nincs a $C''E'$ szakasszal közös pontja; a $D'C'$ egyenes ugyanis a $C''E'F'$ háromszög $C''F'$ és $E'F'$ oldalvonalát a D' és C' pontban metszi és ezek nem tartoznak a háromszög oldalaihoz; ezért $D'C'$ nem metszi a háromszög $C''E'$ oldalát sem. Másrészt az **S** involutórius leképezésnél C' és C'' egymásba megy át, D' és E' fixpont, s ezért az $E'C'$ szakasz s a $C''D'$ egyenes F' metszéspontjának képe az $E'C''$ szakasznak a $C'D'$ egyenessel közös pontja volna. Ebből az ellenmondásból következik, hogy a $C'C''$ szakasz metszi az $a'=A'B'$ egyenest, vagyis, hogy *a C' és a C'' pont az a' egyenes különböző oldalán fekszik.*



134. ábra.

III.5. Ha A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok, és P az AB egyenes pontja, továbbá A', B', C', P' olyan pontok, amelyekre $ABC\equiv A'B'C'$ és $ABP\equiv A'B'P'$, akkor $CP=C'P'$. Legyen ugyanis **T** és **T'** a **G** csoportnak az a két leképezése, mely az A, B pontokat az A', B' pontokba viszi át; ezek közül mindegyik a P pontot P'-be viszi át a **III.2** axióma folytán, s közülök az egyik a C pontot a C' pontba viszi át a **III.4** axióma folytán. Ebből következik, hogy $CP=C'P'$.

Megjegyzés. Az olvasóra bízzuk annak igazolását, hogy a fenti 3. feltétel levezethető az egyenesre vonatkozó DEDEKIND-féle folytonossági axiómából, vagy a **G** csoportra vonatkozó ARCHIMEDES-féle axiómából, melyet következőképpen fogalmazhatunk meg:

Ha a **G** csoport valamely **T** leképezésénél az a egyenes megmaradó irányítással önmagába megy át, s ha az a egyenes A pontjának képe, $A'=\mathbf{T}(A)$ különbözik A-tól, továbbá B az a egyenes olyan pontja, melyre fennáll az $AA'B$ elrendezés, akkor van **T**-nek olyan $\mathbf{T}^n$ hatványa ($n>1$), hogy A-nak $\mathbf{T}^n$-nél származó $A^n=\mathbf{T}^n(A)$ képére az ABA^n elrendezés érvényes.

93. §. A projektív sík kongruenciacsoportjai.

Elliptikus mérték.

Következő tárgyalásunk alapjául a projektív geometria **P I**, **II** és **D** axiómáit vesszük fel.

A projektív síkban egy **G** csoport alapján, mely eleget tesz az előző szakaszban megfogalmazott 1., 2., 3. feltételeknek, bevezethetünk egy *projektív mértéket,* azaz értelmezhetjük szakaszok egyenlőségét. Az 1. feltétel szerint a **G** csoport bármely **T** leképezése a sík egyeneseit egyenesekbe viszi át, a **26.5** tétel szerint tehát **T** a síknak egy kollineációja és **G** a sík kollineáció-csoportjának alcsoportja. Az előző szakasz végén megjegyeztük, hogy a DEDEKIND-féle folytonossági axióma feleslegessé teszi a 3. feltételt. A 2. feltételt egyelőre olyan érvényességgel alkalmazzuk, mint az előző szakaszban. A projektív mérték meghatározását célzó feladatunkat a fentiek figyelembevételével így fogalmazhatjuk meg:

Meghatározandó a projektív sík önmagára való kollineációinak olyan **G** *csoportja, melyre teljesül a következő feltétel:*

Ha a és a' a sík két tetszőleges irányított egyenese, s P és P' ezeknek egy-egy pontja, akkor a **G** *csoportban pontosan két olyan leképezés van, mely az a egyenest a'-be s a P pontot P'-be viszi át.*

Meg fogjuk mutatni, hogy a **G** csoport, típusát illetően, ezzel a tulajdonsággal egyértelműen meg van határozva. A következő tárgyalásban HJELMSLEV és JUEL gondolatmenetét követjük.

93.1. Az a irányított egyenest s ennek P pontját, feltevésünk szerint, a $\mathbf{G}$ csoportnak pontosan két leképezése viszi át önmagába ; ezek közül az egyik az azonosság : $\mathbf{I}$; a másikat jelöljük $\mathbf{S}_a$-val. Mivel $\mathbf{S}_a^2$ is önmagába viszi át az a irányított egyenest s a P pontot, tehát $\mathbf{S}_a^2=\mathbf{I}$, azaz $\mathbf{S}_a$ *involutorius leképezés.* A **30.**9 tétel szerint $\mathbf{S}_a$ *a síknak harmonikus perspektivitása,* amelynél az a egyenes minden pontja fixpont. E szerint :

93.2. *Ha a* $\mathbf{G}$ *csoport valamely leképezése az a irányított egyenest s ennek egy pontját önmagába viszi át, akkor az a egyenesen az azonos leképezést származtatja.* Ebből következik az is, hogy az $\mathbf{S}_a$ leképezést az a egyenes egyértelműen meghatározza, függetlenül a P pont megválasztásától.

Az $\mathbf{S}_a$ harmonikus perspektivitást *az a tengelyre vonatkozó tükrözésnek,* s a perspektivitás A középpontját az *a egyenes pólusának* nevezzük. *Az A pont nem tartozik az a egyeneshez,* mivel egy harmonikus perspektivitás tengelye és középpontja nem egyesített helyzetű.

93.3. *Ha a és b két különböző egyenes, pólusuk, A és B különbözik egymástól.* Ellenkező esetben az $\mathbf{S}_a$ és $\mathbf{S}_b$ harmonikus perspektivitások szorzata egy tetszőleges olyan egyenesen, mely átmegy a két perspektivitás közös $A=B$ középpontján, de nem megy át az a és b tengelyek metszéspontján, egy, az azonosságtól különböző, parabolikus leképezést létesítene (**16.**2), ellentétben a **93.**2 állítással. Az a egyenest az *A pont polárisának* nevezzük.

93.4. *Ha a b egyenes átmegy az a egyenes A pólusán, akkor pólusa, B az a egyenesen fekszik.* Az $\mathbf{S}_b$ tükrözésnek $\mathbf{S}_a$-val való transzformáltja ugyanis :

$$\mathbf{S}_a^{-1}\mathbf{S}_b\mathbf{S}_a$$

ugyancsak harmonikus perspektivitás, melynek tengelye b-nek $\mathbf{S}_a$-nál származó képe. Mivel pedig b feltevés szerint átmegy az $\mathbf{S}_a$ perspektivitás A középpontján, tehát $\mathbf{S}_a(b)=b$, s ezért

$$\mathbf{S}_a^{-1}\mathbf{S}_b\mathbf{S}_a=\mathbf{S}_a\mathbf{S}_b\mathbf{S}_a=\mathbf{S}_b.$$

Ebből következik, hogy

$$\mathbf{S}_a=\mathbf{S}_b\mathbf{S}_a\mathbf{S}_b=\mathbf{S}_b^{-1}\mathbf{S}_a\mathbf{S}_b,$$

tehát $\mathbf{S}_b(a)=a$, vagyis az a egyenes átmegy az $\mathbf{S}_b$ perspektivitás B középpontján.

93.5. A fenti előírás szerint a sík minden a egyenesének megfelel egy A pont, bármely két különböző egyenesnek két különböző pont, s három, egy ponton átmenő egyenesnek három, egy egyenesen fekvő pont, és megfordítva. A **34**.5 tétel szerint ez a vonatkozás a síknak önmagára való korrelatív leképezése, s mivel a pontok és egyenesek kétszeresen felelnek meg egymásnak, tehát a síknak egy Ω polaritása. Egy pont sem tartozik polárisához, tehát Ω *elliptikus polaritás.*

Ha $\mathbf{S}_a$ a $\mathbf{G}$ csoporthoz tartozó harmonikus perspektivitás és $\mathbf{T}$ a $\mathbf{G}$ csoport tetszőleges eleme, akkor $\mathbf{S}_a$-nak $\mathbf{T}$-vel való transzformáltja:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}_a\mathbf{T}$$

egy, a $\mathbf{G}$ csoporthoz tartozó $\mathbf{S}_b$ harmonikus perspektivitás. Ebből következik, hogy $\mathbf{T}$-nél az a egyenes A pólusa a képének, b-nek a pólusába, B-be megy át, vagyis, hogy *a* $\mathbf{G}$ *csoport minden* $\mathbf{T}$ *eleme felcserélhető az* Ω *polaritással.*

Megfordítva, *ha a sík valamely* $\mathbf{T}$ *kollineációja felcserélhető az* Ω *polaritással, akkor a* $\mathbf{G}$ *csoporthoz tartozik.* A **37**.3 tétel szerint ugyanis minden, az Ω polaritással felcserélhető kollineáció előállítható két, Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitás szorzataként, s mivel az Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitások a $\mathbf{G}$ csoportnak elemei, ezeknek szorzata is $\mathbf{G}$-hez tartozik. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

93.6. Tétel. *Ha* $\mathbf{G}$ *a sík önmagára való kollineációinak olyan csoportja, hogy bármely irányított a egyenest s ennek P pontját bármely irányított a′ egyenesbe s ennek P′ pontjába a csoportnak pontosan két leképezése viszi át, akkor* $\mathbf{G}$ *azoknak a kollineációknak a csoportjával azonos, melyek a síknak egy* Ω *elliptikus polaritásával felcserélhetők.*

Mivel a sík bármely két elliptikus polaritása aequivalens egymással (**36**.2), tehát bármely két olyan csoport közül, mely eleget tesz a fenti tétel feltételeinek, az egyik a másikból kollineációval való transzformálással származik, azaz *a* $\mathbf{G}$ *csoport típusa egyértelműen meg van határozva.*

A $\mathbf{G}$ csoport alapján értelmezett mértéket a projektív sík *elliptikus mértékének*, s az ennek megfelelő geometriát *elliptikus síkgeometriának* nevezzük. Részletesebb tárgyalását lásd a 94. §-ban.

Hiperbolikus mérték.

Fenti tárgyalásunkban feltettük, hogy a mérték-meghatározás alapjául szolgáló $\mathbf{G}$ csoport a projektív síkon tranzitív, azaz bármely pontot bármely más pontba átvisz a csoportnak legalább egy leképezése ; továbbá, hogy a csoport minden sugársoron is tranzitív. A következő tárgyalásban e helyett csak azt tesszük fel, hogy a **G** csoport a projektív sík valamely τ tartományában tranzitív, s minden olyan sugársoron is, melynek középpontja τ-hoz tartozik ; a **G** csoport alapján a τ tartományban fogunk meghatározni egy projektív mértéket. Feltételeink pontos megfogalmazása a következő.

Legyen **G** *a sík kollineációinak egy csoportja, s nevezzük τ tartománynak azoknak a pontoknak összességét, amelyekbe egy P pont a* **G** *csoport leképezéseinél átmegy. Tegyük fel, hogy τ nem azonos az egész projektív síkkal, legalább két pontból áll, s hogy bármely két pontjával együtt az ezeket összekötő egyik egyenes szakasz valamennyi pontja τ-hoz tartozik.*[1] *Tegyük fel továbbá, hogy ha P és P' a τ tartomány két tetszőleges pontja, s a és a' ezeken átmenő irányított egyenesek, akkor a* **G** *csoportnak pontosan két leképezése viszi át P-t P'-be és a-t a'-be.*

Feladatunk a τ tartomány és a **G** csoport alkatának meghatározása.

93.7. Ha P a τ tartomány tetszőleges pontja, és a egy, a P ponton átmenő, irányított egyenes, akkor van **G**-ben egy és csak egy, az azonosságtól különböző $\mathbf{S}_a$ leképezés, mely P-t és a-t önmagába viszi át. $\mathbf{S}_a$ az a tengellyel, s valamely a-hoz nem tartozó A középponttal bíró, *harmonikus perspektivitás.* $\mathbf{S}_a$ független a P pont megválasztásától, azaz helyettesíthetjük P-t a-nak bármely más, τ-hoz tartozó P_1 pontjával (bizonyítást l. **93**.1).

Az A pontot az *a egyenes pólusának* nevezzük.

93.8. *A τ tartomány P pontján átmenő bármely két, egymástól különböző egyenesnek pólusa különböző.* Ha ugyanis a és b pólusa ugyanaz az A pont, akkor az $\mathbf{S}_a$ és $\mathbf{S}_b$ harmonikus perspektivitások $\mathbf{S}_a\mathbf{S}_b$ szorzata a $c=AP$ egyenesen az azonos leképezést származtatná, s ezért négyzete az azonosság volna, azaz : $\mathbf{S}_a\mathbf{S}_b=\mathbf{S}_b\mathbf{S}_a$. Viszont az a egyenesnek egy tetszőleges, P-től különböző R pontja az $\mathbf{S}_a\mathbf{S}_b$ leképezésnél az AR egyenes $\mathbf{S}_b(R)=R'$ pontjába, $\mathbf{S}_b\mathbf{S}_a$-nál pedig az $\mathbf{S}_a(R')=R''$ pontba, azaz R'-nek az A, R pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltjába menne át, mely különbözik R'-től ; ez ellenmondás.

93.9. *Ha a, b és c a τ tartomány P pontján átmenő, három különböző egyenes, ezeknek A, B és C pólusa egy egyenesen fekszik.*

[1] Az a feltétel, hogy τ két pontját összekötő szakasz τ-hoz tartozik, mellőzhető, s csupán tárgyalásunk egyszerűsítésére szolgál.

B i z o n y í t á s. Az $\mathbf{S}_a$ harmonikus perspektivitás a P középpontú sugársorban hiperbolikus involuciót létesít, hasonlóképpen $\mathbf{S}_b$ és $\mathbf{S}_c$ is. A három perspektivitás szorzata : $\mathbf{T}=\mathbf{S}_a\mathbf{S}_b\mathbf{S}_c$ megfordítja a sugársor irányítását, tehát a sugársorban hiperbolikus leképezést létesít (**15**.1) ; ennek két invariáns egyenesét jelöljük d-vel és d'-vel. A két egyenes közül az egyik megmaradó irányítással megy át önmagába. Ellenkező esetben ugyanis mindkét egyenesen volna P-n kívül egy-egy Q és R fixpont, s a sík $\mathbf{T}$ kollineációja a PQR invariáns háromszög mindegyik oldalát megfordított irányítással vinné át önmagába, ellentétben a **30**.3 tétellel. — Jelöljük d-vel a két egyenes közül azt, melyet $\mathbf{T}$ megmaradó irányítással visz át önmagába. A **93**.7 eredmény szerint $\mathbf{T}$ a sík harmonikus perspektivitása, ennek tengelye d, s középpontja egy, d-hez nem tartozó D pont ; fenti jelölésünknek megfelelően legyen $\mathbf{S}_d=\mathbf{S}_a\mathbf{S}_b\mathbf{S}_c$. — Az AB és d egyenesek metszéspontját jelöljük H-val ; H-nak $\mathbf{S}_a$-nál az AB egyenes H' pontja, ennek $\mathbf{S}_b$-nél az AB egyenes H'' pontja felel meg, s H''-t $\mathbf{S}_c$ a H pontba viszi át. E szerint a $HH''=AB$ egyenes átmegy az $\mathbf{S}_c$ perspektivitás C középpontján, azaz A, B, C egy egyenesen fekszik. (Ugyanehhez az egyeneshez tartozik természetesen a D pont is).

93.10. *Ha a és b a τ tartomány P pontján átmenő egyenesek, s ha a pólusa, A a b egyenesen fekszik, akkor b pólusa, B az a egyenesen fekszik* (bizonyítást l. **93**.4). Ebben az esetben az $\mathbf{S}_a\mathbf{S}_b$ szorzat a $p=AB$ egyenesen az azonosság, a síkban tehát harmonikus perspektivitás, amelynek tengelye p és középpontja P. Ezt a leképezést $\mathbf{S}_p$-vel jelöljük, a p egyenest a P *pont polárisának*, és a P pontot a p *egyenes pólusának* nevezzük. A p egyenest a P pont egyértelműen meghatározza (**93**.9).

93.11. *Ha P a τ tartomány pontja, akkor polárisának, p-nek egy pontja sem tartozik τ-hoz.*

B i z o n y í t á s. Ha a p egyenes A pontja a τ tartományhoz tartozik, akkor feltevésünk szerint τ-hoz tartozik a $b=AP$ egyenesnek egyik AP szakasza is. Legyen B a b egyenes pólusa ; az $a=BP$ egyenes pólusa az A pont (**93**.10). Az A középpontú és a tengelyű $\mathbf{S}_a$ harmonikus perspektivitás a $\mathbf{G}$ csoporthoz tartozik, s felcseréli egymással a b egyenesnek az A, P pontok által meghatározott két szakaszát ; mivel ezek közül az egyik, tehát mindkettő a τ tartományhoz tartozik. A $\mathbf{G}$ csoportnak azok a leképezései, amelyek a P pontot önmagába viszik át, a b egyenest átviszik minden más, a P ponton átmenő egyenesbe ; mivel b pontjai, tehát az összes, a P ponton átmenő egyenesek pontjai is τ-hoz tartoznak, vagyis τ az egész projektív síkkal azonos, feltevésünkkel ellentétben.

Tegyük fel, hogy a τ tartománynak van két olyan P és Q pontja, amelynek polárisa két különböző p és q egyenes. A másik esetet illetően lásd **93**.21.

93.12. A P ponton átfektetünk egy tetszőleges olyan a egyenest, amely nem megy át p és q metszéspontján ; a-nak p-vel és q-val közös pontját jelöljük B-vel és C-vel. Az a egyenesnek a B, C pontok által meghatározott két szakasza közül az egyikhez tartoznak a-nak a τ tartományban fekvő pontjai ; ezen egy DEDEKIND-féle szeletalkotással meghatározzuk azt a két U, V pontot, mely elválasztja egymástól az a egyenesnek τ-hoz tartozó pontjait a τ-hoz nem tartozó (és U, V-től különböző) pontjaitól. Az U, V pontok által meghatározott két szakasz közül jelöljük UV-vel azt a szakaszt, melynek pontjai τ-hoz tartoznak.

Az UV szakasz tetszőleges R pontjának polárisa legyen r, s ennek az a egyenessel való metszéspontja R'. Az $\mathbf{S}_r$ harmonikus perspektivitás, amelynek tengelye r s középpontja R, az a egyenest önmagába, s ennek τ-hoz tartozó UV szakaszát szintén önmagába viszi át. Mivel $\mathbf{S}_r$ az a egyenesen harmonikus involuciót létesít, melynek fixpontjai R és R', ezért az U, V pontokat $\mathbf{S}_r$ felcseréli egymással. Másszóval *R és R' harmonikusan konjugáltak az U, V pontpárra vonatkozóan.*

93.13. A fentiekből következik, hogy *az a egyenes bármely, U-tól és V-től különböző R pontja annak az AR' egyenesnek a pólusa, mely az a egyenes A pólusát az R pontnak az U, V pontpárra vonatkozó R' harmonikus konjugáltjával köti össze.* Az AR' egyenest az *R pont polárisának* nevezzük.

93.14. *Az U és a V pont nem tartozik a τ tartományhoz.* Ha például U a τ tartomány pontja volna, akkor a $\mathbf{G}$ csoport valamely leképezése, mely az UV egyenest önmagába s az UV szakasz R pontját az U pontba viszi át, az UV szakaszt az UV egyenesnek egy olyan $U'V'$ szakaszába vinné át, melynek belső pontja U ; mivel az $U'V'$ szakasz pontjai τ-hoz tartoznak, ez ellentmond U meghatározásának.

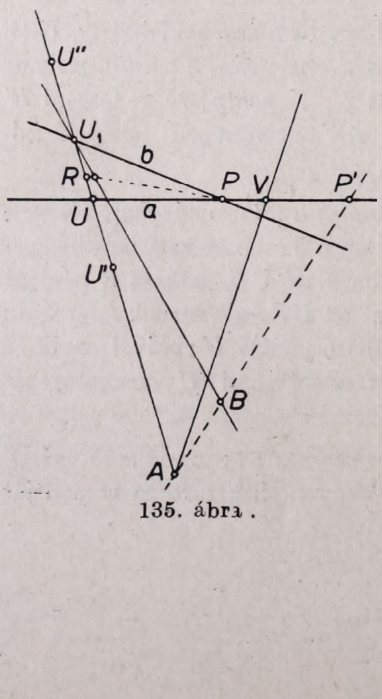
93.15. *Az AU és az AV egyenesen nincs a τ tartománynak pontja.* Ellenkező esetben τ-nak egy, az AU egyeneshez tartozó Q pontját az $\mathbf{S}_a$ harmonikus perspektivitás τ-nak egy ugyancsak az AU egyeneshez tartozó Q' pontjába vinné át. Mivel sem A, sem U nem tartozik τ-hoz, s mert a Q, Q' és A, U pontpárok elválasztják egymást, ezért az AU egyenesnek a Q, Q' pontok által meghatározott két szakasza közül egyik sem tartozik τ-hoz, τ-ra vonatkozó feltevésünkkel ellentétben.

93.16. *A τ tartomány összes pontja tehát ugyanahhoz, az AU, AV egyenesek által meghatározott UAV szögtartományhoz tartozik.*

93.17. *Az U pontot a τ tartomány bármely P pontjával összekötő egyenesnek egy olyan szakasza tartozik τ-hoz, melynek egyik végpontja U.* Tegyük fel ugyanis, hogy az UP egyenesnek τ-hoz tartozó szakasza $U'PV'$, s hogy U ennek külsejében fekszik. Az UP egyenes pólusa legyen B; **93**.16 szerint a τ tartomány összes pontja a BU', BV' egyenesek által meghatározott egyik $U'BV'$ szögtartományban, s az U pont a másik szögtartományban fekszik. Ha tehát R az UV egyenesnek egy, τ-hoz tartozó pontja, akkor a τ-hoz tartozó UR szakasznak van a BU', BV' egyenesek közül legalább az egyikkel közös pontja, ellentétben a **93**.15 tétellel.

Az U, V pontokat a τ *tartomány határpontjainak* nevezzük.

93.18. *Az AU, AV egyeneseken τ-nak U-n és V-n kívül nincs más határpontja.* Ha az AU egyenesnek U-tól különböző U' pontja τ-nak határpontja, akkor az U'-nek az $\mathbf{S}_a$ harmonikus perspektivitásnál megfelelő U'' pont is határpontja τ-nak. Legyen P a τ tartománynak az UV szakaszhoz tartozó pontja. Az UAV szögtartományban fekvő PU', PU'' szakaszok valamennyi pontja τ-hoz tartozik, s ennekfolytán a $PU'U''$ háromszögtartomány összes pontja is. Ebből következik, hogy az $U'UU''$ szakasz valamennyi pontja határpontja τ-nak. Legyen U_1 az $U'UU''$ szakasz tetszőleges, U-tól különböző pontja (135. ábra). A $PU_1=b$ egyenes pólusa, B nem tartozik az AU, AV egyenesek közül egyikhez sem, mivel az AB egyenesnek UV-vel való



135. ábra.

P' metszéspontja P-nek az U, V pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltja (**93**.13). Legyen V_1 a τ tartománynak az U_1P egyenesen fekvő másik határpontja. Az $U'UU''$ szakasznak az U_1B, V_1B egyenesek által meghatározott szögtartományok közül mindegyikben van legalább egy-egy pontja. Az $U'UU''$ szakasznak van tehát olyan R pontja, melyet P-től elválasztanak az U_1B, V_1B egyenesek; a τ-hoz tartozó PR szakasznak van az U_1B, V_1B egyenesek közül valamelyikkel közös pontja, ellentétben a **93**.15 eredménnyel.

93.19. Ha B az AU egyenes tetszőleges, U-tól különböző pontja, akkor, mivel B nem határpontja τ-nak (**93**.18), B-nek megfelel egy b poláris (**93**.13). *A b egyenes átmegy az U ponton.* Ellenkező esetben ugyanis U-nak az $\mathbf{S}_b$ harmonikus perspektivitásnál származó U' képe τ-nak egy másik, az AU egyenesen fekvő határpontja volna, ellentétben a **93**.18 eredménnyel.

A τ tartomány minden U határpontjának feleltessük meg mint polárist azt az AU egyenest, mely az U pontot egy, az U ponton s a τ tartomány valamely belső pontján átmenő a egyenes A pólusával összeköti. A fenti előírással a síkon egy korrelációt értelmeztünk (**34**.5), mely egy Ω polaritás, mivel a pontok és egyenesek kétszeresen felelnek meg egymásnak. A τ tartomány határpontjai önmagukhoz konjugáltak, tehát *Ω hiperbolikus polaritás.*

A **G** *csoport minden* **T** *leképezése felcserélhető az Ω polaritással.* Ha ugyanis A tetszőleges olyan pont, mely nem tartozik polárisához, az a egyeneshez, s ha A', a' ezeknek **T**-nél származó képe, akkor az A középpontú és a tengelyű $\mathbf{S}_a$ harmonikus perspektivitásnak **T**-vel való transzformáltja az A' középpontú és a' tengelyű $\mathbf{S}_{a'}$ harmonikus perspektivitás; ez is a **G** csoport eleme, tehát az A' pont polárisa az a' egyenes. A $\mathbf{T}\Omega$ korrelációnál, ugyanúgy mint $\Omega\mathbf{T}$-nél az A pont az a' egyenesbe megy át; mivel ez az állítás minden olyan A pontra érvényes, mely nem tartozik polárisához, következik, hogy

$$\mathbf{T}\Omega = \Omega\mathbf{T}.$$

Viszont, ha **T** a sík olyan kollineációja, mely felcserélhető az Ω hiperbolikus polaritással, akkor **T** vagy harmonikus perspektivitás, mely az Ω polaritáshoz tartozik, vagy két ilyen harmonikus perspektivitás szorzata (**38**.3). Az Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitások s ezek szorzatai a **G** csoporthoz tartoznak.

Eredményünket a következő tételben foglaljuk össze:

93.20. Tétel. *A* **G** *csoport a síknak azokból a kollineációiból áll, melyek egy* Ω *hiperbolikus polaritással felcserélhetők. Az* Ω *polaritás szerint önmagukhoz konjugált pontok egy* $\mathcal{C}$ *másodrendű görbét alkotnak. A* τ *tartomány a* $\mathcal{C}$ *görbe belseje, s a* **G** *csoport azokból a kollineációkból áll, melyek* $\mathcal{C}$*-t önmagába viszik át.*

Mivel a sík bármely két hiperbolikus polaritása aequivalens egymással (**36**.2), ezért a **G** *csoport típusa egyértelműen meg van határozva.*

A $\mathcal{C}$ görbe belsejében a **G** csoport által meghatározott projektív mértéket *hiperbolikus mérték*nek, a görbe belsejét *hiperbolikus sík*nak s az ebben a **G** csoport alapján értelmezett geometriát *hiperbolikus síkgeometriá*nak nevezzük. További tárgyalását l. a 95. §-ban.

Parabolikus mérték.

93.21. Fenti tárgyalásunkból kizártuk azt az esetet, hogy *a* τ *tartomány bármely pontjának polárisa ugyanaz az* u *egyenes*. Ezzel az esettel fogunk most foglalkozni.

Az u egyenes egy pontja sem tartozik a τ tartományhoz (**93**.11). A sík összes pontja, u pontjait kivéve, a τ tartományhoz tartozik. Legyen ugyanis a egy tetszőleges egyenes, mely átmegy a τ tartomány valamely P pontján; jelöljük UV-vel az a egyenesnek a τ tartományhoz tartozó szakaszát. Ha U, vagy V különböznék az a és u egyenesek P' metszéspontjától, akkor az UV szakasz minden P pontja a P' pontnak az U, V pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltja volna (**93**.13) s ez ellenmondás.

E szerint *a* τ *tartomány a síknak összes, az* u *egyeneshez nem tartozó pontjából áll.*

Az u *egyenest a* **G** *csoport bármely leképezése önmagába viszi át,* mivel a τ tartomány invariáns **G** leképezéseinél.

Legyen O tetszőleges, u-hoz nem tartozó pont; jelöljük $\mathbf{G}_O$-val **G**-nek azt az alcsoportját, melynek leképezései az O pontot önmagába viszik át. $\mathbf{G}_O$ elemei az u egyenesen egy $\mathbf{g}$ csoportot származtatnak, mely független az O pont megválasztásától. Ha ugyanis O' a síknak egy másik, u-hoz nem tartozó pontja, P' az OO' és u egyenes metszéspontja, és P ennek az O, O' pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltja, akkor a P középpontú és u tengelyű $\mathbf{S}$ harmonikus perspektivitás, mely a **G** csoporthoz tartozik, a $\mathbf{G}_O$ csoportot $\mathbf{G}_{O'}$-be viszi át, azaz:

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{G}_O\mathbf{S} = \mathbf{G}_{O'}.$$

$\mathbf{G}_O$ bármely $\mathbf{T}$ eleme, s ennek $\mathbf{S}$-sel való transzformáltja: $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{S}$, mely utóbbi $\mathbf{G}_{O'}$-höz tartozik, az u egyenesen ugyanazt a leképezést származtatja, mivel $\mathbf{S}$ az u egyenesen az azonosság.

A $\mathbf{G}_O$ csoporthoz tartozó harmonikus perspektivitásoknak, melyeknek középpontja az u egyenesen fekszik, a $\mathbf{g}$ csoportban az u egyenes *hiperbolikus involuciói* felelnek meg. Ha a tetszőleges, az O ponton átmenő egyenes, akkor a $\mathbf{G}_O$ csoportban egy és csak egy olyan $\mathbf{S}_a$ harmonikus perspektivitás van, melynek tengelye a; ennek középpontja az u egyenes valamely A pontja (**93**.10, 11). Annak a $\mathbf{G}_O$-hoz tartozó $\mathbf{S}_{a'}$ harmonikus perspektivitásnak, melynek tengelye az $a' = OA$ egyenes, középpontja az a és u egyenesek A' metszéspontja. Az $\mathbf{S}_a$ és az $\mathbf{S}_{a'}$ harmonikus perspektivitásnak az u egyenesen az A, A' fixpontokkal bíró hiperbolikus involució felel meg. Az A, A' pontokat az *u egyenes konjugált pontjai*nak nevezzük; $\mathbf{J}$-vel jelöljük az u egyenes konjugált pontjainak vonatkozását.

A $\mathbf{G}_O$ csoport minden $\mathbf{T}$ leképezése az u egyenes bármely két konjugált A, A' pontját u-nak két konjugált B, B' pontjába viszi át. fenti jelöléseket alkalmazva, az $\mathbf{S}_{a'}$ harmonikus perspektivitásnak $\mathbf{T}$-vel való transzformáltja ugyanis az az $\mathbf{S}_{b'}$ harmonikus perspektivitás, amelynek középpontja $B = \mathbf{T}(A)$, és tengelye az O pontot a $B' = \mathbf{T}(A')$ ponttal összekötő b' egyenes.

A $\mathbf{g}$ csoportnak azok a leképezései, melyek megtartják az u egyenes irányítását, *elliptikus leképezések*. Ha ugyanis $\mathbf{G}_O$ valamely $\mathbf{T}$ leképezésénél az u egyenes A pontja fixpont, akkor ennek A' konjugáltja szintén fixpont, s ha $\mathbf{T}$ megtartja az u egyenes irányítását, akkor $\mathbf{T}$ vagy az azonosság, vagy az O középpontú és u tengelyű harmonikus perspektivitás. E szerint $\mathbf{g}$-nek bármely, az u egyenes irányítását megtartó leképezése vagy az azonosság, vagy elliptikus leképezés. Ha tehát A, A' és B, B' az u egyenes két tetszőleges konjugált pontpárja, akkor az A, A' és a B, B' fixpontokkal bíró $\mathbf{J}_{AA'}$ és $\mathbf{J}_{BB'}$ hiperbolikus involuciók $\mathbf{g}$-hez tartoznak, s szorzatuk elliptikus leképezés; ezért az A, A' és B, B' pontpárok elválasztják egymást az u egyenesen (**16**.4). Ebből következik, hogy az u egyenesnek az a $\mathbf{J}$ involutórius leképezése, mely minden pontnak konjugáltját felelteti meg, megtartja u pontjainak ciklikus rendezését, tehát folytonos (**10**.3), továbbá megtartja u irányítását.

A $\mathbf{J}.\mathbf{J}_{AA'}$ kölcsönösen egyértelmű, folytonos leképezés megfordítja u irányítását, tehát van két B és B' fixpontja (l. a **15**.1 tétel bizonyítását) melyek $\mathbf{J}$-nél is, $\mathbf{J}_{AA'}$-nél is egymásnak felelnek meg.

A $\mathbf{J}_{AA'}$ és $\mathbf{J}_{BB'}$ hiperbolikus involuciók felcserélhetők egymással (**17**.1), tehát szorzatuk: $\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_{AA'}\mathbf{J}_{BB'}$ involució, mely $\mathbf{g}$-hez tartozik, s mivel megtartja u irányítását, ezért *elliptikus involució.*

A $\mathbf{g}$ *csoportban nincs* $\mathbf{J}_1$*-en kívül más elliptikus involució.* Ha ugyanis $\mathbf{J}_2$ az u egyenesnek egy, $\mathbf{J}_1$-től különböző elliptikus involuciója, legyen P_1 és P_2 az u egyenes tetszőleges P pontjának $\mathbf{J}_1$-nél és $\mathbf{J}_2$-nél származó képe; tegyük fel, hogy P_1 és P_2 különbözik egymástól. A P_1P_2P szakasz a $\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2$ leképezésnél egy részébe megy át, ezen van legalább egy fixpont (**10**.5), s mert $\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2$ megtartja az u egyenes irányítását, tehát sem ez a szorzat, sem $\mathbf{J}_2$ nem tartozhatik a $\mathbf{g}$ csoporthoz.

A $\mathbf{J}_1$ elliptikus involuciónak a $\mathbf{g}$ csoport bármely $\mathbf{T}$ elemével való transzformáltja $\mathbf{g}$-hez tartozó elliptikus involució, s ezért:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}_1\mathbf{T} = \mathbf{J}_1\,;$$

másszóval *a* $\mathbf{g}$ *csoport minden eleme felcserélhető a* $\mathbf{J}_1$ *elliptikus involucióval.*

A $\mathbf{G}_O$ csoportra vonatkozó feltételeinkből következik, hogy $\mathbf{g}$-nek az a $\mathbf{g}_1$ alcsoportja, mely az u irányítását megtartó leképezésekből áll, az u egyenesen egyszeresen tranzitív. E szerint a $\mathbf{g}_1$ csoport az u egyenesnek azokból az elliptikus leképezéseiből, s a $\mathbf{g}$ csoport u-nak mindazokból a projektív leképezéseiből áll, melyek a $\mathbf{J}_1$ elliptikus involucióval felcserélhetők.

Mivel a $\mathbf{g}$ csoporthoz tartozó bármely $\mathbf{J}_{PP'}$ hiperbolikus involució felcserélhető $\mathbf{J}_1$-gyel, tehát $\mathbf{J}_1$ egymásba viszi át $\mathbf{J}_{PP'}$ két fixpontját (**17**.1). E szerint *a* $\mathbf{J}_1$ *elliptikus involució azonos az* u *egyenes konjugált pontjainak* $\mathbf{J}$ *vonatkozásával.*

A síknak azok a kollineációi, melyek az u egyenest önmagába viszik át s felcserélhetők az u egyenes $\mathbf{J}$ elliptikus involuciójával, csoportot alkotnak, mely aequivalens az euklidesi sík hasonlósági csoportjával (**31**.1 és 33. §); ennek a csoportnak alcsoportja $\mathbf{G}$.

A $\mathbf{G}$ *csoport elemei a következők:*

1. harmonikus perspektivitások, melyeknek tengelye u s középpontja egy tetszőleges, u-hoz nem tartozó pont;

2. speciális perspektivitások, melyeknek tengelye u; ezek előállíthatók két, u tengelyű harmonikus perspektivitás szorzataként;

3. harmonikus perspektivitások, melyeknek középpontja az u egyenes valamely pontja s tengelye a középpontnak $\mathbf{J}$-nél származó képén megy át;

4. egy u tengelyű speciális perspektivitásnak a szorzata egy

olyan, 3.-hoz tartozó harmonikus perspektivitással, amelynek tengelye átmegy a speciális perspektivitás középpontján ;

5. a sík *III* típusú kollineációi, melyeknél invariáns az u egyenes, egy u-hoz nem tartozó O pont, s annak a *III* tipusú kúpszeletsornak valamennyi görbéje, amelyet az O pont, az u egyenes s ennek **J** involuciója határoz meg ; a leképezés két olyan, 3.-hoz tartozó harmonikus perspektivitás szorzataként állítható elő, melyeknek tengelye az O ponton megy át.

Az 1., 2. és 5. alatt felsorolt leképezések **G**-nek invariáns alcsoportját alkotják (l. **65**.20).

A **G** *csoport aequivalens az euklidesi sík kongruenciacsoportjával.* Ha az u egyenest vesszük fel végtelen távoli egyenesnek, s a **J** elliptikus involuciót abszolut involuciónak, akkor **G** az euklidesi sík kongruenciacsoportja, melynek elemei a következők :

1. félforgások, 2. eltolások, 3. egyenesekre vonatkozó tükrözések, 4. tükrözés szorzata a tengely mentén való eltolással, 5. forgások.

Az 1., 2. és 5. leképezések alkotják az *euklidesi sík mozgáscsoportját.*

A **G** csoport alapján meghatározott mértéket *parabolikus* (vagy *euklidesi*) *mérték*nek nevezzük ; az ennek megfelelő geometria az *euklidesi síkgeometria.*

A jelen szakaszban adott tárgyalás eredményét a következő tételben foglaljuk össze :

93.22. Tétel. *Legyen* **G** *a sík kollineációinak egy csoportja, és* τ *azoknak a pontoknak az összessége, melyekbe egy* P *pont a* **G** *csoport leképezéseinél átmegy. Tegyük fel, hogy* τ *legalább két pontot tartalmaz, s hogy bármely két pontjával együtt az ezeket összekötő egyik szakasz valamennyi pontja* τ*-hoz tartozik. Tegyük fel továbbá, hogy ha* P *és* P' τ*-nak két tetszőleges pontja, s* a *és* a' *ezeken átmenő irányított egyenesek, akkor a* **G** *csoportnak pontosan két leképezése viszi át* P*-t* P'*-be és* a*-t* a'*-be. A* **G** *csoportra és a* τ *tartományra nézve a következő esetek lehetségesek:*

1. τ *azonos az egész projektív síkkal, s* **G** *azoknak a kollineációknak a csoportja, melyek a síknak egy elliptikus polaritásával felcserélhetők (elliptikus eset).*

2. τ *egy másodrendű görbe belsejéből áll, s* **G** *azoknak a kollineációknak a csoportja, melyek a görbét önmagába viszik át (hiperbolikus eset).*

3. τ *a síkból egy* u *egyenes elhagyásával származik, s* **G** *az euklidesi sík kongruenciacsoportjával aequivalens (parabolikus eset).*

94. §. Elliptikus síkgeometria.

Egybevágósági tételek.

A projektív síknak egy elliptikus polaritását jelöljük Ω-val, s legyen **G** a síknak az Ω polaritással felcserélhető kollineációiból álló csoport. Két szakaszt egyenlőnek nevezünk, ha az egyiket átviszi a másikba a **G** csoport valamely leképezése. Ez az értelmezés lényegében kielégíti azokat az egybevágósági axiómákat, melyek az euklidesi geometriában érvényesek. Minthogy azonban a projektív egyenes zárt, s a projektív síkban az egyenesnek nincs két oldala, az egybevágóságra vonatkozó **III.2** és **4** axiómát úgy fogjuk átalakítani, hogy alkalmazhatók legyenek a projektív geometria **P I** és **II** összetartozási és rendezési axiómáival kapcsolatban is. Erre a célra szolgálnak a következő értelmezések.

Értelmezés. Az AB és az $A'B'$ szakaszt *egyenlőnek* nevezzük, ha van a **G** csoportban legalább egy olyan leképezés, mely az A, B pontokat az A', B' pontokba és az AB szakasz pontjait az $A'B'$ szakasz pontjaiba viszi át.

III.1. Ennek az axiómának az igazolása különben ugyanaz, mint a 92. §-ban, kivéve a következő állítást:

Az AB szakasz egyenlő a BA szakasszal.

Ezt a következő meggondolással igazoljuk. Az AB egyenesen az Ω polaritás által létesített elliptikus involuciónak, s az A, B fixpontokra vonatkozó hiperbolikus involuciónak van egy közös konjugált C, D pontpárja (**16**.5). A C és a D pont polárisát jelöljük c-vel és d-vel. A C középpontra és a c tengelyre, s ugyancsak a D középpontra és a d tengelyre vonatkozó harmonikus perspektivitás a **G** csoporthoz tartozik, felcseréli egymással A-t és B-t s önmagába viszi át az A, B pontok által meghatározott két szakasz közül mindegyiket.

Értelmezés. Az a egyenes két A és B pontja által meghatározott két szakaszt egymás *mellékszakaszának* nevezzük; jelöljük ezeket AB-vel és $\overline{AB}$-vel. Azt mondjuk, hogy az AB szakasz és az $\overline{AB}$ szakasz az a egyenesen az *A pontnak különböző oldalán* fekszik. Ha B_1 az a egyenes tetszőleges, A-tól különböző pontja, és AB_1, $\overline{AB_1}$ az A, B_1 pontok által meghatározott két szakasza, akkor értelmezés szerint az AB és az AB_1 szakasz az a egyenesen a közös *A végpontnak ugyanazon az oldalán* fekszik, ha a két szakasz azonos egymással, vagy ha az egyik a másiknak része. A két szakasz az *A pontnak* *különböző oldalán* fekszik, ha a két szakasz közül egyik sem része a másiknak.

III. 2* *Ha AB egy tetszőleges szakasz, a' egy egyenes és A' ennek valamely pontja, akkor az a' egyenesen az A' pontnak bármelyik oldalán van egy és csak egy olyan $A'B'$ szakasz, mely egyenlő az AB szakasszal.* Ennek igazolása a **G** csoportra vonatkozó feltételből s a **93**.2 tételből közvetlenül adódik.

III. 3. Az axióma állítása és igazolása ugyanaz, mint a 92. §-ban.

Értelmezés. *Félsugáron* értjük egy egyenesnek két konjugált pontja által meghatározott bármelyik szakaszát. Az egyenest két konjugált pontja két félsugárra osztja fel. Az A ponthoz tartozó, vagy A középpontú *félsugársor* az A ponton átmenő egyeneseknek azokból a félsugaraiból áll, amelyekre ezeket az egyeneseket az A pont s polárisa, az a egyenes felosztja.

Értelmezés. Az A középpontú *félsugársor ciklikus elrendezését* a következő előírással értelmezzük. Legyen b, c, d, e a félsugársor négy eleme. Ha a b és d félsugarak egy egyeneshez tartoznak, akkor ez az egyenes és A polárisa, a a síkot két szögtartományra osztja fel (**25**.1). Ha c és e nem tartoznak ezek közül ugyanahhoz a szögtartományhoz, akkor azt mondjuk, hogy az A középpontú sugársorban b és d elválasztja c-t és e-t. Ha pedig a b és d félsugarak nem tartoznak egy egyeneshez, akkor az a egyenes egyik szakaszával együtt egy Δ_0 háromszögtartomány határát alkotják (**25**.1 és 2); ha c és e közül az egyik Δ_0-hoz tartozik, de a másik nem, akkor azt mondjuk, hogy b és d elválasztja c-t és e-t. Könnyen belátható, hogy ha b és d elválasztja c-t és e-t, akkor c és e elválasztja b-t és d-t. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a négy félsugár ciklikus elrendezése $(bcde)$. Ez az értelmezés eleget tesz a ciklikus rendezés axiómáinak (**P II** axiómacsoport **A 1, 2, 3** axiómái).

Értelmezés. Ha b és $\bar{b}$ az A középpontú félsugársornak egy egyeneshez tartozó két félsugara, s c és d két olyan félsugara, melyre a $(bc\bar{b}d)$ elrendezés érvényes, akkor azt mondjuk, hogy a c és d félsugarak a $b+\bar{b}$ *egyenesnek különböző oldalán* feküsznek. Ha pedig elrendezésük $(b\bar{b}cd)$ vagy $(b\bar{b}dc)$, akkor a c és d félsugarak a $b+\bar{b}$ *egyenesnek ugyanazon az oldalán* feküsznek.

A félsugársor és a sugársor ciklikus elrendezése között a következő összefüggés áll fenn. Legyen b, c, d, e az A középpontú sugársor négy egyenese, b', c', d', e' ezeknek egy-egy félsugara, melyeknek közös végpontja A ; tegyük fel, hogy a c', d', e' félsugarak a b egyenesnek ugyanazon az oldalán feküsznek. Ha a négy egyenes ciklikus elrendezése $(bcde)$, akkor a négy félsugáré $(b'c'd'e')$ és megfordítva.

Értelmezés. Az AB szakasz által meghatározott AB *félsugáron* értjük az AB egyenesnek azt az AA' szakaszát, amelyet az A pont s ennek A' konjugáltja határoz meg, s mely az AB egyenesen az A pontnak ugyanazon az oldalán fekszik, mint az AB szakasz. Az A pontot a *félsugár kezdőpontjá*nak nevezzük.

Értelmezés. Az elliptikus síkban ABC *háromszögö*n értjük a projektív sík egyik ABC háromszögtartományát. A tartomány határához tartozó AB, BC, CA szakaszok a *háromszög oldalai*, s az A, B, C pontok a *háromszög csúcsai.*

Az elliptikus sík három, nem egy egyenesen fekvő A, B, C pontja négy háromszöget határoz meg; ezek közül kettő-kettőnek egy oldala közös. A négy háromszög közül bármely kettőt egymás *mellékháromszögé*nek nevezünk.

Értelmezés. Ha az elliptikus sík ABC és ABC_1 háromszögeinek AB oldala közös (vagyis ha ugyanaz az AB szakasz tartozik a két háromszögtartomány határához), s ha az AC és AC_1 félsugarak az AB egyenesnek különböző oldalán feküsznek, akkor a BC és BC_1 félsugarak is ; ebben az esetben azt mondjuk, hogy az *ABC és ABC_1 háromszögek a közös AB szakasznak különböző oldalán feküsznek.* Ha pedig az AC és AC_1 félsugarak, s a BC és BC_1 félsugarak az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán feküsznek, akkor értelmezés szerint az *ABC és ABC_1 háromszögek a közös AB szakasznak ugyanazon az oldalán feküsznek.*

A fenti értelmezés alapján a **III.4** axiómát az elliptikus síkra is alkalmazható, következő alakban fogalmazzuk meg :

III.4* *Ha ABC egy háromszög és $A'B'$ az AB oldallal egyenlő szakasz, akkor van két olyan $A'B'C'$ és $A'B'C''$ háromszög, amely a közös $A'B'$ szakasznak különböző oldalán fekszik, s melynek $A'C'$, $A'C''$ oldala az AC oldallal, s $B'C'$ és $B'C''$ oldala a BC oldallal egyenlő.* (A C' pont egybeeshetik a C'' ponttal, mégpedig akkor és csak akkor, ha az $A'B'$ egyenes pólusa). Ennek az axiómának az igazolása ugyanúgy történik, mint a 92. §-ban.

III.5. Az axióma állítása és igazolása ugyanaz, mint a 92. §-ban.

Értelmezés. *Szögö*n értünk két AB és AC félsugarat, mely nem tartozik egy egyeneshez. A a *szög csúcsa*, s az AB, AC félsugarak, melyekhez hozzászámítjuk az A kezdőpontot is, a *szög szárai*. Két szöget *egyenlő*nek nevezünk, ha az egyik átvihető a másikba a **G** csoport valamely leképezésével.

Értelmezés. Két olyan szöget, melynek egyik szára közös, másik szára pedig egy egyenesnek két különböző félsugara, egymás *mellékszögé*nek nevezünk. Két olyan szöget, melynek szárai két egyenesnek két-két különböző félsugara, egymás *csúcsszögé*nek nevezünk.

A csúcsszögek egyenlők egymással; az a harmonikus perspektivitás, melynek középpontja a két szög közös csúcsa, s tengelye a csúcspont polárisa, a két csúcsszöget egymásba viszi át.

Az AB és AC *egyenesek által bezárt szögeken* értjük azokat a szögeket, melyeket a két egyenesnek egy-egy A kezdőpontú félsugara zár be.

Derékszögön olyan szöget értünk, mely mellékszögével egyenlő. A derékszög két szárát, s az ezeket tartalmazó egyeneseket egymásra *merőlegesnek* nevezzük.

Az *ABC háromszög A csúcsához tartozó szögén* értjük azt a szöget, melyet a háromszög AB és AC oldalai által meghatározott félsugarak zárnak be.

Az elliptikus síkban fekvő háromszögekre érvényesek az egybevágósági tételek (l. első kötet, 17. §, 104., 105., 106. és 116. tétel).

94.1. *Ha az a és b egyenesek merőlegesek egymásra, akkor mindegyik átmegy a másiknak pólusán.* Az értelmezés szerint van ugyanis a **G** csoportnak olyan leképezése, mely az a egyenest megmaradó, s a b egyenest megfordított irányítással önmagába viszi át. Ez a leképezés a síknak az a tengelyre s annak A pólusára, mint középpontra vonatkozó $\mathbf{S}_a$ harmonikus perspektivitása. Mivel ez a b egyenest önmagába viszi át, tehát b átmegy az A ponton.

Az $\mathbf{S}_a$ harmonikus perspektivitás az elliptikus síknak az *a tengelyre vonatkozó tükrözése*, s ugyancsak az *A pont körül való félforgása*.

Legyen **T** a **G** csoport tetszőleges, nem involutorius leképezése. **T**-nek van egy A fixpontja (**28**.1), s ennek a polárisa invariáns egyenes; ezeken kívül nincs más invariáns elem. Az a egyenesen **T** elliptikus leképezést létesít, mely úgy tekinthető mint az a egyenesnek önmagában való eltolása; ha ugyanis B és C az a egyenes két tetszőleges pontja, s B', C' ezeknek **T**-nél származó képe, akkor a megegyező irányítású BB' és CC' szakaszok egyenlők. Az egész síkban is úgy tekinthetjük a **T** leképezést, mint a *síknak az a egyenes mentén BB′ szakasszal való eltolását.* Legyen ugyanis BA a B, A pontok által meghatározott egyik félsugár, és a $B'A$ félsugár ennek **T**-nél származó képe; jelöljük BB'-vel az a egyenesnek azt a szakaszát, amely a BA és BA' félsugarakkal együtt egy ABB' háromszöget alkot (azaz egy háromszögtartomány határát); azt mondjuk, hogy a BA és $B'A$ félsugarak a BB' szakasznak ugyanazon az oldalán feküsznek. Legyen P a sík tetszőleges olyan pontja, mely különbözik a pontjaitól és A-tól, s jelöljük C-vel a P-ből a-ra bocsátott merőlegesnek a talppontját. A C pontnak **T**-nél származó képe legyen C'; jelöljük CC'-vel az a egyenesnek azt a szakaszát, mely BB'-vel megegyező irányítású. A CPA félsugár képe, a $C'P'A$ félsugár a CC' szakasznak ugyanazon az oldalán fekszik, mint CPA, s ezeknek CP és $C'P'$ szakasza egyenlő. A P pont P' képét e szerint úgy kapjuk meg, hogy a C' pontban a-ra emelt merőlegesre rámérjük a CP szakasszal egyenlő $C'P'$ szakaszt a CC' szakasznak azon az oldalán, amelyen a CP szakasz fekszik.

De ugyanezt a **T** leképezést az *elliptikus sík forgásának* is tekinthetjük, melynek középpontja az a egyenes A pólusa; ugyanis minden szög, melynek csúcsa A, vele egyenlő szögbe megy át, az A középpontú félsugársor irányítása invariáns, s bármely pontnak és képének A-tól való távolsága egyenlő.

Jelöljük $\mathbf{G}_A$-val a **G** csoportnak azt az alcsoportját, mely az A pontot (és az a egyenest) önmagába viszi át. Az a egyenes ennek a csoportnak egyik pályavonala. Egy tetszőleges, a pontjaitól és A-tól különböző P pontnak pályavonala az a egyenesnek *aequidistans vonala,* ha $\mathbf{G}_A$-t mint eltolásokból álló csoportot értelmezzük, s A középpontú *kör,* ha $\mathbf{G}_A$-t forgáscsoportnak tekintjük. Az elliptikus síkban tehát egy egyenes aequidistans vonalai körök, melyeknek középpontja az egyenes pólusa.

Jegyezzük meg, hogy *egy egyenesnek bármely aequidistans vonala az egyenesre vonatkozó tükrözésnél önmagába megy át.* Ha az a egyenesre ennek B pontjában merőlegest emelünk s erre a B pont két különböző oldalán egyenlő BP és BP' szakaszokat mérünk fel, akkor a P, P' pontok vagy egybeesnek az a egyenes A pólusával, vagy pedig az a egyenesnek *ugyanahhoz az aequidistans vonalához* tartoznak. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy az aequidistans vonal az egyenest kétszer kerüli meg, úgy mint a Möbius-féle szalag középvonalát egy azt a felületen megközelítő egyszerű zárt vonal (l. 117. o.).

A projektív síknak a $\mathbf{G}_A$ csoporthoz tartozó kollineációi, egy harmonikus perspektivitást kivéve, a *III* típushoz tartozó leképezések (l. 30. §); a pályavonalak annak a *III* típusú kúpszeletsornak elemei, amelyet az A pont, az a egyenes s ennek Ω által származtatott elliptikus involúciója határoz meg.

94.2. *Ha A és B két tetszőleges pont, az ezeknek megfelelő $\mathbf{G}_A$ és $\mathbf{G}_B$ csoportok $\mathbf{G}$-nek aequivalens alcsoportjai.* Jelöljük ugyanis $\mathbf{T}$-vel a $\mathbf{G}$ csoport tetszőleges olyan elemét, mely A-t B-be viszi át; a $\mathbf{G}_A$ csoportnak $\mathbf{T}$-vel való transzformáltja a $\mathbf{G}_B$ csoport.

A $\mathbf{G}$ csoportot az *elliptikus sík kongruenciacsoportjának* nevezzük. Mivel $\mathbf{G}$ minden eleme egy $\mathbf{G}_A$ egytagú alcsoporthoz tartozik, tehát az azonosságból folytonosan elérhető, a $\mathbf{G}$ csoport leképezéseit az elliptikus sík mozgásainak, s a $\mathbf{G}$ csoportot az *elliptikus sík mozgáscsoportjának* tekinthetjük.

Az elliptikus síkgeometria gömbi modellje.

Az υ elliptikus sík $\mathbf{G}$ mozgáscsoportjának megfeleltethetünk kölcsönösen egyértelmű és izomorf módon egy csoportot, melynek elemei egy υ-t nem metsző $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület homográfikus leképezései.

Legyen O és P két olyan pont, amely nem tartozik az υ síkhoz. A **78**.11 tétel szerint van egy és csak egy olyan, a P ponton átmenő $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület, hogy az υ síknak $\mathcal{F}$-re vonatkozó pólusa az O pont, s az υ síkban $\mathcal{F}$-re nézve konjugált pontok az Ω polaritást származtatják, mely az elliptikus mértékmeghatározás alapjául szolgált.

94.3. *A $\mathbf{G}$ elliptikus mozgáscsoport bármely $\mathbf{T}_0$ leképezésének megfelel a térnek két olyan $\mathbf{T}$ és $\mathbf{T}'$ kollineációja, mely az υ síkban $\mathbf{T}_0$-val megegyezik, s az $\mathcal{F}$ felületet önmagába viszi át.*

Legyen ugyanis Q az OP egyenesnek az υ síkkal közös pontja, és Q' ennek $\mathbf{T}_0$-nál származó képe, továbbá P_1' és P_2' az OQ' egyenesnek $\mathcal{F}$-fel való két metszéspontja. Van a térnek egy és csak egy, az υ síkban $\mathbf{T}_0$-val megegyező $\mathbf{T}$ kollineációja, mely az O pontot önmagába és P-t P_1'-be viszi át (**45**.11); hasonlóan van a térnek olyan $\mathbf{T}'$ kollineációja, mely az υ síkban $\mathbf{T}_0$-val megegyezik, s O-t önmagába, P-t P_2'-be viszi át. A $\mathbf{T}$ és a $\mathbf{T}'$ kollineációnál az $\mathcal{F}$ felület önmagába megy át. $\mathbf{T}'$-nek $\mathbf{T}^{-1}$-gyel bármely sorrendben való szorzata az υ síkban az azonosság, tehát a tér perspektivitása, s mivel ennél az $\mathcal{F}$

felület önmagába megy át, tehát $\mathbf{A}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}'=\mathbf{T}'\mathbf{T}^{-1}$ *harmonikus perspektivitás,* melynek középpontja O s perspektivitási síkja υ.

Jelöljük $\mathbf{T}, \mathbf{T}'$, $\mathbf{A}$-val az illető kollineációk által az $\mathcal{F}$ felületen származtatott homográfikus vagy antihomográfikus leképezéseket. $\mathbf{A}$ másodfajú antiinvolució; $\mathbf{T}$ és $\mathbf{T}'$ közül az egyik, például $\mathbf{T}$ homográfia, a másik: $\mathbf{T}'=\mathbf{AT}$ antihomográfia. Mindkettő felcserélhető az $\mathbf{A}$ antiinvolucióval. Az $\mathcal{F}$ felület $\mathbf{T}$ és $\mathbf{T}'$ leképezése az υ sík $\mathbf{T}_0$ kollineációjának az O pontból való vetítéssel felel meg.

A $\mathbf{G}$ *csoport* $\mathbf{T}_0$ *elemeinek az* $\mathcal{F}$ *felületen megfelelő* $\mathbf{T}$ *homográfiák csoportot alkotnak, mely az* $\mathbf{A}$ *másodfajú antiinvolucióval felcserélhető homográfiák csoportjával azonos.*

Ha az υ síkot a tér végtelen távoli síkjának, s ebben az Ω elliptikus polaritást az euklidesi tér értelmezésére szolgáló abszolut polaritásnak vesszük fel, akkor $\mathcal{F}$ gömbfelület, amelynek középpontja O. Az $\mathbf{A}$ antiinvolúció a gömb átellenes pontjait felcseréli egymással; az $\mathbf{A}$-val felcserélhető $\mathbf{T}$ homográfiák a gömbfelület forgásai (**84**.7).

94.4. *Az elliptikus sík mozgáscsoportjának tehát kölcsönösen egyértelmű és izomorf módon megfelel a gömb forgáscsoportja.*

Ilyen módon a projektív síkban értelmezett elliptikus geometriának egy másik modelljét kaptuk meg az $\mathcal{F}$ gömbfelületen. Az elliptikus sík pontjai s a gömbfelület átellenes pontpárjai, továbbá a sík egyenesei s a gömbfelület főkörei kölcsönösen egyértelmű módon felelnek meg egymásnak. Az elliptikus síkon, miként a projektív síkon, bármely két egyenesnek van egy közös pontja; a gömbfelületen bármely két főkörnek van egy közös, átellenes pontpárja, mely az elliptikus sík egy pontjának felel meg. Az elliptikus síkon két idom akkor és csak akkor egybevágó, ha a gömbfelületen megfelelő idomok átvihetők egymásba a gömb forgásával.

95. §. Hiperbolikus síkgeometria.

A hiperbolikus sík nevezetes vonalai.

A projektív síkban legyen $\mathcal{C}$ egy másodrendű görbe; $\mathcal{C}$ belsejét *hiperbolikus sík*nak, s a projektív sík egyeneseinek $\mathcal{C}$ belsejéhez tartozó szakaszát *hiperbolikus egyenesek*nek nevezzük. A projektív sík minden olyan kollineációja, mely a $\mathcal{C}$ görbét önmagába viszi át, ennek belsejét, vagyis a hiperbolikus síkot önmagára képezi le; ezt a leképezést a ***hiperbolikus sík kongruens leképezésé***nek, s abban az esetben, ha megtartja a $\mathcal{C}$ görbe irányítását, a *hiperbolikus sík mozgásá*nak nevezzük.

A hiperbolikus sík pontjaira és egyeneseire teljesülnek az euklidesi síkgeometria összetartozási, rendezési és egybevágósági axiómái, vagyis az **I.1—3**, **II** és **III** axiómák (az utóbbiak igazolását illetően l. a 92. és 94. §-t). A hiperbolikus síkgeometriában érvényesek tehát mindazok a tételek, melyeket az első kötet első három fejezetében a nevezett axiómák alapján levezettünk.

Az euklidesi geometria párhuzamossági axiómája helyett egy azt kizáró axióma érvényes, melyet *hiperbolikus párhuzamossági axiómának* nevezünk s következőképpen fogalmazunk meg:

95.1. *Ha a egy tetszőleges egyenes és P egy, a-hoz nem tartozó pont, akkor a P ponton átmenő egyenesek összességében van két olyan e és f egyenes, mely az a-t metsző egyeneseket az a-t nem metsző egyenesektől elválasztja.* Az e és az f egyenest az *a egyenessel párhuzamos*nak nevezzük.

Az a hiperbolikus egyenest tartalmazó projektív egyenesnek a $\mathcal{C}$ görbével való metszéspontjai legyenek U és V; ezeket a *hiperbolikus egyenes végpontjai*nak (vagy végtelen távoli pontjainak) nevezzük. A P ponton átmenő, s az a egyenessel párhuzamos hiperbolikus egyenesek PU és PV.

95.2. *Két hiperbolikus egyenes akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha az őket tartalmazó projektív egyenesek konjugáltak a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozóan.*

A hiperbolikus síknak az *a egyenesre vonatkozó tükrözés*ét a projektív síknak az a harmonikus perspektivitása származtatja, amelynek tengelye a, s középpontja a-nak $\mathcal{C}$-re vonatkozó pólusa.

95.3. Mindazok a hiperbolikus egyenesek, amelyeknek közös végpontja a $\mathcal{C}$ görbe U pontja, egy egyenes-sereget alkotnak (értelmezést l. első kötet, 129. o.); ezt *párhuzamos egyenes-sereg*nek nevezzük. A síknak azok a *IV* típusú kollineációi, amelyeknek egyedüli fixpontja U, s invariáns egyenese $\mathcal{C}$-nek az U ponthoz tartozó u érintője, s melyek a $\mathcal{C}$ görbét önmagába viszik át, együtt csoportot alkotnak (**65**.11). A hiperbolikus sík megfelelő mozgásainál az U végpontú egyenes-sereg önmagába megy át; egy tetszőleges pontnak a csoportnál származó pályavonalát a párhuzamos egyenes-sereg *horociklus*ának nevezzük; ez olyan másodrendű görbe, amelybe a $\mathcal{C}$ görbét egy U fixpontú és u tengelyű speciális perspektivitás viszi át. A párhuzamos egyenes-sereg horociklusai egy *IV* típusú kúpszeletsorhoz tartoznak, amelyet a $\mathcal{C}$ görbe, az U pont s az u érintő határoz meg.

A hiperbolikus síknak egy $a=UU'$ egyenese mentén való *eltolásai* (l. első kötet, 115. o.) a projektív sík olyan. I típusú kollineációiból származnak, amelyeknek fixpontjai az U, U' végpontok s az a egyenesnek $\mathcal{C}$-re vonatkozó A pólusa. Az a egyenes mentén való eltolások csoportjánál bármely, a-hoz nem tartozó pont pályavonala az a egyenesnek egy *aequidistans vonala;* ez a projektív síkban az U, U' pontok s az ezekben $\mathcal{C}$-hez húzott u, u' érintők által meghatározott, V típusú kúpszeletsornak az U, U' pontok által határolt egyik íve.

A hiperbolikus síknak valamely Q pontja körül való *forgásai* (l. első kötet, 116—118. o.) a projektív síknak azokból a III típusú kollineációiból származnak, amelyeknek fixpontja Q, invariáns egyenese Q-nak a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozó q polárisa, s amelyek a q egyenesen a $\mathcal{C}$-re vonatkozóan konjugált pontok **J** elliptikus involuciójával felcserélhetők. Ezek a kollineációk csoportot alkotnak (**65**.11); bármely pontnak pályavonala ahhoz a III típusú kúpszeletsorhoz tartozik, amelyet a Q pont, a q egyenes s ennek **J** elliptikus involuciója határoz meg. A hiperbolikus sík Q középpontú *kör*ei ennek a kúpszeletsornak a $\mathcal{C}$ görbe belsejében fekvő görbéi.

95.4. A hiperbolikus síkban egy párhuzamos egyenes-sereg s az ennek horociklusaiból álló sereg olyan görberendszert alkot, hogy a sík minden pontján mindkét seregnek egy és csak egy eleme megy át. A párhuzamos sereg egyenesei mentén való eltolásokból s a horociklusaik mentén való eltolásokból alkotott szorzatok a *hiperbolikus síkban egyszeresen tranzitív csoportot* alkotnak. A projektív sík megfelelő csoportja azokból a kollineációkból áll, melyek a $\mathcal{C}$ görbét megmaradó irányítással önmagába viszik át, s közös fixpontjuk a $\mathcal{C}$ görbének egy U pontja (U a párhuzamos egyenes-sereg közös végtelen távoli pontja). A csoport leképezései a $\mathcal{C}$ görbén olyan csoportot származtatnak, amely az egyenesnek az irányítását megtartó hasonlósági leképezéseiből álló csoporttal aequivalens. Mivel az utóbbi csoport nem kommutatív, ezért a hiperbolikus sík mozgásaiból képezett, egyszeresen tranzitív csoport sem kommutatív.

95.5. Tétel. *A hiperbolikus sík bármely két egyenesének, amely nem metszi egymást s nem párhuzamos, van egy és csak egy közös merőlegese.*

Bizonyítás. A két megadott hiperbolikus egyenest tartalmazó projektív egyenesek metszéspontja a $\mathcal{C}$ görbe külsejében fekszik; ennek polárisa konjugált a két megadott egyeneshez a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozóan, tehát $\mathcal{C}$ belsejéhez tartozó szakasza, mint hiperbolikus egyenes, merőleges a két megadott hiperbolikus egyenesre.

A hiperbolikus síkon e szerint két tetszőleges egyenes vagy egy sugársorhoz tartozik, azaz metszi egymást, vagy egy párhuzamos egyenes-sereghez, vagy egy egyenesre merőleges egyenesek seregéhez tartozik; az utóbbi egyenes-sereg epiciklusai a közös merőlegesnek aequidistans vonalai.

A hiperbolikus síkgeometria körmodellje.

A projektív térben felveszünk egy $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felületet s egy ezt metsző ϱ síkot. $\mathcal{F}$ és ϱ metszésvonala egy $\mathcal{C}$ másodrendű görbe; ennek belsejében értelmezünk egy hiperbolikus síkgeometriát. A ϱ síknak az $\mathcal{F}$ felületre vonatkozó Q pólusából $\mathcal{C}$ belsejét az $\mathcal{F}$ felületre vetítjük; a hiperbolikus egyeneseknek az $\mathcal{F}$ felületen azok a másodrendű görbék felelnek meg, amelyek $\mathcal{C}$-t merőlegesen metszik (értelmezést l. 390. o.).

A hiperbolikus sík kongruens leképezéseit kiterjeszthetjük a projektív tér olyan kollineációivá, melyek az $\mathcal{F}$ felületet önmagába viszik át; ezt ugyanúgy látjuk be, mint az elliptikus geometriára vonatkozó hasonló állítást (**94**.3). A hiperbolikus sík minden kongruens leképezésének megfelel ilyen módon a tér két kollineációja, s ezek az $\mathcal{F}$ felület homográfikus vagy antihomográfikus leképezéseit származtatják. Jelöljük φ-vel $\mathcal{F}$-nek a $\mathcal{C}$ görbe által határolt egyik részét. A $\mathcal{C}$ görbe belsejének s a φ felületrésznek a pontjai között a Q pontból való vetítés kölcsönösen egyértelmű vonatkozást létesít. A hiperbolikus sík minden kongruens leképezésének megfelel az $\mathcal{F}$ felületnek egy olyan homográfikus vagy antihomográfikus leképezése, amely φ-t önmagába viszi át.

95.6. *A hiperbolikus sík mozgásainak az $\mathcal{F}$ felületen azok a homográfiák felelnek meg, amelyek a $\mathcal{C}$ görbét megmaradó irányítással önmagába, s a φ felületrészt önmagába viszik át.*

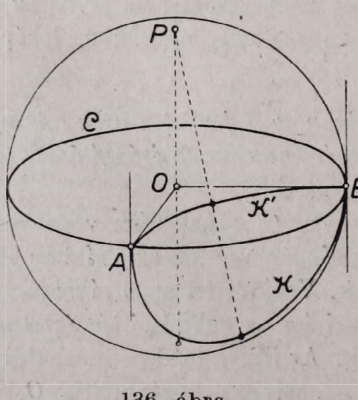
$\mathcal{C}$ belsejének valamely pontja legyen O, ennek $\mathcal{F}$-re vonatkozó polársíkja υ; az $\mathcal{F}$-re vonatkozóan konjugált pontok az υ síkban egy Ω elliptikus polaritást származtatnak. Vegyük fel az υ síkot a tér végtelen távoli síkjának, s az Ω polaritást az euklidesi tér értelmezésére szolgáló abszolut poláritásnak. Az ilyen módon meghatározott euklidesi térben $\mathcal{F}$ gömbfelület, amelynek középpontja O, és

$\mathcal{F}$-nek egyik főköre a $\mathcal{C}$ görbe. A hiperbolikus egyeneseknek a φ félgömbön azok a félkörök felelnek meg, amelyeknek síkja az euklidesi szögmérés értelmében merőleges a φ-t határoló $\mathcal{C}$ főkör síkjára; ezeket a félköröket a $\mathcal{C}$ *főkörre merőleges félkörök*nek nevezzük.

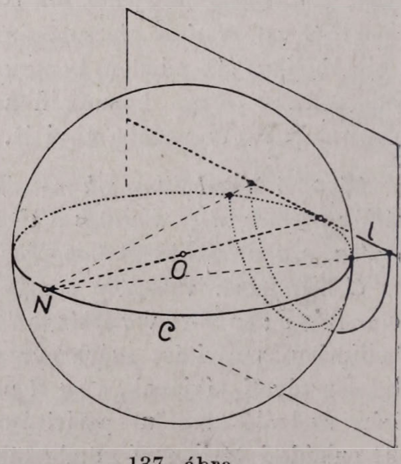
95.7. A $\mathcal{C}$ főkör ϱ síkjára merőleges átmérőnek $\mathcal{F}$-fel való metszéspontjai közül jelöljük P-vel azt, amely nem tartozik a φ félgömbhöz; a P pontból vetítsük φ-t a ϱ síkra. Ha $\mathcal{K}$ az $\mathcal{F}$ gömbfelületen fekvő kör, mely merőleges a $\mathcal{C}$ főkörre, s ezt az A és B pontokban metszi, akkor $\mathcal{K}$-nak az A ponthoz tartozó érintője, vagyis az A pontban a ϱ síkra emelt merőleges a P pontból való vetítésnél a ϱ sík AO egyenesébe megy át (**136. ábra**). A $\mathcal{K}$ kör képe tehát egy olyan $\mathcal{K}'$ kör, melynek az A ponthoz tartozó AO érintője merőleges a $\mathcal{C}$ körnek ugyanehhez a ponthoz tartozó érintőjére. A $\mathcal{K}'$ kört s ennek $\mathcal{C}$ belsejéhez tartozó ívét a $\mathcal{C}$ *körre merőleges*nek nevezzük.

A fenti eljárással előállítottuk a hiperbolikus síkgeometria POINCARÉ-*féle modell*jét a $\mathcal{C}$ kör belsejében. *A hiperbolikus egyenesek képei a $\mathcal{C}$ körre merőleges körívek, s a hiperbolikus sík mozgásait a $\mathcal{C}$ síkjában bevezetett komplex koordinátának azok a lineáris transzformációi fejezik ki, amelyeknél a $\mathcal{C}$ kör megmaradó irányítással önmagába megy át.*

95.8. A POINCARÉ-féle modellnek egy másik, az előbbivel aequivalens alakját úgy kapjuk meg, hogy a φ félgömböt a $\mathcal{C}$ főkör valamely N pontjából vetítjük az ON egyenesre merőleges, az N pontot nem tartalmazó ν síkra. (**137. ábra**). A $\mathcal{C}$ körnek a ν síkban egy l



136. ábra.



137. ábra.

egyenes, a φ félgömbnek az l egyenes által határolt egyik félsík felel meg. A φ félgömbhöz tartozó, $\mathcal{C}$-re merőleges félkörök az l egyenesre merőleges félkörökbe, illetve félsugarakba mennek át. Vezessünk be a ν síkon egy z komplex koordinátát, melynek valós tengelye az l egyenes. Az $\mathcal{F}$ felület homográfiáinak, amelyek φ-t önmagába viszik át, a z komplex változónak azok a valós együtthatójú lineáris transzformációi felelnek meg, melyeknek determinánsa pozitív.

A Poincaré-féle modell analitikus tárgyalását l. a 99. §-ban.

Az euklidesi és a nem-euklidesi síkgeometriák képe elliptikus másodrendű felületeken.

Előbbi eredményeink összefoglalásából kapjuk az euklidesi és a nem-euklidesi, hiperbolikus és elliptikus síkgeometriák következő, egységes képét.

Legyen az affin térben $\mathcal{F}$ egy elliptikus másodrendű felület.

Ha $\mathcal{F}$ *ellipszoid,* akkor azok az affinitások, melyek $\mathcal{F}$-et megmaradó irányítással önmagába viszik át, illetve az általuk $\mathcal{F}$-en származtatott homográfiák **G** csoportja az $\mathcal{F}$ ellipszoidon *elliptikus síkgeometriát* határoz meg. Ennek pontjai $\mathcal{F}$ átellenes (azaz egy átmérőn fekvő) pontpárjai, egyenesei $\mathcal{F}$-nek átmérősíkjaival való metszésvonalai; két idom akkor és csak akkor egybevágó, ha a **G** csoport valamely leképezése az egyiket a másikba viszi át.

Ha $\mathcal{F}$ *kétpalástú hiperboloid,* akkor azok az affinitások, melyek $\mathcal{F}$-et s ennek mindegyik palástját önmagába viszik át, illetve az általuk $\mathcal{F}$-en származtatott homográfiák és antihomográfiák egy **G** csoportot alkotnak, mely $\mathcal{F}$-nek egyik palástján, φ-n *hiperbolikus síkgeometriát* értelmez. Ennek egyenesei φ-nek átmérősíkjaival való metszésvonalai; a **G** csoport a hiperbolikus sík kongruenciacsoportja, s a benne foglalt homográfiák invariáns alcsoportot alkotnak, mely a hiperbolikus sík mozgáscsoportja.

Ha $\mathcal{F}$ *elliptikus paraboloid,* akkor azoknak az affinitásoknak, melyek $\mathcal{F}$-et önmagába viszik át, az $\mathcal{F}$ paraboloidon megfelelő homográfiák és antihomográfiák egy **G** csoportot alkotnak s ez $\mathcal{F}$-en (*parabolikus* vagy) *euklidesi geometriát* értelmez ; **G** az euklidesi sík hasonlósági csoportja.

96. §. Az euklidesi távolság- és szögmérés.

96.1. Két pont távolsága.

Tárgyalásunk alapjául felvesszük az euklidesi geometria **I**, **II**, **III**, **IV** axiómáit, továbbá az **V**, DEDEKIND-féle folytonossági axiómát ; az utóbbi helyett, a következő tárgyalás céljára, elegendő lenne felvenni az ARCHIMEDES-féle **V. d** axiómát.

Az euklidesi sík vagy tér bármely két P, Q pontjához hozzárendelhetünk egy nem negatív $\varrho(P, Q)=\varrho(Q, P)$ valós számot, melyet a *két pont távolságá*nak vagy az általuk meghatározott PQ *szakasz mérőszámá*nak nevezünk (l. első kötet, 42. §). Az értelmezés folytán fennállanak a $\varrho(P, Q)$ távolságra a következő tulajdonságok :

1. $\varrho(P, Q)=0$, ha a P pont egybeesik Q-val, és csak akkor.

2. Ha a Q pont a PR szakasz pontja, akkor

$$\varrho(P, Q) + \varrho(Q, R) = \varrho(P, R),$$

minden más Q pontra :

$$\varrho(P, Q) + \varrho(Q, R) > \varrho(P, R).$$

3. Ha a PQ és $P'Q'$ szakaszok egyenlők, akkor és csak akkor

$$\varrho(P, Q) = \varrho(P', Q').$$

Az euklidesi távolságmérés *egységszakaszá*t tetszés szerint vehetjük fel, azaz két tetszőleges O, E pontnak megfeleltethetjük a

$$\varrho(O,E) = 1$$

távolságot ; ezáltal bármely két P, Q pont $\varrho(P, Q)$ távolsága egyértelműen meg van határozva.

Mivel az euklidesi tér két pontját bármely két pontjába átvihetjük hasonlósági leképezéssel, azért az egységszakasz megváltoztatása nem változtatja meg az euklidesi geometriát. Ha az egységszakaszt két különböző módon vesszük fel, s a megfelelő távolságmértéket $\varrho(P, Q)$-val és $\varrho^*(P, Q)$-val jelöljük, akkor megadható az euklidesi térnek önmagára való olyan hasonlósági leképezése, hogy bármely két P, Q pont $\varrho(P, Q)$ távolsága egyenlő a megfelelő P', Q' pontok $\varrho^*(P' Q')$ távolságával.

A P és a Q pontnak egy derékszögű koordinátarendszerre vonatkozó koordinátáit jelöljük (x, y, z)-vel és (x', y', z')-vel. A koordináta meghatározására alkalmazott egységszakaszt vegyük fel a $\varrho(P, Q)$ távolságmérés egységszakaszának. A P pontnak a koordinátarendszer

O kezdőpontjától való távolságát, s a P, Q pontok távolságát a következő képletek fejezik ki (l. első kötet, 254. o.):

$$\varrho(O,P) = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \varrho(P,Q) = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

A $\varrho(P, Q)$ euklidesi távolságot PQ-val is fogjuk jelölni.

96.2. A körív hosszúsága és a szög abszolut mérőszáma.

A szögek nagyságát ugyancsak jellemezhetjük egy mérőszámmal. Minden α szögnek megfeleltetünk egy pozitív valós $\Theta(\alpha)$ számot, egymással egyenlő szögeknek ugyanazt a számot, olyan módon, hogy ha az α és β szögek összege egyenlő a γ szöggel, akkor fennáll a

$$\Theta(\alpha) + \Theta(\beta) = \Theta(\gamma)$$

egyenlőség. A $\Theta(\alpha)$ mérőszám meghatározása szintén tartalmaz egy tetszőlegesen választható konstans szorzót; ha $\Theta^*(\alpha)$ egy más mérőszám, akkor minden α szögre nézve

$$\Theta^*(\alpha) = c.\Theta(\alpha) \qquad (c = \text{konstans},\ c \neq 0).$$

A c konstans különböző megválasztása szerint a szögeknek lényegesen különböző szögmértékeit kapjuk, melyek nem vihetők át egymásba az euklidesi tér kongruens vagy hasonlósági leképezéseivel, mivel ezeknél, például, derékszög derékszögbe megy át. Az első kötet 43. §-ában (284. o.) adott tárgyalásban a $\Theta(\alpha)$ szögmértéket olyan módon határoztuk meg, hogy az R derékszögnek a $\Theta(\mathsf{R})={}^1/_2$ érték feleljen meg. Most más szögmértéket vezetünk be olyan módon, hogy a derékszögnek a

$$\Theta^*(\mathsf{R}) = \frac{\pi}{2}$$

mérőszám feleljen meg, ahol π az egység sugarú körvonal fél hosszúságát jelenti; ezt következőképpen értelmezzük.

A $P_1P_2...P_n$ (zárt) *sokszög hosszúságán* vagy *kerületén* értjük a $P_1P_2, P_2P_3,..., P_nP_1$ szakaszok mérőszámainak összegét.

Legyen K egy kör, melynek középpontja O és sugara a távolságmérték egysége; azaz, ha P a K kör tetszőleges pontja, akkor

$$OP = \varrho(O, P) = 1.$$

Legyenek $P_1, P_2,..., P_n$ a $\mathcal{K}$ kör tetszőleges olyan pontjai, amelyeknek a körön való ciklikus elrendezése $(P_1P_2...P_n)$. A $P_1P_2...P_n$ egyszerű sokszöget a $\mathcal{K}$ *körbe írt sokszög*nek nevezzük. Könnyen belátható, hogy a $\mathcal{K}$ körbe írt bármely egyszerű sokszög kerülete kisebb egy bizonyos állandónál. A $\mathcal{K}$ körbe írt egyszerű sokszögek kerületének *felső határát*, vagyis azt a legkisebb számot, mely nagyobb, mint a $\mathcal{K}$ körbe írt bármely egyszerű sokszög kerülete, a $\mathcal{K}$ *körvonal hosszúságá*nak vagy a *kör kerületé*nek nevezzük és 2π-vel jelöljük.

Ugyanilyen módon értelmezzük egy tetszőleges kör kerületét s könnyen belátjuk, hogy az r sugarú kör kerülete:

$$2r\pi.$$

A $\mathcal{K}$ körvonal két P és Q pontja által meghatározott egyik PQ ívének hosszúságát következőképpen értelmezzük. Legyenek $P=P_0, P_1, \ldots, P_n=Q$ a PQ ív tetszőleges olyan pontjai, amelyeknek ezen az íven való lineáris elrendezése $P_0P_1\ldots P_n$. A $P_0P_1\ldots P_n$ beírt törtvonal hosszúsága:

$$\varrho(P_0, P_1) + \varrho(P_1, P_2) + \ldots + \varrho(P_{n-1}, P_n).$$

A PQ *körív hosszúsága* értelmezés szerint egyenlő a beírt törtvonalak hosszúságának felső határával.

Jelöljük $\theta(\alpha)$-val az első kötet 43. §-ában bevezetett szögmértéket. A

$$\theta^*(\alpha) = \pi . \theta(\alpha)$$

számot nevezzük az α *szög abszolut mérőszámá*nak.

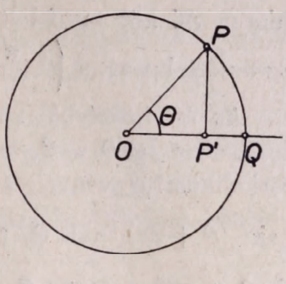
Ha az egység sugarú $\mathcal{K}$ kör két tetszőleges pontja P és Q, akkor az $\alpha = \sphericalangle POQ$ középponti szög abszolut mérőszáma egyenlő a félkörnél kisebb PQ ív hosszúságával. Ha az O középpontú és r sugarú $\mathcal{K}'$ körvonalnak az $\overrightarrow{OP}$ és $\overrightarrow{OQ}$ félsugarakkal való metszéspontja P' és Q', s ha $\widehat{P'Q'}$ jelenti a félkörnél kisebb $P'Q'$ ív hosszúságát, akkor az $\alpha = \sphericalangle P'OQ' = \sphericalangle POQ$ szög abszolut mérőszáma:

$$\theta^*(\alpha) = \frac{\widehat{P'Q'}}{r}.$$

A következőben a szög abszolut mérőszámát $\theta = \theta(\alpha)$-val fogjuk jelölni, s ugyanezzel a számmal jelöljük magát az α szöget is; tehát a derékszöget $\frac{\pi}{2}$-vel, az egyenesszöget π-vel stb.

96.3. Elemi függvények.

A θ szög trigonometriai függvényeit a szokásos módon értelmezzük. Tegyük fel egyelőre, hogy θ kisebb $\frac{\pi}{2}$-nél, azaz hegyesszög; legyen $OP'P$ olyan derékszögű háromszög, melynek $\sphericalangle POP'$ szöge egyenlő θ-val, s P'-nél fekvő szöge derékszög. Az oldalak mérőszámát jelöljük OP', $P'P$, OP-vel. Értelmezés szerint:



138. ábra.

$$\sin\theta = \frac{P'P}{OP}, \quad \cos\theta = \frac{OP'}{OP}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{P'P}{OP'}.$$

Az értelmezésből következik a PYTHAGORAS-féle tétel szerint (l. első kötet, 242. o.):

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1. \tag{1}$$

A fenti függvények értelmezését kiterjesztjük a θ valós változó összes értékére. Felveszünk a síkban egy (x, y) derékszögű koordinátarendszert, ennek kezdőpontját O-val jelöljük. Legyen $\mathcal{K}$ az O középpontú, egység sugarú kör, s Q ennek a pozitív x-tengellyel való metszéspontja. A Q pontnak a $\theta=0$ értéket, s a $\mathcal{K}$ körvonal minden P pontjának a pozitív irányítású QP körív θ hosszúságát feleltetjük meg. Ha P az x-tengely által határolt felső félsíkban fekszik, vagyis, ha a P pont y koordinátája pozitív, akkor a P-nek megfelelő θ érték a $\sphericalangle QOP$ szög abszolut mérőszáma. Ha ellenben P az alsó félsíkban fekszik, akkor θ egyenlő a $\mathcal{K}$ kör kerületének, 2π-nek s a $\sphericalangle QOP$ szög abszolut mérőszámának a különbségével. A $\mathcal{K}$ kör Q-val átellenes pontjának a $\theta=\pi$ érték felel meg. Ilyen módon a $0\leq\theta<2\pi$ számközhöz tartozó számértékek és a $\mathcal{K}$ körvonal pontjai között kölcsönösen egyértelmű vonatkozást létesítettünk.

Ha θ olyan valós szám, mely nem tartozik a $(0, 2\pi)$ számközhöz, legyen θ' ennek a számköznek az a száma, mely θ-val mod 2π kongruens, azaz:

$$\theta = \theta' + 2n\pi,$$

ahol n pozitív vagy negatív egész számot jelent. A θ és a θ' értéknek a $\mathcal{K}$ körvonalon ugyanazt a pontot feleltetjük meg.

A θ számértékhez tartozó cos θ és sin θ értékeket úgy értelmezzük, mint a $\mathcal{K}$ kör megfelelő P pontjához tartozó x és y koordinátát. Ez az értelmezés a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ számközben megegyezik az előbbivel.

Az értelmezésből következik, hogy $\sin\theta$, $\cos\theta$, s ezek hányadosa, azaz tg θ a θ valós változónak a 2π, illetve π periodussal periodikus függvényei, azaz:

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta, \quad \mathrm{tg}\,(\theta + \pi) = \mathrm{tg}\,\theta\,;$$

$\sin\theta$ páratlan és $\cos\theta$ páros függvény, azaz:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta,$$

s fennáll közöttük a következő kapcsolat:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta.$$

Az analízis elemeiből ismert módon adódnak a trigonometrikus függvényeknek egymással, s a természetes logaritmussal, illetve az exponenciális függvénnyel való kapcsolatai. Következő tárgyalásunkban ezeket ismertnek tesszük fel, s csupán emlékeztetünk az összeadási tételekre:

$$\sin(\theta + \theta') = \sin\theta . \cos\theta' + \cos\theta . \sin\theta', \tag{2}$$

$$\cos(\theta + \theta') = \cos\theta . \cos\theta' - \sin\theta . \sin\theta'\,; \tag{3}$$

továbbá a következő képletekre:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta. \end{aligned} \quad (i = \sqrt{-1}) \tag{4}$$

Ebből a két egyenletből adódik $\cos\theta$ és $\sin\theta$ következő kifejezése:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \tag{5}$$

Az exponenciális függvény alapján értelmezzük a hiperbolikus függvényeket a következő képletekkel:

$$\cosh\theta = \frac{1}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta}), \; \sinh\theta = \frac{1}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta}), \; \mathrm{tgh}\,\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} \tag{6}$$

A függvények értelmezését a változó komplex értékeire is kiterjesztve, adódik a fenti képletekből:

$$\cosh\theta = \cos(i\theta), \; \sinh\theta = -i\sin(i\theta), \; \mathrm{tgh}\,\theta = -i\,\mathrm{tg}\,(i\theta). \tag{7}$$

96.4. Az euklidesi sík és tér analitikus geometriájáról.

Az euklidesi síkban egy P pont derékszögű koordinátáit jelöljük (x, y)-nal, s a P pontnak az O kezdőponttól való távolságát r-rel, továbbá a pozitív x-tengely és az $\overrightarrow{OP}$ félsugár által bezárt szög abszolut mérőszámát θ-val, vagy $-\theta$-val, a szerint, hogy P a felső vagy az alsó félsíkhoz tartozik. Az (r, θ) számpárt a P pont *poláris koordinátái*nak nevezzük. Ezek és a derékszögű koordináták között a következő összefüggések érvényesek:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \tag{8}$$
$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

A (8) egyenletekből r kiküszöbölésével kapjuk az OP egyenes következő egyenletét:

$$x\sin\theta - y\cos\theta = 0. \tag{9}$$

Legyen P és P' a sík két, O-tól különböző pontja, derékszögű koordinátáikat jelöljük (x, y)-nal és (x', y')-vel, poláris koordinátáikat (r, θ)-val és (r', θ')-vel. A két pont távolságának kifejezése az (1), (3) és (8) képlet alkalmazásával:

$$\begin{aligned} PP'^2 &= (x-x')^2 + (y-y')^2 = (r\cos\theta - r'\cos\theta')^2 + \\ &+ (r\sin\theta - r'\sin\theta')^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta - \theta'). \end{aligned} \tag{10}$$

Legyenek (x, y, z) az euklidesi tér valamely P pontjának egy derékszögű koordinátarendszerre vonatkozó koordinátái; tegyük fel, hogy P különbözik a koordinátarendszer O kezdőpontjától. Az $\overrightarrow{OP}$ félsugár *iránycosinusain* értjük a pozitív x, y, illetve z-tengely és az $\overrightarrow{OP}$ félsugár által bezárt α, β, γ szög cosinusát. Ha az OP távolságot r-rel jelöljük, akkor a P pont (x, y, z) koordinátáit r-rel és az iránycosinusokkal következőképpen fejezhetjük ki:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma; \tag{11}$$

ebből:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

A (11) egyenletekből r kiküszöbölésével kapjuk az OP egyenes következő egyenletrendszerét:

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}.$$

Ha P és P' két, egymástól és O-tól különböző pont, amelyeknek koordinátái (x, y, z) és (x', y', z'), akkor az OP és OP' egyenesek merőlegességének feltétele a következő egyenlet (l. első kötet, 254. o.):

$$xx' + yy' + zz' = 0.$$

Ha az $\overrightarrow{OP'}$ félsugár iránycosinusait a', b', c'-vel jelöljük, akkor ez a feltétel a következő alakban írható:

$$a'x + b'y + c'z = 0. \tag{12}$$

Ennek az egyenletnek azok és csak azok az (x, y, z) számhármasok tesznek eleget, amelyeknek megfelelő P pontok az OP' egyenesre merőleges, s a kezdőponton átmenő síkban feküsznek; a (12) egyenlet a nevezett *sík egyenlete.* Hasonlóan, ha (x_0, y_0, z_0) jelenti az OP' egyenes valamely Q pontjának a koordinátáit, akkor

$$a'(x-x_0) + b'(y-y_0) + c'(z-z_0) = 0 \tag{13}$$

annak a síknak az egyenlete, amely merőleges az OP' egyenesre s átmegy a Q ponton.

Legyen P és P' a tér két tetszőleges pontja, koordinátáikat jelöljük (x, y, z)-vel és (x', y', z')-vel. A P pontnak az OP' egyenesre való merőleges vetülete értelmezés szerint a P ponton átmenő s az OP' egyenesre merőleges síknak OP'-vel való Q metszéspontja. Ennek (x_0, y_0, z_0) koordinátáira s a P pont (x, y, z) koordinátáira teljesül a (13) egyenlet, amelyben a', b', c' jelentik az $\overrightarrow{OP'}$ félsugár iránycosinusait. Jelöljük q-val az OQ távolságot; mivel

$$x_0 = qa', \quad y_0 = qb', \quad z_0 = qc',$$

a (13) egyenletből következik:

$$a'x + b'y + c'z = a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 = q(a'^2 + b'^2 + c'^2) = q;$$

tehát:

$$q = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}. \tag{14}$$

A q távolság egyenlő a $\sphericalangle P'OP = \theta$ szög cosinusának és az

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

távolságnak a szorzatával; jelöljük az $\overrightarrow{OP}$ félsugár iránycosinusait a, b, c-vel. Az $\overrightarrow{OP}$ és $\overrightarrow{OP'}$ félsugár által bezárt θ szög cosinusának a két félsugár iránycosinusaival s a P, P' pontok koordinátáival való kifejezése:

$$\cos\theta = aa' + bb' + cc' = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}. \tag{15}$$

Arra a síkra, melynek egyenlete

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

az O kezdőpontból merőlegest bocsátunk, ennek talppontja legyen P. Az $\overrightarrow{OP}$ félsugár iránycosinusai a (13) képlet szerint arányosak az A, B, C együtthatókkal. Ebből a (15) képlet alkalmazásával következik, hogy az

$$Ax + By + Cz + D = 0$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

síkok által bezárt θ szög cosinusát a következő képlet adja:

$$\cos\theta = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}} \tag{16}$$

Az (x, y) síkban fekvő

$$Ax + By + D = 0$$
$$A'x + B'y + D' = 0$$

egyenesek által bezárt θ szög cosinusát a (16) képletből a $C = C' = 0$ helyettesítéssel kapjuk, e szerint:

$$\cos\theta = \frac{AA' + BB'}{\sqrt{(A^2 + B^2)(A'^2 + B'^2)}}. \tag{17}$$

97. §. A projektív mérték analitikus kifejezése.

97.1. Hiperbolikus távolságmérték.

Tárgyalásunk alapjául a projektív geometria **P I, II** és **D** axiómáit vesszük fel.

Legyen $\mathfrak{C}$ egy másodrendű görbe; ennek belsejében értelmezünk egy hiperbolikus síkgeometriát. A görbe belsejében fekvő AB és $A'B'$ szakaszt egyenlőnek nevezzük, ha van a projektív síknak olyan kollineációja, mely a $\mathfrak{C}$ görbét önmagába s az AB szakaszt az $A'B'$ szakaszba viszi át.

Hiperbolikus szakaszok nagyságát egy valós számmal jellemezhetjük az első kötet 42. §-ában adott eljárással. Legyen egy hiperbolikus egyenes két végpontja U és V. Az egyenes tetszőleges O pontját *kezdőpontnak* s egy tőle különböző E pontját *egységpontnak* vesszük fel; tegyük fel, hogy elrendezésük $UOEV$. Az O pontnak a 0, E-nek az 1 értéket s az egyenes minden P pontjának kölcsönösen egyértelmű módon egy $\varrho=\varrho(P)$ valós koordinátát feleltetünk meg úgy, hogy ha P, Q, P', Q' az egyenes tetszőleges olyan pontjai, amelyek által meghatározott PQ és $P'Q'$ szakaszok egyenlők és megegyező irányításúak, akkor fennáll a

$$\varrho(Q)-\varrho(P)=\varrho(Q')-\varrho(P')$$

egyenlőség és megfordítva (l. első kötet, 277. o., 226. tétel). A ϱ koordinátát *hiperbolikus távolságkoordinátának* nevezzük; ki fogjuk fejezni a projektív síkon bevezetett (x_1, x_2, x_3) homogén pontkoordinátákkal.

Legyenek (z_1, z_2, z_3) és (z_1', z_2', z_3') az U és a V pont koordinátái. Ezekkel az UV egyenes tetszőleges P pontjának (x_1, x_2, x_3) koordinátáit a következő alakban fejezhetjük ki:

$$x_i=\lambda z_i+\lambda' z_i' \quad (i=1,2,3). \tag{1}$$

Az U, V pontok homogén koordinátáiban rejlő arányossági tényezőket válasszuk meg oly módon, hogy az O pont koordinátáinak (1) alakú kifejezésében $\lambda=\lambda'$ legyen. Az UV egyenes minden P pontjának megfelel egy egyértelműen meghatározott

$$\xi=\frac{\lambda'}{\lambda}$$

érték; ξ *projektív koordináta az* UV *egyenesen*, melynek alappontjai

$$U(\xi=0),\ O(\xi=1),\ V(\xi=\infty)$$

(l. **11**.7 és **40**.1).

A hiperbolikus síknak azok a mozgásai, melyek az UV irányított egyenest önmagába viszik át, az UV projektív egyenesnek hiperbolikus leképezéseit származtatják, az U, V fixpontokkal. Ezeknek kifejezése a ξ projektív koordinátával:

$$\xi'=\xi\,.\,\xi_0, \tag{2}$$

hol ξ_0 jelenti az O pont képének koordinátáját (**21**.1). Jelöljük c-vel az E egységpontnak megfelelő ξ-koordinátát; az $UOEV$ elrendezés folytán $c>1$. Az UV hiperbolikus egyenesnek az OE egységszakasszal való **T** eltolását a ξ koordináta

$$\xi'=c\,.\,\xi$$

transzformációja fejezi ki. Az O pontnak $\mathbf{T}$ pozitív és negatív hatványainál származó képpontjaihoz a ϱ hiperbolikus koordináta $1, 2, 3, \ldots$ és $-1, -2, -3, \ldots$ értékei tartoznak. A $\mathbf{T}^n$ leképezést a

$$\xi' = c^n \cdot \xi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

képlet fejezi ki, tehát ugyanezeknek a pontoknak ξ projektív koordinátája rendre: $c^1, c^2, c^3, \ldots$ és $c^{-1}, c^{-2}, c^{-3}, \ldots$ Az az eltolás, mely az O pontot az OE hiperbolikus szakasz középpontjába viszi át, a $\mathbf{T}$ leképezés négyzetgyöke: $\mathbf{T}^{1/2}$; ennek kifejezése:

$$\xi' = c^{1/2} \cdot \xi.$$

E szerint a $\varrho = \frac{1}{2}$ értéknek a $\xi = c^{1/2}$ érték felel meg. Hasonlóan, a $\xi = \frac{1}{2^n}$ értéknek $\xi = c^{1/2^n}$, s minden $\varrho = \frac{m}{2^n}$ diadikus racionális törtnek a $\xi = c^{m/2^n}$ érték felel meg. Folytonossági okokból következik ebből hogy bármely valós ϱ értéknek megfelelő pont projektív koordinátája:

$$\xi = c^\varrho,$$

azaz:

$$\varrho = \frac{\log \xi}{\log c}. \tag{3}$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\frac{k}{2} = \frac{1}{\log c};$$

ezt a pozitív konstanst a hiperbolikus távolságmérés OE egységszakasza határozza meg.

Az UV egyenes PQ irányított *szakaszának hiperbolikus mérőszámán* értjük a

$$\varrho(Q) - \varrho(P)$$

különbség értékét. Ha PQ pozitív irányítású szakasz, vagyis, ha fennáll az $UPQV$ elrendezés, akkor $\varrho(Q) - \varrho(P) > 0$; ezt a pozitív számot $\varrho(P, Q)$-val jelöljük, s a *P, Q pontok hiperbolikus távolságá*nak nevezzük.

A PQ szakasz hiperbolikus mérőszámát fejezzük ki a P és a Q pont ξ és η projektív koordinátájával; a (3) képletből adódik:

$$\varrho(Q) - \varrho(P) = \frac{k}{2} \log \frac{\eta}{\xi}. \tag{4}$$

A P és a Q pontnak a síkban bevezetett (x_1, x_2, x_3) és (y_1, y_2, y_3) homogén koordinátáit fejezzük ki az U, V pontok koordinátáival:

$$x_i = \lambda z_i + \lambda' z_i', \quad y_i = \mu z_i + \mu' z_i' \quad (i = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Mivel

$$\xi = \frac{\lambda'}{\lambda}, \quad \eta = \frac{\mu'}{\mu},$$

ezért a **40**.3 tétel szerint a P, Q, V, U pontok kettősviszonya:

$$(P, Q, V, U) = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\lambda\mu'}{\mu\lambda'}. \tag{6}$$

Ebből a (4) képlet alapján adódik a következő eredmény:

A P, Q pontok hiperbolikus távolsága:

$$\varrho(P, Q) = \frac{k}{2} \log\,(P, Q, V, U), \tag{7}$$

ahol U és V jelenti a PQ hiperbolikus egyenes két végpontját, vagyis a PQ egyenes és a $\mathfrak{C}$ görbe két metszéspontját, olyan sorrendben, hogy elrendezésük $(UPQV)$.

A hiperbolikus távolságra vonatkozóan érvényesek az euklidesi távolságnak a 96. § elején felsorolt 1., 2., 3., tulajdonságai, mint az értelmezésből közvetlenül következik.

A P pontnak az U és a V ponttól való hiperbolikus távolsága végtelen, a fenti értelmezés szerint. Ez azt jelenti, hogy a mértékmeghatározás alapjául vett $\mathfrak{C}$ *másodrendű görbe a hiperbolikus sík végtelen távoli vonala.*

A $\mathfrak{C}$ másodrendű görbe egyenlete legyen:

$$f_{xx} = 0,$$

s az f_{xx} négyzetes alakhoz tartozó bilineáris alak: f_{xy}. A PQ egyenes és a $\mathfrak{C}$ görbe metszéspontjainak koordinátáit az (5) egyenletekből a következő képletekkel fejezhetjük ki:

$$z_i = \mu' x_i - \lambda' y_i, \quad z'_i = -\mu x_i + \lambda y_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

ahol az egyenletek baloldaláról elhagytuk a $(\lambda\mu' - \lambda'\mu)$ arányossági tényezőt. A $\frac{\mu}{\lambda}$, $\frac{\mu'}{\lambda'}$ értékek a következő egyenlet gyökei:

$$\mu^2 f_{xx} - 2\mu\lambda f_{xy} + \lambda^2 f_{yy} = 0,$$

tehát

$$\frac{\mu}{\lambda}, \frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{f_{xy} \pm \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xx}}.$$

Ezeknek hányadosa a (6) képlet szerint egyenlő a (P, Q, V, U) kettősviszonnyal. A P és a Q pont hiperbolikus távolságát, ezeknek a pontoknak x és y koordinátájával kifejezve, $\varrho(x, y)$-nal jelöljük; ennek kifejezése a fenti eredmények szerint:

$$\varrho(x, y) = \frac{k}{2} \log \frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}. \tag{8}$$

Jegyezzük meg, hogy az euklidesi geometriával ellentétben, a hiperbolikus geometriát megváltoztatja az egységszakasz megváltoztatása, vagyis a k konstansnak egy más értékkel való helyettesítése. A k konstans két különböző értékének megfelelő hiperbolikus síkok nem képezhetők le egymásra olyan módon, hogy egymásnak megfelelő pontpárok távolsága egyenlő legyen. A hiperbolikus síknak ugyanis nincsenek hasonlósági leképezései; ha a hiperbolikus síknak egy, az irányítását megtartó leképezése, melyet a projektív sík valamely kollineációja származtat, az O pontot önmagába viszi át, akkor ez egy forgás az O pont körül, vagyis a projektív síkon egy *III* típusú kollineáció, melynél egy, a $\mathcal{C}$ görbét tartalmazó *III* típusú kúpszeletsor mindegyik eleme önmagába megy át.

A (8) kifejezésből kapjuk a $\frac{\varrho}{k}$ hányados hiperbolikus függvényeinek következő kifejezését:

$$\cosh \frac{\varrho}{k} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx} f_{yy}}}, \tag{9}$$

$$\sinh \frac{\varrho}{k} = \sqrt{\frac{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}{f_{xx} f_{yy}}}, \tag{10}$$

97.2. Projektív szögmérték.

Legyen Ω a projektív síkban értelmezett elliptikus, vagy hiperbolikus polaritás, mely a projektív mértékmeghatározás alapjául szolgál. Legyen továbbá u és v két egyenes, melyeknek metszéspontja O; ha Ω hiperbolikus polaritás, akkor feltesszük, hogy O az Ω által meghatározott másodrendű görbe belsejében fekszik.

Az O pont polárisát jelöljük w-vel; a w egyenesen az Ω-nál konjugált pontok egy **J** *elliptikus involuciót* alkotnak.

A projektív síkon értelmezünk egy *euklidesi geometriát*, azáltal, hogy w-t vesszük fel végtelen távoli egyenesnek, s ennek **J** involucióját abszolut involuciónak. Az O ponton átmenő bármely két u, v egyenes által bezárt szög projektív mérőszámát az első kötet 43. §-ában leírt eljárással határozzuk meg, de oly módon, hogy a derékszögnek a $\frac{\pi}{2}$ érték feleljen meg. *Az u, v egyenesek által bezárt szögek projektív mérőszáma egyenlő ezeknek euklidesi szögmértékével;* a síknak az O pont körül való nem-euklidesi és euklidesi forgásai megegyeznek egymással. Ezek a forgások a projektív síknak azok a III típusú kollineációi, melyeknél invariáns az O pont, a w egyenes, ennek **J** involuciója, s az általuk meghatározott, III típusú kúpszeletsor elemei.

Vegyünk fel egy (x_1, x_2, x_3) projektív koordinátarendszert, amelynek alappontjai : $A_3 = O$, s a w egyenes két konjugált A_1 és A_2 pontja, olyan módon, hogy az Ω poláritást az

$$u_1 = x_1, \qquad u_2 = x_2, \qquad u_3 = \varepsilon x_3 \tag{11}$$

egyenletek fejezzék ki; ε jelenti a $+1$, vagy a -1 értéket, a szerint, hogy az Ω polaritás elliptikus, vagy hiperbolikus (l. 43. §, (6) és (7) képlet). Az (x_1, x_2, x_3) koordináták az értelmezett euklidesi sík homogén derékszögű koordinátái. Az $O = (0, 0, 1)$ ponton átmenő u és v egyeneseknek ugyanerre a rendszerre vonatkozó homogén vonalkoordinátái legyenek : $(u_1, u_2, 0)$ és $(v_1, v_2, 0)$. Ennek a két egyenesnek az egyenlete a következő :

$$u_1x_1 + u_2x_2 = 0, \qquad v_1x_1 + v_2x_2 = 0\,;$$

az általuk bezárt szögek cosinusa a 96. § (17) képlete szerint :

$$\cos\theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}}. \tag{12}$$

Jelöljük F_{uu}-val a (11) poláritásnak megfelelő négyzetes alakot

$$F_{uu} = u_1^2 + u_2^2 + \varepsilon u_3^2\,;$$

az ehhez tartozó bilineáris alak :

$$F_{uv} = u_1v_1 + u_2v_2 + \varepsilon u_3v_3.$$

Tekintettel arra, hogy az O ponton átmenő u és v egyenes harmadik koordinátája : $u_3 = v_3 = 0$, a (12) egyenlet jobboldalán álló kifejezés a következő alakban írható :

$$\cos\theta = \frac{F_{uv}}{\sqrt{F_{uu}\,F_{vv}}}. \tag{13}$$

Ez az u, v egyenesek által bezárt szögek Θ projektív (elliptikus, vagy hiperbolikus) mértékének kifejezése.

A (13) *egyenlet jobboldalán álló kifejezés nem változik a koordináták transzformációjánál.* Egy tetszőleges másik koordinátarendszerben legyen az Ω polaritás kifejezése :

$$u'_i = a_{i1}x'_1 + a_{i2}x'_2 + a_{i3}x'_3 \quad {\scriptstyle (i=1,\,2,\,3)} \quad (a_{ik} = a_{ki})\,;$$

az Ω polaritásnak ebben a koordinátarendszerben az

$$F'_{u'u'} = \sum_{i,k} A_{ik} u'_i u'_k \tag{14}$$

négyzetes alak felel meg, melynek A_{ik} együtthatói az $\|a_{ik}\|$ mátrixban az a_{ik} elemek adjungáltjait jelentik. Az $F'_{u'u'}$-höz tartozó bilineáris alak :

$$F'_{u'v'} = \sum_{i,k} A_{ik} u'_i v'_k\,.$$

A két koordinátarendszer összefüggését fejezzük ki a következő egyenletekkel (l. 41. §, (1)—(4) képlet) :

$$\left.\begin{aligned} x'_i &= c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + c_{i3}x_3 \\ u'_i &= C_{i1}u_1 + C_{i2}u_2 + C_{i3}u_3 \end{aligned}\right\} \quad {\scriptstyle (i=1,\,2,\,3)}\,;$$

a $|c_{ik}|$ determináns különbözik 0-tól ; C_{ik} jelenti a $\|c_{ik}\|$ mátrixban a c_{ik} elem adjungáltját. A fenti képletekből könnyű szamolással adódnak a következő kifejezések (elhagyva egy közös arányossági tényezőt) :

$$A_{ik} = \sum_\nu \varepsilon_\nu c_{i\nu} c_{k\nu} \text{ (ahol } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1,\ \varepsilon_3 = \varepsilon = \pm 1)\,;$$

$$F'_{u'u'} = \sum_{i,k,\nu} \varepsilon_\nu c_{i\nu} c_{k\nu} u'_i u'_k = \sum_\nu \varepsilon_\nu \Big(\sum_i c_{i\nu} u'_i\Big)^2 = u_1^2 + u_2^2 + \varepsilon u_3^2 = F_{uu}\,;$$

ugyanúgy :

$$F'_{v'v'} = F_{vv}\,,$$

és

$$F'_{u'v'} = \sum_{i,k,\nu} \varepsilon_\nu c_{i\nu} c_{k\nu} u'_i v'_k = \sum_\nu \varepsilon_\nu \Big(\sum_i c_{i\nu} u'_i\Big)\Big(\sum_k c_{k\nu} v'_k\Big) =$$
$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \varepsilon u_3 v_3 = F_{uv}\,;$$

tehát :

$$\frac{F'_{u'v'}}{\sqrt{F'_{u'u'} F'_{v'v'}}} = \frac{F_{uv}}{\sqrt{F_{uu} F_{vv}}}\,.$$

Az u, v egyenesek által bezárt szögek sinusának kifejezése :

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\frac{F_{uu}F_{vv}-F_{uv}^2}{F_{uu}F_{vv}}} \tag{15}$$

A $\cos\theta$ és $\sin\theta$ értékek kifejezéséből adódik :

$$e^{2i\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{F_{uv}+\sqrt{F_{uv}^2-F_{uu}F_{vv}}}{F_{uv}-\sqrt{F_{uv}^2-F_{uu}F_{vv}}} \tag{16}$$

s ebből

$$\theta = \theta(u,v) = \frac{-i}{2}\log\frac{F_{uv}+\sqrt{F_{uv}^2-F_{uu}F_{vv}}}{F_{uv}-\sqrt{F_{uv}^2-F_{uu}F_{vv}}} \tag{17}$$

A jobboldalon álló kifejezés a négyzetgyök és a logaritmus függvény többértékűsége következtében θ-val együtt a következő értékeket adja :

$$\theta,\ \pi-\theta,\ \theta+2n\pi,\ \pi-\theta+2n\pi\ \ (n = \text{egész szám}).$$

Mint a (13) képletben, ugyanúgy a (15)—(17) képletben helyettesíthetjük F_{uu}-t egy tetszőleges koordinátarendszerben az Ω polaritásnak megfelelő, vonalkoordinátás négyzetes alakkal, és F_{uv}-t a hozzátartozó bilineáris alakkal.

Jelöljük u'-vel és v'-vel az u és a v egyenesnek egy-egy O kezdőpontú félsugarát ; az $\sphericalangle(u', v')$ szögnek a θ és $\pi-\theta$ számok közül a $\frac{\pi}{2}$-nél kisebbet, illetve nagyobbat feleltetjük meg, mint mérőszámot, ha ez a szög hegyes-, vagy tompaszög, azaz derékszögnél kisebb, vagy nagyobb.

Az O pont körül való (elliptikus, vagy hiperbolikus) forgások csoportját jelöljük $\mathbf{G}_O$-val. Felvesszük az O középpontú félsugársornak egy pozitív irányítását ; ennek megfelelően a félsugársor bármely két u' és v' eleme által bezárt $\sphericalangle(u', v')$ *irányított szög*nek az $\sphericalangle(u', v')$ szög mérőszámát pozitív vagy negatív előjellel feleltetjük meg, a szerint, hogy az u', v' félsugárnak, s az u' meghosszabbítását képező u'' félsugárnak (u', v', u'') ciklikus elrendezése a pozitív, vagy a negatív irányításnak felel meg. A $\mathbf{G}_O$ csoport minden $\mathbf{T}$ elemének megfeleltetjük az u' és a $v' = \mathbf{T}(u')$ félsugarak által bezárt $\sphericalangle(u', v')$ irányított szög mérőszámát, mint paramétert ; ennek feltüntetésével a $\mathbf{T}$ leképezést $\mathbf{T}_\theta$-val jelöljük. A $\mathbf{T}_\theta$ és $\mathbf{T}_{\theta'}$ forgások szorzata a $\mathbf{T}_{\theta+\theta'}$ forgás, mely a mod 2π redukált $\theta + \theta'$ paraméterértéknek felel meg.

Megjegyezzük, hogy a (17) képlet szerint a hiperbolikus esetben *két párhuzamos egyenes által bezárt szög mértéke* 0. Ha ugyanis az u és v egyenesek x metszéspontja az $f_{xx} = 0$ görbén fekszik, akkor

$$F_{uu} F_{vv} - F_{uv}^2 = 0,$$

tehát a (17) képlet jobboldalán a log jel után következő kifejezés értéke 1, s ezért $\theta = 0$.

97.3. Elliptikus távolságmérték.

Az elliptikus síkon szakaszok mérőszámát a következő eljárással értelmezzük. Legyen w egy egyenes, ennek pólusa O, s legyen A és A' a w egyenes két konjugált pontja. A w egyenesnek az A, A' pontok által meghatározott AA' és $\overline{AA'}$ szakaszai egyenlők egymással; ezekhez hozzárendeljük a $\frac{k\pi}{2}$ mérőszámot, ahol k a mértékegység megválasztásától függő, pozitív konstans. Az AA' szakasz középpontja legyen B, ennek konjugáltja az $\overline{AA'}$ szakasz B' középpontja. Az $AB, BA', A'B', B'A$ szakaszoknak a $\frac{k\pi}{4}$ mérőszámot, az ezek felezéséből származó szakaszoknak a $\frac{k\pi}{8}$ mérőszámot feleltetjük meg, és így tovább, s bármely két mérőszámmal már ellátott szakasz összegének megfeleltetjük mérőszámuk összegét. Végül kiterjesztjük a mértékmeghatározást folytonosan az egyenes összes pontjaira.

A w egyenes két tetszőleges P, Q pontjának *elliptikus távolságán* értjük, s $\varrho(P, Q)$-val jelöljük a félsugárnál kisebb PQ szakasz mérőszámát, illetve, ha P és Q konjugált pontok, a PQ szakasz $\frac{k\pi}{2}$ mérőszámát.

Az elliptikus távolság- és szögmérés között a következő egyszerű összefüggés áll fenn. A w egyenes két tetszőleges pontja legyen P és Q s ezeknek polárisa p és q. A P, Q pontok $\varrho(P, Q)$ elliptikus távolságának k-adrésze egyenlő az OP és OQ egyenesek által bezárt hegyesszög, s ugyancsak a p, q egyenesek által bezárt hegyesszög elliptikus mértékével. (Ha P és Q konjugált pontok, akkor az $OP=q$ és $OQ=p$ egyenesek merőlegesek egymásra).

Jelöljük f_{xx}-szel azt a pontkoordinátákban négyzetes alakot, mely az elliptikus sík értelmezésére alapul vett polaritásnak felel meg, s f_{xy}-nal a hozzátartozó bilineáris alakot. Ugyanolyan módon, mint a szögmérték esetében, adódik az elliptikus távolságmérték következő kifejezése :

$$\varrho(x,y)=\frac{-ik}{2}\log\frac{f_{xy}+\sqrt{f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}}}{f_{xy}-\sqrt{f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}}},\tag{18}$$

továbbá a $\frac{\varrho}{k}$ hányados trigonometriai függvényei :

$$\cos\frac{\varrho}{k}=\frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx}f_{yy}}}\tag{19}$$

$$\sin\frac{\varrho}{k}=\sqrt{\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{f_{xx}f_{yy}}}.\tag{20}$$

Az elliptikus geometriában épen úgy lényeges a k konstans megválasztása, mint a hiperbolikus geometriában.

97.4. Az elliptikus és a szferikus geometria összefüggése.

Vegyük fel a koordinátarendszert úgy, hogy az elliptikus geometria értelmezésére szolgáló Ω elliptikus polaritást az

$$u_1=x_1,\quad u_2=x_2,\quad u_3=x_3\tag{21}$$

egyenletek fejezzék ki. Az elliptikus távolság- és szögmérték képletei ebben az esetben :

$$\cos\frac{\varrho}{k}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)}}\tag{22}$$

$$\cos\theta=\frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{\sqrt{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}}\tag{23}$$

megegyeznek az euklidesi tér k sugarú gömbjén értelmezett szferikus geometriának a képleteivel. A projektív sík (x_1, x_2, x_3) koordinátájú x pontjának feleltessük meg az euklidesi térnek azokat a pontjait, amelyeknek derékszögű koordinátái :

$$x=\frac{\pm kx_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}},\quad y=\frac{\pm kx_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}},\quad z=\frac{\pm kx_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}};\tag{24}$$

ez annak az $\mathfrak{F}$ gömbfelületnek két átellenes pontja, amelynek középpontja a koordinátarendszer O kezdőpontja, és sugara k. — A projektív sík (u_1, u_2, u_3) koordinátájú u egyenesének feleltessük meg azt a síkot, amelynek egyenlete az (x, y, z) derékszögű koordinátákkal:

$$u_1 x + u_2 y + u_3 z = 0,$$

illetve ennek a síknak az $\mathcal{F}$ gömbfelülettel való metszésvonalát.

Az u egyenes pólusának koordinátáit jelöljük (x_1', x_2', x_3')-vel; az ennek $\mathcal{F}$-en megfelelő pontok (x', y', z') és $(-x', -y', -z')$ koordinátáira s az u egyeneshez rendelt sík pontjainak (x, y, z) koordinátáira a (21) egyenletek folytán teljesül az

$$xx' + yy' + zz' = 0$$

egyenlőség. Ez azt jelenti, hogy az u egyenesnek megfelelő síkra merőleges átmérő végpontjai felelnek meg az u egyenes pólusának. Tehát a megadott α projektív sík és az $\mathcal{F}$ gömbfelület vonatkozása, melyet a (24) képletek értelmeznek, úgy állítható elő, hogy az α síkot a tér végtelen távoli síkjának, s a benne megadott Ω polaritást abszolut polaritásnak vesszük fel, s a végtelen távoli síkot az O középpontból az $\mathcal{F}$ gömbfelületre vetítjük.

Az $\mathcal{F}$ gömbfelület két P és Q pontjának *gömbi távolsága* értelmezés szerint egyenlő a rajtuk átmenő főkör félkörnél nem nagyobb $\widehat{PQ}$ ívének hosszúságával. Ha tehát φ jelenti a $\sphericalangle POQ$ szög abszolut mérőszámát, akkor

$$\widehat{PQ} = k \cdot \varphi.$$

A P és a Q pont (x, y, z) és (x', y', z') koordinátáival kifejezhetjük a φ szög cosinusát a 96. § (15) képlete szerint:

$$\cos\varphi = \cos\frac{\widehat{PQ}}{k} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)}}.$$

Tekintettel a (24) képletekre, ez a kifejezés megegyezik az elliptikus síkra vonatkozó (22) kifejezéssel. E szerint a gömb két P és Q pontjának gömbi távolsága egyenlő az elliptikus síkban megfelelő P', Q' pontok által meghatározott egyik $P'Q'$ szakasz elliptikus mérőszámával; ha nevezetesen a PQ körív nem nagyobb egy negyedkörnél, akkor hosszúsága egyenlő a $\varrho(P', Q')$ elliptikus távolsággal. — Ugyanilyen módon adódik, hogy az elliptikus sík két egyenese által bezárt szögek mérőszáma egyenlő a gömb megfelelő két főköre által bezárt szögekével, vagyis a két főkör síkja által bezárt szögek euklidesi mérőszámával.

Az elliptikus sík és a gömbfelület közti (1, 2)-értelmű leképezés alapján, mely az elliptikus és a szferikus geometriát egymásnak felelteti meg, a gömbfelületet *kettős elliptikus síknak*, s a szferikus geometriát *kettős elliptikus geometriának* szokás nevezni. Megkülönböztetésül (ahol szükséges), a projektív síkban értelmezett elliptikus geometriát *egyszerű elliptikus geometriának* nevezzük.

97.5. Elliptikus-szferikus trigonometria.

Az elliptikus távolság- és szögmérés kifejezéséből könnyen levezethetjük az elliptikus trigonometria képleteit, melyek egy háromszög oldalainak és szögeinek mérőszáma között fennálló kapcsolatokat fejezik ki; ezek megegyeznek a szferikus trigonometria képleteivel. A projektív síkgeometriában érvényes dualitás elve a trigonometriai képleteknek a háromszög oldalaira és szögeire vonatkozó bizonyos szimmetriájában érvényesül, mint látni fogjuk.

Legyen A, B, C egy elliptikus mértékkel ellátott projektív sík három pontja, mely nem fekszik egy egyenesen. Az AB, BC, CA egyenesek a síkot négy háromszögtartományra osztják fel; jelöljük ezeket Δ_0, Δ_a, Δ_b, Δ_c-vel (mint a 25. §-ban). A Δ_0 tartományt határoló szakaszokat jelöljük BC, CA, AB-vel, s mérőszámukat a, b, c-vel. A mellékszakaszokat jelöljük $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$-vel; ezeknek mérőszáma $k\pi - a, k\pi - b, k\pi - c$. A Δ_0 tartománnyal az AB szakasz mentén határos a Δ_c tartomány; e kettőnek összege az AC és BC egyenesek által meghatározott egyik szögtartomány. A Δ_0 és Δ_c elliptikus háromszögeknek C-nél fekvő szögei csúcsszögek, A-nál és B-nél fekvő szögei mellékszögek. Jelöljük a Δ_0 háromszög szögeit α, β, γ-val; a Δ_c háromszög szögei: $\pi - \alpha, \pi - \beta, \gamma$. A Δ_c háromszög oldalai a $\overline{BC}, \overline{CA}, AB$ szakaszok; ezeknek mérőszáma: $k\pi - a, k\pi - b, c$. Hasonló összefüggések állanak fenn a többi háromszögek adatai között is. A négy háromszög oldalait és szögeit a következő táblázatban tüntetjük fel:

$$\Delta_0: \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{pmatrix}, \qquad \Delta_a: \begin{pmatrix} a, & k\pi - b, & k\pi - c \\ \alpha, & \pi - \beta, & \pi - \gamma \end{pmatrix},$$

$$\Delta_b: \begin{pmatrix} k\pi - a, & b, & k\pi - c \\ \pi - \alpha, & \beta, & \pi - \gamma \end{pmatrix} \qquad \Delta_\gamma: \begin{pmatrix} k\pi - a, & k\pi - b, & c \\ \pi - \alpha, & \pi - \beta, & \gamma \end{pmatrix}.$$

Jelöljük az A, B, C pontok polárisainak metszéspontjait A', B', C'-vel. Az AB és az $\overline{AB}$ szakasz mérőszáma egyenlő az $A'C'$, $B'C'$

egyenesek által bezárt két szög θ és $\pi-\theta$ mértékének k-szorosával. A Δ_0 háromszögtartománynak megfelel az A', B', C' pontok által meghatározott egyik Δ_0' háromszögtartomány, oly értelemben, hogy Δ_0 pontjainak polárisai kitöltik Δ_0' külsejét (**34**.6). Az AB szakasz pontjainak polárisai azok, a C' ponton átmenő egyenesek, melyek a Δ_0' háromszög C'-nél fekvő szögének *mellékszögeiben* feküsznek. Ebből következik, hogy a Δ_0' elliptikus háromszög C'-nél fekvő szögének mérőszáma:

$$\gamma' = \pi - \frac{c}{k}.$$

Hasonlóan kapjuk a másik két szög kifejezését. Tehát a Δ_0-nak megfelelő Δ_0' háromszög szögei:

$$\alpha' = \pi - \frac{a}{k}, \quad \beta' = \pi - \frac{b}{k}, \quad \gamma' = \pi - \frac{c}{k}. \tag{25}$$

Mivel a Δ_0' háromszögnek a polaritásnál ugyanolyan értelemben a Δ_0 háromszög felel meg, a Δ_0' háromszög a', b', c' oldalai és Δ_0 szögei között a következő összefüggések állanak fenn:

$$\alpha = \pi - \frac{a'}{k}, \quad \beta = \pi - \frac{b'}{k}, \quad \gamma = \pi - \frac{c'}{k}. \tag{26}$$

Ha tehát a Δ_0 elliptikus háromszög oldalainak és szögeinek mérőszáma a, b, c és α, β, γ, akkor Δ_0-nak megfelel egyértelműen egy duális (vagy poláris) Δ_0' háromszög, melynek oldalait és szögeit a következő mérőszámok fejezik ki:

$$\begin{gathered} a' = k(\pi - \alpha), \quad b' = k(\pi - \beta), \quad c' = k(\pi - \gamma); \\ \alpha' = \pi - \frac{a}{k}, \quad \beta' = \pi - \frac{b}{k}, \quad \gamma' = \pi - \frac{c}{k}. \end{gathered} \tag{27}$$

Ha $\Delta_0 = ABC$ az Ω polaritáshoz tartozó poláris háromszög, akkor ez a most alkalmazott értelemben *önmagához duális háromszög,* azaz egybeesik a megfelelő Δ_0' háromszöggel; egy ilyen háromszögnek mindhárom szöge derékszög, s mindhárom oldala félsugár, azaz mérőszámuk $\frac{k\pi}{2}$.

A síkbeli duálitás elvének az elliptikus trigonometriában a következő tétel felel meg:

Az elliptikus trigonometria bármely képletére, vagyis az a, b, c oldalak és α, β, γ szögek között való bármely összefüggésre alkalmaz-

hatjuk a (27) *transzformációt;* ezáltal az illető összefüggésből általában egy másik összefüggést kapunk a, b, c és α, β, γ között.

Az ABC elliptikus háromszögre vonatkozó *sinus-tétel* megállapítása céljából, jelöljük az A, B, C pontok homogén koordinátáit rendre x_i, y_i és z_i-vel (i=1, 2, 3) ; az átellenes oldalak vonalkoordinátái :

$$u_i = y_j z_k - y_k z_j, \quad v_i = z_j x_k - z_k x_j, \quad w_i = x_j y_k - x_k y_j,$$

ahol (i, j, k) jelenti rendre az (1, 2, 3), (2, 3 , 1) és (3, 1, 2) indexeket. Ebből az összefüggésből adódnak a következő azonosságok :

$$f_{yy} f_{zz} - f_{yz}^2 = F_{uu}, \quad f_{zz} f_{xx} - f_{zx}^2 = F_{vv}, \quad f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = F_{ww}.$$

Hasonlóan az

$$x_i = v_j w_k - v_k w_j, \quad y_i = w_j u_k - w_k u_j, \quad z_i = u_j v_k - u_k v_j$$

összefüggésből :

$$F_{vv} F_{ww} - F_{vw}^2 = Df_{xx}, \quad F_{ww} F_{uu} - F_{wu}^2 = Df_{yy}, \quad F_{uu} F_{vv} - F_{uv}^2 = Df_{zz},$$

ahol D jelenti az f_{xx} együtthatóiból képezett $|a_{ik}|$ determináns értékét. Ezek alapján a (15) és (20) képletből következik :

$$\sin\frac{a}{k} = \sqrt{\frac{F_{uu}}{f_{yy} f_{zz}}}, \qquad \sin\alpha = \sqrt{\frac{Df_{xx}}{F_{vv} F_{ww}}},$$

tehát

$$\frac{\sin\frac{a}{k}}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{F_{uu} F_{vv} F_{ww}}{Df_{xx} f_{yy} f_{zz}}}.$$

Mivel ennek a pozitív számértéknek jobboldalon álló kifejezése szimmetrikus az ABC háromszög három oldalára és három szögére vonatkozóan, ezért :

$$\sin\frac{a}{k} : \sin\frac{b}{k} : \sin\frac{c}{k} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma. \tag{28}$$

Ez az elliptikus, s egyben a szferikus trigonometria sinus-tétele. A (28) képlet egyaránt vonatkozik az ABC háromszögre s mellékháromszögeire, valamint a duális háromszögekre is.

Hasonló meggondolással adódik az

$$f_{xy} f_{zz} - f_{yz} f_{xz} = F_{uv}$$

azonosságból az

$$\frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx}f_{yy}}}=\frac{f_{yz}}{\sqrt{f_{yy}f_{zz}}}\frac{f_{xz}}{\sqrt{f_{xx}f_{zz}}}+\sqrt{\frac{F_{uu}}{f_{yy}f_{zz}}}\sqrt{\frac{F_{vv}}{f_{xx}f_{zz}}}\cdot\frac{F_{uv}}{\sqrt{F_{uu}F_{vv}}}$$

összefüggés, mely a (13), (15), (19), (20) képletek alapján következőképpen írható :

$$\cos\frac{c}{k}=\pm\cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k}\pm\sin\frac{a}{k}\sin\frac{b}{k}\cos\gamma.$$

Az előjeleket egy speciális háromszög esetében, például egy olyan háromszögre vonatkozóan állapítjuk meg, melynek mindhárom oldala félsugárnál kisebb. Igy kapjuk az elliptikus-szferikus geometria *első cosinus-tételét* :

$$\cos\frac{c}{k}=\cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k}+\sin\frac{a}{k}\sin\frac{b}{k}\cos\gamma \tag{29}$$

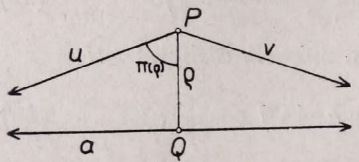
Ebből a duálitás elve alapján adódik a *második cosinus-tétel:*

$$\cos\gamma=-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\frac{c}{k}. \tag{30}$$

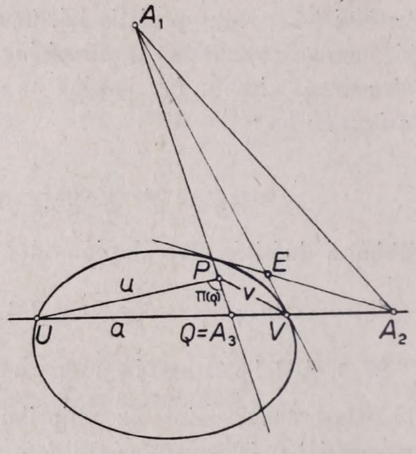
97.6. A hiperbolikus geometria parallela-szöge.

Hasonlóan, mint az elliptikus geometriában, a hiperbolikus geometriában is összefüggés áll fenn a távolság- és a szögmérés között, ellentétben az euklidesi geometriával. Az elliptikus geometriában két pont távolságát kifejezhetjük a polárisaik által bezárt hegyesszög mérőszámának s a távolságmérést jellemző k konstansnak szorzataként. A hiperbolikus geometriában is megfeleltethetünk minden távolságnak egy meghatározott szöget a következő módon. Legyen PQ egy tetszőleges egyenes szakasz ; ennek Q végpontjában merőlegest emelünk a PQ egyenesre, ezt jelöljük a-val, s a P ponton át a-val párhuzamos u és v egyeneseket fektetünk (139. ábra) ; a PQ és az u egyenes által bezárt hegyesszöget, mely egyenlő a PQ és v által bezárt hegyesszöggel, feleltetjük meg a P, Q pontok $\varrho=\varrho(P, Q)$ hiperbolikus távolságának. Ezt a szöget a *ϱ távolsághoz tartozó parallelaszögnek* nevezzük és $\Pi(\varrho)$-val jelöljük. Kifejezzük $\Pi(\varrho)$-t mint ϱ függvényét.

Mivel a hiperbolikus mérték független a kifejezésére használt koordinátarendszer megválasztásától, felveszünk a projektív síkban egy olyan (x_1, x_2, x_3) koordinátarendszert, melynek alapháromszöge poláris háromszög a hiperbolikus mérték alapjául szolgáló Ω polaritásra, illetve az Ω által meghatározott $\mathcal{C}$ másodrendű görbére vonatkozóan. Feltesszük továbbá, hogy az alapháromszög A_3 csúcsa a Q pont, A_1 és A_2 csúcsa Q polárisának a PQ és az a egyenessel való metszéspontja; a **95**.2 tétel folytán $A_1A_2A_3$ poláris háromszög. Az a egyenesnek u-val és v-vel közös U és V pontja a $\mathcal{C}$ görbén fekszik; a PQ egyenes és a $\mathcal{C}$ görbe egyik metszéspontjában, valamint a V pontban $\mathcal{C}$-hez érintőket húzunk, s ezek E metszéspontját vesszük



139. ábra.



140. ábra.

fel az (x_1, x_2, x_3) koordinátarendszer egységpontjának (140. ábra).

A felvett koordinátarendszerben a Q pont koordinátái $(0, 0, 1)$, a V pont koordinátái $(0, 1, 1)$; a P pont koordinátáit jelöljük $(y_1, 0, y_3)$-mal. A PQ egyenes vonalkoordinátái $(0, 1, 0)$; a PV egyenes egyenlete:

$$x_1y_3 + x_2y_1 - x_3y_1 = 0,$$

vonalkoordinátái tehát $(y_3, y_1, -y_1)$. A $\mathcal{C}$ görbének az egyenlete pont-, illetve vonalkoordinátákban:

$$f_{xx} = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$
$$F_{uu} = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0$$

A $\Pi(\varrho) = \sphericalangle UPQ = \sphericalangle VPQ$ szög cosinusát a (13) kifejezésből az

$$(u_1, u_2, u_3) = (0, 1, 0), \quad (v_1, v_2, v_3) = (y_3, y_1, -y_1)$$

értékek helyettesítésével kapjuk; adódik, hogy

$$F_{uv} = y_1, \quad F_{uu} = 1, \quad F_{vv} = y_3^2,$$

s így

$$\cos \Pi(\varrho) = \frac{y_1}{y_3}.$$

Másrészt a (10) és (9) képletből osztással kapjuk, hogy

$$\operatorname{tgh} \frac{\varrho}{k} = \sqrt{1 - \frac{f_{xx} f_{yy}}{f_{xy}^2}}\,;$$

a Q és a P pont koordinátáinak behelyettesítésével adódik:

$$f_{xx} = -1, \quad f_{yy} = y_1^2 - y_3^2, \quad f_{xy} = -y_3,$$

tehát:

$$\operatorname{tgh} \frac{\varrho}{k} = \frac{y_1}{y_3}.$$

A ϱ hiperbolikus távolság és a hozzátartozó $\Pi(\varrho)$ parallela-szög között tehát a következő összefüggés áll fenn:

$$\cos \Pi(\varrho) = \operatorname{tgh} \frac{\varrho}{k}\,; \qquad \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Pi(\varrho) = e^{\frac{\varrho}{k}}.$$

Ez a hiperbolikus trigonometriának Bolyaitól és Lobacsefszkijtől származó alapképlete.

Egyébként a hiperbolikus trigonometria képleteit az elliptikus-szferikus trigonometria képleteiből olyan módon kapjuk meg, hogy minden olyan trigonometrikus függvényt, melynek argumentuma egy oldal mérőszámának s a k konstansnak a hányadosa, a megfelelő hiperbolikus függvénnyel helyettesítünk; ez nyilvánvaló a hiperbolikus és elliptikus távolságra vonatkozó (9), (10) és (19), (20) képletek összehasonlításából.

98. §. Komplex projektív geometria.

Az előző szakasz analitikus tárgyalását egységessé tehetjük komplex számoknak s az ezek segítségével értelmezett *imaginárius elemek*nek az alkalmazásával. Mindeddig mellőztük ezt a módszert, mivel axiomatikus tárgyalásunk jellegének jobban megfelel, hogy a vizsgált rendszerre vonatkozó tételeket magának a rendszernek a tulajdonságaiból, idegen elemek felhasználása nélkül vezessük le. Az analitikus tárgyalás eredményei, nevezetesen a hiperbolikus és az elliptikus távolság- és szögmértéknek különböző módon levezetett, de egymással megegyező kifejezései arra mutatnak, hogy a valós projektív geometria bizonyos tételeinek egységes alapját egy általánosabb, bővebb geometriai rendszerben: a komplex projektív geometriában találjuk meg.

Ebben a szakaszban a komplex projektív egyenes és sík geometriájának analitikus értelmezését adjuk, s alkalmazását a valós projektív geometriára, különösen a projektív mérték kifejezésére. A komplex projektív tér analitikus értelmezése hasonlóan történik. Az axiomatikus megalapozást illetően utalunk a következő fejezetre (111. §).

A komplex projektív egyenes.

Az analitikus tárgyalás szempontjából a valós projektív egyenes a (0, 0)-tól különböző, valós (x_1, x_2) számpárok összessége; ezeket az egyenes pontjainak nevezzük. Ha (x_1, x_2) és (x_1', x_2') csak egy arányossági tényezőben különbözik egymástól, vagyis, ha

$$x_1' = \lambda x_1, \quad x_2' = \lambda x_2, \quad (\lambda \neq 0)$$

akkor a két számpár az egyenesnek ugyanaz a pontja, más esetben két különböző pontja.

Ennek mintájára, *komplex projektív egyenes*en értjük a (0, 0)-tól különböző (z_1, z_2) komplex számpárok összességét; a (z_1, z_2) és a (z_1', z_2') pontok akkor és csak akkor azonosak, ha van egy olyan, 0-tól különböző λ komplex szám, melyre:

$$z_1' = \lambda z_1, \quad z_2' = \lambda z_2.$$

A (z_1, z_2) pontot a komplex projektív *egyenes valós pontjá*nak nevezzük, ha van olyan, 0-tól különböző λ szám, hogy $\lambda z_1, \lambda z_2$ mindketten valós számok.

A komplex projektív egyenes pontjait egy nem-homogén, komplex koordinátával jellemezhetjük, t. i. a z_1, z_2 homogén koordináták

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

hányadosával. A $(z_1, 0)$ pontnak megfelelő $z = \infty$ értéket szintén a komplex számok összességéhez számítjuk.

A z koordináta a komplex projektív egyenes pontjai és a zárt komplex sík pontjai között kölcsönösen egyértelmű vonatkozást létesít. A komplex sík köreinek és egyeneseinek megfelelő pontalakzatokat a komplex projektív egyenes *ciklus*ainak nevezzük.

Az egyenes négy pontjának nem-homogén koordinátáját jelöljük $z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}, z^{(4)}$-gyel; a *négy pont kettősviszonyán* értjük a

$$\left(z^{(1)}\,z^{(2)}\,z^{(3)}\,z^{(4)}\right)=\frac{\left(z^{(3)}-z^{(1)}\right)\left(z^{(4)}-z^{(2)}\right)}{\left(z^{(4)}-z^{(1)}\right)\left(z^{(3)}-z^{(2)}\right)}$$

komplex (vagy valós) számot.

A komplex projektív egyenes *homográfikus leképezés*ének nevezzük a

$$\begin{aligned} z_1' &= a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ z_2' &= a_{21}z_1 + a_{22}z_2 \end{aligned} \tag{1}$$

lineáris transzformációt, melynek a_{ik} együtthatói olyan komplex számok, hogy determinánsuk:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Ennek a leképezésnek a nem-homogén z koordináta

$$z' = \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}$$

lineáris transzformációja felel meg.

Az egyenes *antihomográfikus leképezés*e, értelmezés szerint, olyan

$$\begin{aligned} z_1' &= a_{11}\bar{z}_1 + a_{12}\bar{z}_2 \\ z_2' &= a_{21}\bar{z}_1 + a_{22}\bar{z}_2 \end{aligned} \tag{2}$$

transzformáció, melyben $\bar{z}_i$ a z_i-hez konjugált komplex számot jelenti, s az $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ determináns 0-tól különbözik. Ugyanezt a leképezést a nem-homogén koordináta.

$$z' = \frac{a_{11}\bar{z} + a_{12}}{a_{21}\bar{z} + a_{22}}$$

transzformációja fejezi ki.

Az (1) homográfiát *involuciónak*, s a (2) antihomográfiát *antiinvoluciónak* nevezzük, ha négyzete az azonosság. Feltehetjük, hogy az $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ determináns valós; ekkor involució esetében: $a_{11} = -a_{22}$; antiinvolució esetében: $a_{11} = -\bar{a}_{22}$, és a_{12}, a_{21} valós számok. Az antiinvoluciót *első-*, vagy *másodfajú*nak nevezzük, ha $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ negatív, illetve pozitív. Elsőfajú antiinvolució esetében az

$$a_{21}z\bar{z} + a_{22}z - a_{11}\bar{z} - a_{12} = 0$$

egyenlet olyan ciklust állít elő, amelynek minden pontja fixpont; a leképezést erre a ciklusra vonatkozó elsőfajú antiinvoluciónak nevezzük (l. **91**.10). Minden ciklusnak megfelel egy és csak egy, a ciklusra vonatkozó elsőfajú antiinvolució.

98.1. *Bármely négy pont kettősviszonya homográfikus leképzésnél változatlan, s antihomográfikus leképezésnél a konjugált komplex értékbe megy át.*

Ennek az állításnak az igazolása ugyanazzal a számolással adódik, mint a valós esetben (**23**.1).

98.2. *A komplex projektív egyenes három különböző pontját bármely három különböző pontjába egy és csak egy homográfikus s ugyancsak egy és csak egy antihomográfikus leképezés viszi át* (l. a **91**.2 tétel levezetését).

Annak a homográfikus, illetve antihomográfikus leképezésnek kifejezése, mely az a, b, c pontokat a $0, 1, \infty$ pontokba viszi át:

$$z' = \frac{(z-a)(b-c)}{(z-c)(b-a)}$$

és

$$z' = \frac{(\bar{z}-\bar{a})(\bar{b}-\bar{c})}{(\bar{z}-\bar{c})(\bar{b}-\bar{a})}. \tag{4}$$

98.3. *A komplex projektív egyenes minden homográfikus és antihomográfikus leképezése a ciklusokat egymásba viszi át* (**91**.1).

98.4. *A komplex projektív egyenes négy pontja, melynek koordinátája a, b, c, d, akkor és csak akkor tartozik egy ciklushoz, ha az $(abcd)$ kettősviszony valós.*

Bizonyítás. Ha a, b, c valós számok, s ha az $(abcd)$ kettősviszony is valós, akkor d is valós szám, mint könnyen belátható. Ha az a, b, c, d pontok egy cikluson feküsznek, akkor a (3) lineáris transzformáció az a, b, c, d számoknak a

$$0, 1, \infty, \quad d' = (acdb)$$

valós számokat felelteti meg, amelyeknek kettősviszonya valós, s egyenlő az $(abcd)$ kettősviszonnyal. Ha pedig $(abcd)$ valós, akkor a (3) leképezés az a, b, c, d pontokat a $0, 1, \infty, d'$ pontokba viszi át, melyeknek kettősviszonya egyenlő $(abcd)$-vel; ebből következik, hogy d' is valós. A (3) lineáris transzformáció inverzénél a valós pontok által alkotott ciklus egy olyan ciklusba megy át, mely tartalmazza a négy megadott pontot.

A komplex projektív egyenes a, b és c, d koordinátájú pontjai értelmezés szerint harmonikusan választják el egymást vagy *harmonikus pontnégyest* alkotnak, ha az $(abcd)$ kettősviszony értéke -1. Az

$$(abcd)=\frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}=-1$$

egyenlet, a következő alakban írva:

$$\frac{c-a}{c-b}=-\frac{d-a}{d-b}$$

azt fejezi ki, hogy az a, b fixpontokkal bíró $\mathbf{J}_{ab}$ involució:

$$\frac{z'-a}{z'-b}=-\frac{z-a}{z-b}$$

a c és a d pontot egymásba viszi át. Hasonlóan, a c, d fixpontokkal bíró $\mathbf{J}_{cd}$ involució:

$$\frac{z'-c}{z'-d}=-\frac{z-c}{z-d}$$

felcseréli egymással a-t és b-t. (E szerint a **85**.1 tétel a komplex projektív egyenesre vonatkozóan ugyanazt állapítja meg, mint a **9**.1 tétel a valós projektív egyenes esetében).

A komplex projektív egyenes *két ciklusát merőlegesnek* nevezzük, ha az egyikre vonatkozó elsőfajú antiinvolució a másik ciklust önmagába viszi át, vagyis ha a zárt komplex síkban nekik megfelelő körök merőlegesek egymásra az euklidesi mérték értelmében.

A **85**.4 és 5 tételből közvetlenül adódik a következő:

98.5. *A komplex projektív egyenes a, a', b, b' pontja akkor és csak akkor alkot harmonikus pontnégyest, ha van három, páronkint merőleges $\mathcal{K}, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ ciklus, melyek közül $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}_1$ az a és a' pontban, $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}_2$ a b és b' pontban metszi egymást.*

A $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ ciklusok c és c' metszéspontja mind az a, a', mind a b, b' pontpárt harmonikusan választja el. A $\mathbf{J}_{aa'}, \mathbf{J}_{bb'}, \mathbf{J}_{cc'}$ involuciók az azonossággal együtt egy *négyescsoportot* alkotnak (értelmezést l. első kötet, 208. o.).

98.6. *Ha a, b, c, d a komplex projektív egyenes egymástól különböző, tetszőleges négy pontja, akkor az a, b és c, d pontpárnak van egy és csak egy közös harmonikus konjugált p, q pontpárja.* Ez a $\mathbf{J}_{ab}.\mathbf{J}_{cd}$ homográfikus leképezés két fixpontja; ennek a leképezésnek van ugyanis legalább egy p fixpontja (**87**.1), s mivel a, b, c, d különböznek egymástól, ezért $\mathbf{J}_{ab}(p)=q$ különbözik p-től. A p és a q pont mind a $\mathbf{J}_{ab}$, mind a $\mathbf{J}_{cd}$ involuciónál egymásba megy át, s ezért q is invariáns a $\mathbf{J}_{ab}.\mathbf{J}_{cd}$ leképezésnél. A **85**.1 tétel szerint

$\mathbf{J}_{pq}(a)=b$, $\mathbf{J}_{pq}(c)=d$, tehát $(abpq)$ és $(cdpq)$ harmonikus pontnégyesek. A két pontpár közös harmonikus pontpárjának megszerkesztése könnyen adódik a **98**.5 tételből.

A komplex projektív egyenes homográfikus és antihomográfikus leképezéseit jellemzi a DARBOUX-*féle tétel* (l. **81**.4) :

98.7. *Ha a komplex projektív egyenes önmagára való egyértelmű leképezése bármely két különböző pontot két különböző pontba, egy cikluson fekvő bármely négy pontot egy ciklushoz tartozó négy pontba visz át, s ha van négy olyan pont, melynek képe nem tartozik egy ciklushoz, akkor a leképezés a komplex projektív egyenes homográfikus, vagy antihomográfikus leképezése.*

A komplex projektív egyenes *valós projektív leképezés*ein azokat a homográfikus és antihomográfikus leképezéseket értjük, amelyek a valós pontokat egymásba viszik át ; ezeket az (1), illetve (2) alakban valós a_{ik} együtthatójú transzformációkkal fejezhetjük ki.

A valós projektív leképezések osztályozása megegyezik azzal, amelyet a valós projektív egyenes leképezéseinek tárgyalása során megismertünk. Az elliptikus leképezéseket ott azzal a tulajdonsággal jellemeztük, hogy nincs fixpontjuk (t. i. a valós egyenesen). A komplex projektív egyenes valós együtthatójú elliptikus homográfiájának két konjugált komplex fixpontja van. Az egytagú elliptikus csoportot az a tulajdonság jellemzi, hogy a hozzá tartozó leképezések fixpontja ugyanaz a két (konjugált komplex) pont ; a hiperbolikus és a parabolikus egytagú csoportokat már a valós tárgyalásban a közös fixpontokkal jellemeztük (l. **15**.6 és 11).

A z_0, $\bar{z}_0$ konjugált komplex fixpontokhoz tartozó egytagú elliptikus csoport leképezéseit a

$$\frac{z'-z_0}{z'-\bar{z}_0}=e^{i\vartheta}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$$

normálalakkal fejezhetjük ki (**91**.3, (9) képlet) ; a $\dfrac{\theta}{2\pi}$ érték megegyezik a csoportnak a 18. §-ban bevezetett t paraméterével (l. **18**.8).

A komplex projektív sík.

*Komplex projektív sík*on értjük a (0, 0, 0)-tól különböző (z_1, z_2, z_3) komplex számhármasok összességét, amelyeket a sík pontjainak neve zünk. Ha λ egy, 0-tól különböző, tetszőleges szám, akkor a (z_1, z_2, z_3) és a $(\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3)$ számhármas ugyanazt a pontot jelenti ; ezek a számhármasok az illető pont koordinátái. — Ha valamely (z_1, z_2, z_3) számhármashoz megadható olyan, 0-tól különböző λ szám, hogy a λz_1, λz_2, λz_3 számok mindhárman valósak, akkor a (z_1, z_2, z_3) pontot a *sík valós pontjá*nak, ellenkező esetben *imaginárius pont*nak nevezzük. A komplex sík valós pontjai alkotják a hozzátartozó *valós projektív síko*t. — A (z_1, z_2, z_3) pontot röviden z-vel jelöljük.

Ha w_1, w_2, w_3 három olyan komplex szám, mely közül legalább az egyik különbözik 0-tól, akkor azoknak a z pontoknak az összességét, amelyek a

$$w_1z_1 + w_2z_2 + w_3z_3 = 0 \tag{5}$$

egyenletet kielégítik, *komplex egyenes*nek nevezzük. A (w_1, w_2, w_3) számhármas ennek az egyenesnek homogén koordinátája; bármely, 0-tól különböző λ számértékre nézve, a $(\lambda w_1, \lambda w_2, \lambda w_3)$ számhármas ugyanennek az egyenesnek a koordinátája. A (w_1, w_2, w_3) egyenest röviden w-vel jelöljük. Az (5) egyenlet *a w egyenes és a z pont egyesített helyzetének a feltétele.* — Ha megadható olyan, 0-tól különböző λ szám, hogy a $\lambda w_1, \lambda w_2, \lambda w_3$ számok valósak, akkor az egyenest *valós egyenes*nek, ellenkező esetben *imaginárius*nak nevezzük.

Minden imaginárius egyenesnek van valós pontja; bontsuk fel a $w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 = 0$ egyenletet valós és képzetes részre; legyen $w_\nu = u_\nu + iv_\nu$; az

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$
$$v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$$

egyenletrendszernek van (nem triviális) (x_1, x_2, x_3) valós megoldása. De *ha egy egyenesnek két valós pontja van, akkor valós egyenes.* Ha ugyanis az (x_1, x_2, x_3) és (y_1, y_2, y_3) valós számhármasok kielégítik a

$$w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 = 0$$
$$w_1y_1 + w_2y_2 + w_3y_3 = 0$$

egyenleteket, akkor

$$w_1 : w_2 : w_3 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix},$$

tehát w_1, w_2, w_3 három valós számmal arányos, azaz egy valós egyenes koordinátája.

A komplex projektív sík pontjaira és egyeneseire teljesülnek a **P I** axióma-csoportnak a síkra vonatkozó axiómái (l. 4. o.).

A *komplex projektív sík homográfikus leképezéseit* a

$$
\begin{aligned}
z_1' &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + a_{13} z_3 \\
z_2' &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + a_{23} z_3 \\
z_3' &= a_{31} z_1 + a_{32} z_2 + a_{33} z_3,
\end{aligned} \tag{6}
$$

antihomográfikus leképezéseit a

$$
\begin{aligned}
z_1' &= a_{11} \bar{z}_1 + a_{12} \bar{z}_2 + a_{13} \bar{z}_3 \\
z_2' &= a_{21} \bar{z}_1 + a_{22} \bar{z}_2 + a_{23} \bar{z}_3 \\
z_3' &= a_{31} \bar{z}_1 + a_{32} \bar{z}_2 + a_{33} \bar{z}_3
\end{aligned} \tag{7}
$$

transzformációk fejezik ki, amelyeknek determinánsa :

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.
$$

Ezeknek a homográfiáknak és antihomográfiáknak az összessége alkotja a *komplex projektív síkgeometria csoportját.*

A valós projektív síkra vonatkozó **26**.7 tételnek a következő tétel felel meg :

98.8. *Ha A, B, C, D és A', B', C', D' a komplex projektív sík négy-négy olyan pontja, mely közül bármely három nem fekszik egy komplex egyenesen, akkor van a síknak egy és csak egy olyan homográfikus, s ugyancsak egy és csak egy olyan antihomográfikus leképezése, mely az A, B, C, D pontnak rendre az A', B', C', D' pontot felelteti meg.*

A komplex projektív sík homográfikus csoportjának alcsoportja a valós projektív sík kollineációiból álló csoport ; ennek leképezéseit a (6) képletek fejezik ki valós a_{ik} együtthatókkal.

A *komplex projektív sík korrelációit és antikorrelációit* a következő transzformációk fejezik ki :

$$
\begin{aligned}
w_1' &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + a_{13} z_3 \\
w_2' &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + a_{23} z_3 \\
w_3' &= a_{31} z_1 + a_{32} z_2 + a_{33} z_3
\end{aligned} \tag{8}
$$

illetve :

$$
\begin{aligned}
w_1' &= a_{11} \bar{z}_1 + a_{12} \bar{z}_2 + a_{13} \bar{z}_3 \\
w_2' &= a_{21} \bar{z}_1 + a_{22} \bar{z}_2 + a_{23} \bar{z}_3 \\
w_3' &= a_{31} \bar{z}_1 + a_{32} \bar{z}_2 + a_{33} \bar{z}_3,
\end{aligned} \tag{9}
$$

melyeknek determinánsa különbözik 0-tól.

A komplex projektív sík korrelációira és antikorrelációira érvényes a valós projektív síkra vonatkozó **34**.3 tétel megfelelője.

A komplex projektív sík *polaritásán* olyan korrelációt értünk, amelynek négyzete az azonosság, vagyis, amelynek (8) alakú kifejezésében az a_{ik} együtthatók mátrixa szimmetrikus: $a_{ik} = a_{ki}$. (l. 43. §).

A korrelációt, antikorrelációt és polaritást *valós*nak nevezzük, ha a transzformáció a_{ik} együtthatói valós számok.

Tegyük fel, hogy a (8) egyenletek egy Ω polaritást értelmeznek, azaz: $a_{ik} = a_{ki}$. A polaritás által meghatározott $\mathcal{C}$ *másodrendű görbén* értjük azoknak a z pontoknak az összességét, amelyek polárisukhoz tartoznak, vagyis, amelyeknek koordinátái kielégítik a

$$\sum_i w'_i z_i = \sum_i (a_{i1} z_1 + a_{i2} z_2 + a_{i3} z_3) z_i = \sum_{i,k} a_{ik} z_i z_k = 0$$

egyenletet. Az utóbbi, z-ben négyzetes alakot f_{zz}-vel jelölve, a görbe egyenlete:

$$f_{zz} = 0.$$

Az Ω polaritáshoz tartozó *másodosztályú görbén* értjük azoknak az egyeneseknek az összességét, amelyek pólusukat tartalmazzák. Jelöljük F_{ww}-vel az f_{zz}-hez adjungált négyzetes alakot; a másodosztályú görbe egyenlete:

$$F_{ww} = 0.$$

A másodrendű görbe pontjait a másodosztályú görbe érintési pontjainak, s a másodosztályú görbe egyeneseit a megfelelő másodrendű görbe érintőinek nevezzük.

A sík x és y pontján átmenő egyenes paraméteres egyenletrendszerét felírhatjuk a valós projektív geometriából ismert alakban:

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i \quad (i = 1, 2, 3), \tag{10}$$

ahol azonban λ, μ komplex számokat jelentenek. Ennek az egyenesnek a $\mathcal{C}$ másodrendű görbével való metszéspontjait azok a λ, μ paraméterértékek szolgáltatják, amelyek kielégítik az

$$f_{zz} = \lambda^2 f_{xx} + 2\lambda\mu f_{xy} + \mu^2 f_{yy} = 0$$

egyenletet. Ha ennek az egyenletnek λ/μ-ben csak egy gyöke van, azaz, ha az egyenlet diszkriminánsa:

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0,$$

akkor az egyenes a $\mathcal{C}$ görbe érintője, s az egyenes vonalkoordinátái:

$$u_1 = x_2y_3 - x_3y_2, \quad u_2 = x_3y_1 - x_1y_3, \quad u_3 = x_1y_2 - x_2y_1$$

kielégítik az $F_{uu}=0$ egyenletet.

Legyen u és v a sík két egyenese; a metszéspontjukon átmenő egyenesek vonalkoordinátáit kifejezhetjük a

$$w_i = \lambda u_i + \mu v_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{11}$$

egyenletekkel. Ezek közül az egyenesek közül azok tartoznak az $F_{ww} = 0$ másodosztályú görbéhez, amelyeknek megfelelő λ, μ paraméterek kielégítik az

$$F_{ww} = \lambda^2 F_{uu} + 2\lambda\mu F_{uv} + \mu^2 F_{vv} = 0$$

egyenletet. Ha ennek az egyenletnek λ/μ-ben csak egy gyöke van, azaz, ha

$$F_{uu}F_{vv} - F_{uv}^2 = 0,$$

akkor az u és v egyenesek metszéspontja a másodosztályú görbe érintési pontja, s koordinátái:

$$x_1 = u_2v_3 - u_3v_2, \quad x_2 = u_3v_1 - u_1v_3, \quad x_3 = u_1v_2 - u_2v_1$$

kielégítik az $f_{xx} = 0$ egyenletet.

Tegyük fel, hogy a $\mathcal{C}$ görbét egy *valós polaritás* határozza meg; a polaritást *hiperbolikus*nak, vagy *elliptikus*nak nevezzük, a szerint, hogy van legalább egy önmagához konjugált *valós* pontja, vagy nincs. Az első esetben a $\mathcal{C}$ görbét *valós*, a második esetben *imaginárius másodrendű görbé*nek nevezzük.

Ha $\mathcal{C}$ valós másodrendű görbe és l valós egyenes, akkor l vagy két egybeeső valós pontban metszi a $\mathcal{C}$ görbét, vagyis annak érintője, vagy két különböző valós pontban, s ez esetben a $\mathcal{C}$ görbe metszője, vagy pedig két konjugált imaginárius pontban, mely esetben a $\mathcal{C}$ görbének nem metszője (a valós projektív geometriában alkalmazott elnevezés szerint). Ha $\mathcal{C}$ imaginárius másodrendű görbe, ezt minden valós egyenes két konjugált imaginárius pontban metszi. Mindegyik esetben kifejezhetjük a metszéspontok koordinátáit a (10) egyenletekkel, melyekben

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{-f_{xy} \pm \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}}}{f_{xx}}.$$

Az x, y pontoknak s a rajtuk átmenő egyenes és a $\mathcal{C}$ görbe metszéspontjainak kettősviszonyát a következő kifejezés adja:

$$\frac{f_{xy}+\sqrt{f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}}}{f_{xy}-\sqrt{f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}}}.$$

A valós projektív síkban bevezetett hiperbolikus és elliptikus távolságmérésnek egységes meghatározása a fentiek szerint a következő:

Az x és y pontnak egy valós polaritással értelmezett $\mathcal{C}$ másodrendű görbére vonatkozó $\varrho(x, y)$ távolságmértéke egyenlő az x, y pontokból s az xy egyenes és a $\mathcal{C}$ görbe metszéspontjaiból alkotott kettősviszony logaritmusának s egy $\frac{k}{2}$ konstansnak a szorzatával. A $\frac{k}{2}$ szorzó valós, vagy imaginárius, a szerint, hogy $\mathcal{C}$ valós, vagy imaginárius görbe. A két pont távolságának kifejezése:

$$\varrho(x,y)=\frac{k}{2}\log\frac{f_{xy}+\sqrt{f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}}}{f_{xy}-\sqrt{f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}}}. \tag{12}$$

Hasonló meggondolással kapjuk a következő eredményt:

Az u és a v egyenesnek egy valós polaritással értelmezett $\mathcal{C}$ másodrendű görbére vonatkozó $\Theta(u, v)$ szögmértéke egyenlő $\frac{-i}{2}$-ször az u, v egyenesek s a metszéspontjukból $\mathcal{C}$-hez húzott érintők kettősviszonyának a logaritmusával. A szögmérték kifejezése tehát:

$$\Theta(u,v)=\frac{-i}{2}\log\frac{F_{uv}+\sqrt{F_{uv}^2-F_{uu}F_{vv}}}{F_{uv}-\sqrt{F_{uv}^2-F_{uu}F_{vv}}}. \tag{13}$$

98.9 A LAGUERRE-féle szögmérték.

Az euklidesi síkban legyenek (x,y,z) derékszögű homogén koordináták. Az euklidesi síkot hasonlóan kibővítjük imaginárius elemekkel, mint ahogyan a valós projektív síkot komplex projektív síkká bővítettük.

Az euklidesi sík *imaginárius körpontjain* értjük az

$$(1, i, 0), \quad (1, -i, 0)$$

homogén koordinátájú pontokat. Elnevezésük onnan származik, hogy ezek hozzátartoznak a sík minden köréhez, de más másodrendű görbéhez nem. Az általános köregyenlet homogén koordinátákban ugyanis:

$$A(x^2 + y^2) + 2Bxz + 2Cyz + Dz^2 = 0,$$

s ennek eleget tesznek az $(x, y, z) = (1, i, 0)$, $(1, -i, 0)$ számhármasok. Viszont, ha a valós a_{ik} együtthatókkal bíró

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$$

egyenletet kielégíti ez a két számhármas, akkor

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0,$$

ez tehát köregyenlet.

A sík valamely valós (x_0, y_0, z_0) pontját az egyik vagy a másik körponttal összekötő (imaginárius) egyenes egyenlete:

$$(xz_0 - zx_0) \pm i\ (yz_0 - zy_0) = 0\ ;$$

ezeket az egyeneseket az (x_0, y_0, z_0) ponton átmenő *minimálegyeneseknek* nevezzük. Egy ilyen egyenes bármely két pontjának távolsága 0-val egyenlő; például az egyenes (x, y, z), (x_0, y_0, z_0) pontjainak távolsága az euklidesi távolság képlete szerint:

$$\left(\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}\right)^2 = 0.$$

Az imaginárius körpontok egyenlete az u, v, w derékszögű homogén vonalkoordinátákban:

$$u + iv = 0, \qquad u - iv = 0\ ;$$

ezt a két egyenletet egybefoglalhatjuk:

$$u^2 + v^2 = 0, \tag{14}$$

s ebben az alakban úgy tekinthetjük, mint egy *elfajult másodosztályú görbét.* A (14) egyenlet baloldalán álló négyzetes alakhoz adjungált alak: z^2; a

$$z^2 = 0$$

egyenlet *elfajult másodrendű görbét* állít elő, t. i. a kétszeresen számított végtelen távoli egyenest.

Az (x_0, y_0, z_0) ponton az elfajult másodosztályú görbének két egyenese megy át, ezek az illető ponthoz tartozó minimálegyenesek. Az (x_0, y_0, z_0) ponton átmenő l_1 és l_2 valós egyenesnek egymással bezárt szögén a fenti értelmezésnek megfelelően a két valós egyenes, s a két minimálegyenes kettősviszonya logaritmusának $\frac{-i}{2}$-vel való szorzatát értjük.

A számolás egyszerűsítésére tegyük fel, hogy $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$ Az l_1 és l_2 egyenes egyenletét írjuk fel a következő alakban:

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0,$$
$$x \sin \beta - y \cos \beta = 0,$$

ahol α és β jelenti ezeknek az egyeneseknek a pozitív x-tengellyel bezárt szögét; a két egyenes egymással bezárt szöge:

$$\theta = \beta - \alpha.$$

Az l_1 és l_2 egyeneseknek s az

$$x - yi = 0$$
$$x + yi = 0$$

egyenletekkel előállított i_1, i_2 minimálegyeneseknek a kettősviszonya a **24**.1 tételnek megfelelően:

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \frac{\sin \beta}{\cos \beta}, \frac{1}{i}, \frac{1}{-i}\right) = \frac{(\cos\alpha - i \sin\alpha)(\cos\beta + i \sin\beta)}{(\cos\alpha + i \sin\alpha)(\cos\beta - i \sin\beta)} = e^{2(\beta - \alpha)i}.$$

Ebből adódik az $\sphericalangle(l_1, l_2)$ szög $\theta = \beta - \alpha$ mérőszámának következő, LAGUERRE-féle kifejezése:

$$\theta = \frac{-i}{2} \log (l_1 l_2 i_1 i_2) \tag{15}$$

Az alapul felvett másodrendű és másodosztályú görbét a projektív mértékmeghatározás mindhárom esetében a következő egységes alakban fejezhetjük ki:

$$f_{xx} = \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = 0 \tag{16}$$
$$F_{uu} = u_1^2 + u_2^2 + \varepsilon u_3^2 = 0\,; \tag{17}$$

az ε együttható pozitív, negatív és zérus értékének rendre az elliptikus, hiperbolikus és parabolikus mértékmeghatározás felel meg.

Az elliptikus és a hiperbolikus szögmérés képletéből a parabolikus esetnek megfelelő euklidesi szögmértéket az $\varepsilon = 0$ érték behelyettesítésével kapjuk. A (13) és (17) képletből adódik ugyanis, $\varepsilon = 0$ téve:

$$\theta = \frac{-i}{2} \log \frac{F_{uv} + \sqrt{F_{uv}^2 - F_{uu} F_{vv}}}{F_{uv} - \sqrt{F_{uv}^2 - F_{uu} F_{vv}}} = \frac{-i}{2} \log \frac{(u_1 - i\,u_2)\,(v_1 + i\,v_2)}{(u_1 + i\,u_2)\,(v_1 - i\,v_2)},$$

s ebből

$$\cos\theta = \frac{F_{uv}}{\sqrt{F_{uu}F_{vv}}} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{(u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)}},$$

a 96. § (17) képletével megegyezően.

Az elliptikus és a hiperbolikus távolságmérték kifejezéséből ugyancsak megkapjuk a parabolikus, vagyis az euklidesi távolság képletét, ha k-t, illetve ik-t $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$-nal egyenlőnek vesszük fel, s az $\varepsilon \to 0$ határátmenetet végezzük.

99. §. Komplex koordináta a hiperbolikus síkon.

99.1. A valós projektív síkban legyen $\mathcal{C}$ valós, nem elfajult másodrendű görbe; ennek belsejében értelmezünk egy hiperbolikus síkgeometriát. A projektív síkban felveszünk egy olyan koordinátaháromszöget, melynek A_1 és A_3 csúcsa a $\mathcal{C}$ görbén fekszik, s A_2 csúcsa az A_1A_3 egyenesnek $\mathcal{C}$-re vonatkozó pólusa. Az E egységpont legyen a $\mathcal{C}$ görbének egy tetszőleges pontja, mely nem tartozik az $A_1A_2A_3$ háromszög egyik oldalához sem. Ebben a koordinátarendszerben a $\mathcal{C}$ görbét az

$$x_1x_3 - x_2^2 = 0$$

egyenlet fejezi ki (68. §, (19) képlet). A síknak azokat a kollineációit, amelyeknél a $\mathcal{C}$ görbe önmagába megy át, az (x_1, x_2, x_3) koordináták homogén lineáris transzformációi fejezik ki, s a $\mathcal{C}$ görbe bármely pontjának megfelelő

$$t = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3}$$

paramétert a képpontjának megfelelő

$$t' = \frac{x_1'}{x_2'} = \frac{x_2'}{x_3'}$$

paraméterbe egy

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \tag{1}$$

valós együtthatójú lineáris transzformáció viszi át (68. §, (23) és (24) képlet).

99.2. *A $\mathcal{C}$ görbén értelmezett t paramétert kiterjesztjük az egész síkra* úgy, hogy minden P pontnak megfeleltetjük a P pontból $\mathcal{C}$-hez húzott két érintő érintési pontjához tartozó paraméterértékeket. Ha a P pont koordinátái (x_1, x_2, x_3), ezek a paraméterértékek az

$$x_1 - 2x_2 t + x_3 t^2 = 0 \tag{2}$$

egyenletnek a gyökei. Ha P a $\mathcal{C}$ görbe külső pontja, akkor a (2) egyenletnek két, egymástól különböző, valós gyöke van, ha pedig P belső pont, akkor két konjugált komplex gyöke, melyeknek kifejezése:

$$t, \bar{t} = \frac{x_2 \pm \sqrt{x_2^2 - x_1 x_3}}{x_3}; \tag{3}$$

jelöljük ezek közül t-vel azt, amelynek imaginárius együtthatója pozitív, s tegyük:

$$t = \xi + i\eta, \quad \bar{t} = \xi - i\eta \quad (\eta > 0).$$

A $\mathcal{C}$ görbe minden belső pontjának, vagyis a hiperbolikus sík minden P pontjának megfelel ilyen módon egy t *komplex koordináta*, melynek imaginárius együtthatója pozitív. Viszont, ha t tetszőleges olyan komplex szám, melynek imaginárius együtthatója pozitív, t-nek megfelel $\mathcal{C}$ belsejében egy P pont; ennek koordinátái a (3) képlet alapján:

$$x_1 : x_2 : x_3 = t\bar{t} : \frac{1}{2}(t + \bar{t}) : 1; \tag{4}$$

ez a pont a $\mathcal{C}$ görbe belsejében fekszik, mivel

$$x_2^2 - x_1 x_3 < 0.$$

A **T** kollineáció, mely a $\mathcal{C}$ görbén az (1) lineáris transzformációt származtatja, $\mathcal{C}$ belsejének t koordinátájú pontját abba a pontba viszi át, amelynek komplex koordinátája

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \text{vagy} \quad t' = \frac{\alpha \bar{t} + \beta}{\gamma \bar{t} + \delta}, \tag{5}$$

a szerint, hogy az $\alpha\delta - \beta\gamma$ determináns pozitív vagy negatív. Az első esetben ugyanis t és $(\alpha t + \beta)/(\gamma t + \delta)$ imaginárius együtthatója megegyező, a második esetben ellenkező előjelű (l. 414. o.).

99.3. *A t komplex koordináta bevezetésével a hiperbolikus síkot kölcsönösen egyértelmű módon leképeztük a t komplex síknak a valós tengely által határolt felső félsíkjára* (melyben $\eta > 0$).

A hiperbolikus sík egyeneseinek ennél a leképezésnél a valós tengelyre merőleges félkörök felelnek meg, vagyis olyanok, melyeknek középpontja az $\eta = 0$ valós tengelyen fekszik; ezekhez számítjuk a valós tengelyre merőleges félsugarakat is. Ha ugyanis egy hiperbolikus egyenes egyenlete:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0,$$

ennek a (4) képlet szerint a t változóban a következő egyenlet felel meg:

$$u_1 t\bar{t} + \frac{1}{2} u_2(t + \bar{t}) + u_3 = 0.$$

Az utóbbi egyenletet a ξ, η valós koordinátákkal

$$u_1(\xi^2 + \eta^2) + u_2\xi + u_3 = 0 \quad (\eta > 0)$$

alakban írhatjuk fel. Ha $u_1 = 0$, akkor ez egy, az imaginárius tengelylyel párhuzamos félsugár egyenlete; ha pedig $u_1 \neq 0$, akkor azé a félköré, melynek középpontja:

$$\xi = -\frac{u_2}{2u_1}, \quad \eta = 0 \tag{7}$$

és sugara

$$r = \frac{\sqrt{u_2^2 - 4u_1u_3}}{2u_1}. \tag{8}$$

A $\mathfrak{C}$ görbe belsejének a t komplex félsíkra való leképezésével egy hiperbolikus síkgeometriát értelmeztünk a félsíkon; ez a *hiperbolikus síkgeometria* POINCARÉ-*féle modellje* (**95**.8), melyben a hiperbolikus egyeneseket a valós tengelyre merőleges félkörök és félsugarak állítják elő.

99.4. Két pont hiperbolikus távolságának a t komplex koordinátával való kifejezését készíti elő a következő tárgyalás.

Jelöljük a komplex sík t_1, t_2, t_3, t_4 koordinátájú pontját A, B, C, D-vel. A t_3-t_1 különbség abszolut értéke egyenlő az A, C pontok AC euklidesi távolságával stb. Tehát a $(t_1t_2t_3t_4)$ kettősviszony abszolut értéke:

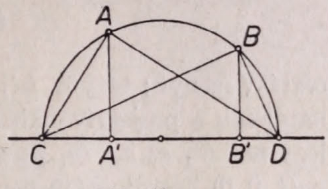
$$|(t_1t_2t_3t_4)| = \frac{AC \,.\, BD}{AD \,.\, BC}.$$

Ha az A, B, C, D pontok egy körön feküsznek, akkor a (t_1, t_2, t_3, t_4) kettősviszony valós (**98**.4), és így

$$(t_1t_2t_3t_4) = \pm \frac{AC \,.\, BD}{AD \,.\, BC};$$

ez a kettősviszony akkor és csak akkor pozitív, ha az A, B és C, D pontpárok nem választják el egymást a körvonalon.

Legyen t_1 és t_2 a felső félsík két pontja, mely nem fekszik egy, a valós tengelyre merőleges egyenesen. Jelöljük t_3-mal és t_4-gyel a rajtuk átmenő, s a valós tengelyre merőleges körnek a valós tengellyel való két metszéspontját, továbbá A, B, C, D-vel a t_1, t_2, t_3, t_4 pontot. Legyen A' és B' az A és a B pontnak a valós tengelyre való merőleges vetülete (141. ábra). Az $AA'C$, $DA'A$ és DAC, valamint a $BB'C$, $DB'B$ és DBC háromszögek hasonlóságából következik:



141. ábra.

$$\left(\frac{AC}{AD}\right)^2 = \frac{A'C}{A'D}, \qquad \left(\frac{BD}{BC}\right)^2 = \frac{B'D}{B'C}$$

s ebből:

$$(t_1 t_2 t_3 t_4)^2 = \left(\frac{AC.BD}{AD.BC}\right)^2 = \frac{A'C.B'D}{A'D.B'C} = (A'B'CD).$$

A t_3, t_4 valós számokkal és a $t_1 = \xi_1 + i\eta_1$, $t_2 = \xi_2 + i\eta_2$ komplex számok valós részével kifejezzük az $(A'B'CD)$ kettősviszonyt s így kapjuk, hogy

$$(t_1 t_2 t_3 t_4)^2 = (\xi_1 \xi_2 t_3 t_4).$$

Jelöljük (x_1, x_2, x_3)-mal és (y_1, y_2, y_3)-mal a t_1 és a t_2 komplex koordinátáknak a $\mathfrak{C}$ görbe belsejében megfelelő x és y pont homogén koordinátáit; a két pontot összekötő egyenes és a $\mathfrak{C}$ görbe z és z' metszéspontja a t_3 és a t_4 paraméternek felel meg. Ezeknek a pontoknak koordinátáira a (4) képlet szerint fennállanak a következő egyenletek:

$$\frac{x_2}{x_3} = \xi_1, \quad \frac{y_2}{y_3} = \xi_2, \quad \frac{z_2}{z_3} = t_3, \quad \frac{z_2'}{z_3'} = t_4,$$

tehát az x, y, z, z' pontok kettősviszonya:

$$\left(\frac{x_2}{x_3}\ \frac{y_2}{y_3}\ \frac{z_2}{z_3}\ \frac{z_2'}{z_3'}\right) = (\xi_1 \xi_2 t_3 t_4).$$

99.5. *Az x, y pontok hiperbolikus távolsága* a fenti képletek szerint:

$$\varrho\,(x, y) = \frac{k}{2} \log\,(\xi_1 \xi_2 t_3 t_4) = k \log\,(t_1 t_2 t_3 t_4) = \varrho^*(t_1, t_2). \qquad (9)$$

Ez a kifejezés akkor is érvényes, ha t_1 és t_2 egy, a valós tengelyre merőleges egyenesen fekszik. Ez esetben legyen t_3 az egyenesnek a valós tengellyel való metszéspontja ; t_4-en értjük a komplex sík végtelen távoli pontját, és $(t_1t_2t_3t_4)$ kettősviszonyon a

$$\frac{t_3-t_1}{t_3-t_2}=\frac{\eta_1}{\eta_2}$$

osztásviszonyt ; tegyük fel, hogy $\eta_1>\eta_2$. A t_1, t_2, t_3 komplex koordinátáknak a projektív síkban megfelelő pontok homogén koordinátái legyenek (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) és (z_1, z_2, z_3); a t_4 pontnak a $(z_1', z_2', z_3')=$ $=(1, 0, 0)$ koordinátájú pont felel meg. A (4) képlet szerint

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{\xi_1^2+\eta_1^2}{\xi_1},\quad \frac{y_1}{y_2}=\frac{\xi_1^2+\eta_2^2}{\xi_1},\quad \frac{z_1}{z_2}=\xi_1.$$

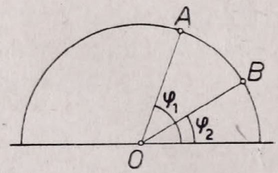
Az x, y, z, z' pontok kettősviszonya egyenlő az

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\ \frac{y_1}{y_2}\ \frac{z_1}{z_2}\right)$$

osztásviszonnyal s ennek értéke : $\frac{\eta_1^2}{\eta_2^2}$. A $t_1=\xi_1+i\eta_1$, és $t_2=\xi_1+i\eta_2$ pontok hiperbolikus távolsága tehát :

$$\varrho^*(t_1, t_2)=k.\log\frac{\eta_1}{\eta_2}. \tag{10}$$

99.6. Ha a komplex felső félsík A és B pontja egy, a valós tengelyre merőleges, r sugarú körön fekszik, melynek középpontja O, a két pont hiperbolikus távolságát kifejezhetjük azokkal a φ_1, φ_2 szögekkel, melyet az $\overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OB}$ félsugár a pozitív valós tengellyel bezár (142. ábra). Jelöljük az O pont (valós) koordinátáját ξ-vel ; az A és a B pont t_1 és t_2 koordinátája :



142. ábra.

$$t_1=\xi+r\,e^{i\varphi_1},\quad t_2=\xi+r\,e^{i\varphi_2};$$

a kör és a valós tengely metszéspontjainak koordinátái pedig :

$$t_3=\xi+r,\quad t_4=\xi-r.$$

Ennek a négy számnak a kettősviszonya :

$$(t_1t_2t_3t_4)=\frac{(e^{i\varphi_1}-1)(e^{i\varphi_2}+1)}{(e^{i\varphi_1}+1)(e^{i\varphi_2}-1)}=$$

$$=\frac{\left(e^{\frac{i\varphi_1}{2}}-e^{-\frac{i\varphi_1}{2}}\right)\left(e^{\frac{i\varphi_2}{2}}+e^{-\frac{i\varphi_2}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{i\varphi_1}{2}}+e^{-\frac{i\varphi_1}{2}}\right)\left(e^{\frac{i\varphi_2}{2}}-e^{-\frac{i\varphi_2}{2}}\right)}=\frac{\tan\frac{\varphi_1}{2}}{\tan\frac{\varphi_2}{2}},$$

s ebből a hiperbolikus távolság kifejezése:

$$\varrho^*(t_1, t_2)=k\log\frac{\tan\frac{\varphi_1}{2}}{\tan\frac{\varphi_2}{2}}. \tag{11}$$

99.7. Levezetjük még a $\varrho^*(t_1, t_2)$ hiperbolikus távolságnak egy olyan kifejezését, amelyben csak a megadott t_1, t_2 értékek szerepelnek. Ha t_1 és t_2 nem fekszik egy, a valós tengelyre merőleges egyenesen, akkor a

$$\frac{t'-t_2}{t'-\bar{t}_2}=e^{i\varphi}\,\frac{t-t_2}{t-\bar{t}_2} \tag{12}$$

lineáris transzformációval, mely a valós tengelyt önmagába viszi át, a t_1 pontot átvisszük egy olyan t_1' pontba, mely a t_2 ponton átmenő, s a valós tengelyre merőleges egyenesen fekszik; legyen $t_1'=\xi_2+i\eta_1'$. Mivel az alkalmazott transzformáció nem változtatja meg a hiperbolikus távolságot, tehát a (10) képlet szerint:

$$\varrho^*(t_1, t_2)=\varrho^*(t_1', t_2)=k\log\frac{\eta_1'}{\eta_2}.$$

Jelöljük η_1' és η_2 hányadosát τ-val:

$$\frac{\eta_1'}{\eta_2}=\tau;$$

feltehetjük, hogy $\tau>1$; ezt a (12) képletben a φ szög alkalmas megválasztásával érhetjük el. A (12) képlet baloldalán t' helyett t_1'-t téve, adódik:

$$\frac{t_1'-t_2}{t_1'-\bar{t}_2}=\frac{\eta_1'-\eta_2}{\eta_1'+\eta_2}=\frac{\tau-1}{\tau+1}.$$

A (12) képlet jobboldalán t helyett t_1-et téve, képezzük az abszolut értéket, így adódik, hogy

$$\frac{\tau-1}{\tau+1}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1-\bar{t}_2|},$$

s ebből

$$\tau=\frac{|t_1-\bar{t}_2|+|t_1-t_2|}{|t_1-\bar{t}_2|-|t_1-t_2|}.$$

Jelöljük d-vel és d'-vel a $|t_1-t_2|$ és a $|t_1-\bar{t}_2|$ értéket, vagyis a t_1 és t_2, illetve a t_1 és $\bar{t}_2$ pontok euklidesi távolságát. A t_1 és a t_2 pont hiperbolikus távolságának kifejezése a fenti képletek szerint

$$\varrho^*(t_1, t_2)=k\log\frac{d'+d}{d'-d}, \tag{13}$$

vagy más alakban, mely ebből könnyű számolással adódik:

$$\varrho^*(t_1, t_2)=-2ki\operatorname{arctg}\frac{id}{d'}$$

ebből:

$$\operatorname{tgh}\frac{\varrho^*(t_1, t_2)}{2k}=\frac{d}{d'}.$$

99.8. *A komplex felső félsíkban a hiperbolikus szögmérték megegyezik az euklidesi szögmértékkel.*

Legyen ugyanis

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$
$$v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3=0$$

két egyenes a projektív síkban, amelynek metszéspontja a $\mathcal{C}$ görbe belsejéhez tartozik. A két egyenes által bezárt szög Θ hiperbolikus szögmértékének cosinusa a 97. § (13) képlet szerint:

$$\cos\Theta=\frac{F_{uv}}{\sqrt{F_{uu}F_{vv}}}.$$

Az $f_{xx}=x_1x_3-x_2^2$ négyzetes alakhoz adjungált alak:

$$F_{uu}=4\,u_1u_3-u_2^2$$

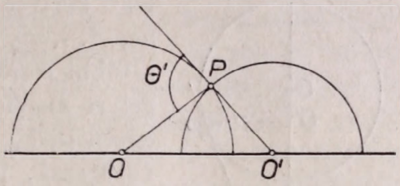
s a megfelelő bilineáris alak:

$$F_{uv}=2\,u_1v_3+2\,u_3v_1-u_2v_2,$$

s ezért

$$\cos\Theta=\frac{2\,u_1v_3+2\,u_3v_1-u_2v_2}{\sqrt{(4\,u_1u_3-u_2^2)\,(4\,v_1v_3-v_2^2)}}.$$

Tegyük fel, hogy u_1 és v_1 különbözik 0-tól; ebben az esetben mindkét egyenesnek egy-egy félkör felel meg a felső félsíkon. Jelöljük ezeknek középpontját O-val és O'-vel, sugarukat r-rel és r'-vel s metszéspontjukat P-vel. A két félkör által bezárt θ' szög értelmezés szerint egyenlő az $\sphericalangle OPO'$ szög mellékszögével (143. ábra), s ennek cosinusa:



143. ábra.

$$\cos\theta' = \frac{\varrho^2 - r^2 - r'^2}{2rr'},$$

hol ϱ jelenti az OO' távolságot. A középpontok ξ, ξ' koordinátájának s az r, r' sugaraknak kifejezése a (7), (8) képletek szerint:

$$\xi = \frac{-u_2}{2u_1}, \quad r = \frac{\sqrt{u_2^2 - 4\,u_1u_3}}{2u_1}$$

$$\xi' = \frac{-v_2}{2v_1}, \quad r' = \frac{\sqrt{v_2^2 - 4\,v_1v_3}}{2v_1}$$

$$\varrho^2 = (\xi - \xi')^2 = \frac{u_2^2}{4u_1^2} + \frac{v_2^2}{4v_1^2} - \frac{u_2v_2}{2u_1v_1}.$$

Ezeket az értékeket behelyettesítve a fenti képletbe, kapjuk, hogy

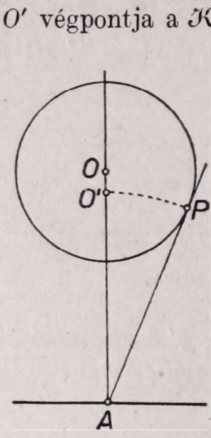
$$\varrho^2 - r^2 - r'^2 = \frac{2\,u_1v_3 + 2\,u_3v_1 - u_2v_2}{2\,u_1v_1} = \frac{F_{uv}}{2\,u_1v_1}$$

$$\cos\theta' = \frac{F_{uv}}{2\,u_1r\,.\,2\,v_1r'} = \frac{F_{uv}}{\sqrt{F_{uu}\,F_{vv}}} = \cos\theta.$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha u_1 és v_1 közül az egyik 0, vagyis, ha az u, v egyenesek közül az egyiknek a komplex félsíkon nem félkör, hanem félsugár felel meg.

99.9. A hiperbolikus síknak a komplex félsíkon szerkesztett Poincaré-féle modelljében a hiperbolikus sík nevezetes vonalait a komplex sík körei és egyenesei, illetve ezeknek a felső félsíkhoz tartozó része állítja elő. A komplex sík minden olyan $\mathcal{K}$ köre, mely a felső félsíkban fekszik, *hiperbolikus kör;* ennek hiperbolikus középpontját a következő (euklidesi) szerkesztéssel határozzuk meg. A $\mathcal{K}$ kör O középpontjából a valós tengelyre merőleges egyenest bocsátunk, ennek A talppontjából $\mathcal{K}$-hoz érintőt húzunk, s a P érintési pontnak

A-tól való távolságát rámérjük az $\overrightarrow{AO}$ félsugárra; ennek a szakasznak O' végpontja a $\mathcal{K}$ hiperbolikus kör középpontja (144. ábra). A valós tengely A és B pontját a felső félsíkban összekötő körívek között van egy hiperbolikus egyenes, t. i. az, amely merőleges a valós tengelyre; a többi ennek *aequidistans vonala.* A valós tengelyre merőleges félsugárnak, mint hiperbolikus egyenesnek, aequidistans vonalai azok a ferde félsugarak, melyek a valós tengelynek ugyanabból a pontjából indulnak ki. A valós tengely U pontján átmenő, s a valós tengelyre merőleges félkörök egymással párhuzamos hiperbolikus egyenesek; ennek a seregnek *horociklusai* a valós tengelyt az U pontban érintő körök. A valós tengelyre merőleges félsugarak által alkotott párhuzamos egyenesseregnek horociklusai pedig a valós tengellyel párhuzamos egyenesek.



144. ábra.

(Más használatos kifejezések: hiperbolikus kör = ciklus, horociklus = paraciklus, aequidistans vonal = hiperciklus.)

100. §. Projektív mérték a térben.

100.1. A térben projektív mértéket a tér kollineációinak egy olyan **G** csoportjával értelmezünk, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

1. *A tér alkalmasan választott P pontjának a* **G** *csoport leképezéseinél származó képpontjai egy τ tartományt alkotnak, amelynek legalább két pontja van, s τ bármely két pontjával együtt egy ezeket összekötő egyenes szakasz valamennyi pontja τ-hoz tartozik.*

2. *Ha P és P' a τ tartomány két tetszőleges pontja, a és a' a P, illetve a P' ponton átmenő irányított egyenes, és α, α' az a, illetve az a' egyenesen átmenő sík, akkor a* **G** *csoportban pontosan két olyan leképezés van, mely P-t P'-be, a-t a'-be, α-t α'-be s a (P, α) sugársor egyik irányítását a (P', α') sugársornak egy megadott irányításába viszi át.*

Jegyezzük meg, hogy *a* **G** *csoportnak ez a két leképezése az α síkban megegyezik egymással.* Legyen ugyanis **I** és **S** a **G** csoportnak az a két leképezése, amely a P pontot, az a irányított egyenest és az α síkot önmagába viszi át s megtartja a (P, α) sugársor irányítását. Mivel $\mathbf{S}^2$ is önmagába viszi át P-t, a-t, α-t és a (P, α) sugársor irányítását, ezért $\mathbf{S}^2=\mathbf{I}$. Az a egyenesnek $\mathbf{S}$ által származtatott leképezése az azonosság, mivel periodikus, megtartja a irányítását s van egy P fixpontja (**14**.5); hasonlóképpen adódik, hogy $\mathbf{S}$ a (P, α) sugársor minden elemét önmagába viszi át. Ebből következik, hogy $\mathbf{S}$ az α síkban vagy az azonosság, vagy egy speciális perspektivitás; az utóbbi esetben azonban $\mathbf{S}$ nem lehetne periodikus (l. **30**.9), ezért $\mathbf{S}$ az α síkban az azonosság. — Ha $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ a $\mathbf{G}$ csoportnak az a két leképezése, amely P-t P'-be, a-t a'-be, α-t α'-be s a (P, α) sugársor egyik irányítását a (P', α') sugársornak ugyanabba az irányításába viszi át, akkor $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^{-1}$-nél invariáns P, a, α és a (P, α) sugársor irányítása; a fentiek szerint tehát $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^{-1}$ az α síkban az azonosság, vagyis $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ megegyezik egymással az α síkban.

A **93**.22 tétel segítségével bebizonyítjuk a térgeometria megfelelő tételét:

100.2. T é t e l. *A* $\mathbf{G}$ *csoportra s a* τ *tartományra nézve a következő esetek lehetségesek:*

a) τ *azonos a projektív térrel, s* $\mathbf{G}$ *azoknak a kollineációknak a csoportja, melyek a térnek egy elliptikus polaritásával felcserélhetők (elliptikus eset).*

b) τ *egy* $\mathcal{F}$ *elliptikus másodrendű felület belsejéből áll, s* $\mathbf{G}$ *azoknak a kollineációknak a csoportja, melyek az* $\mathcal{F}$ *felületet önmagába viszik át (hiperbolikus eset).*

c) τ *a térből egy sík elhagyásával származik, s a* $\mathbf{G}$ *csoport aequivalens az euklidesi tér kongruenciacsoportjával (parabolikus eset).*

100.3. Előbb a tételnek a τ tartomány alkatára vonatkozó állítását igazoljuk.

Legyen α tetszőleges olyan sík, amely tartalmazza a τ tartománynak legalább két pontját; egyiket ezek közül jelöljük P-vel. A $\mathbf{G}$ csoportnak azok a leképezései, amelyek az α síkot önmagába viszik át, ebben a síkban egy $\mathbf{G}_\alpha$ csoportot származtatnak, melyre nézve teljesülnek a **93**.22 tétel feltételei. Jelöljük τ_α-val az α síknak a τ tartománnyal közös részét. A nevezett tétel szerint τ_α vagy az egész α síkkal azonos, vagy egy $\mathcal{C}_\alpha$ másodrendű görbe belsejéből áll, vagy egy l egyenes elhagyásával származik az α síkból.

Az első esetben a τ *tartomány a teljes projektív térrel azonos.* A 2. feltétel szerint ugyanis átvihetjük az α síkot a $\mathbf{G}$ csoport valamely leképezésével a P ponton átmenő, tetszőleges másik α' síkba; mivel ennél a leképezésnél a τ tartomány pontjai egymásba mennek át ezért az α' sík minden pontja is τ-hoz tartozik.

A második esetben felveszünk a P ponton át három olyan α, β, γ síkot, mely nem tartozik egy síksorhoz. Jelöljük $\mathcal{C}_\alpha$-val a τ_α tartományt határoló másodrendű görbét. A **G** csoportnak egy-egy olyan leképezése, mely az α síkot β-ba, illetve γ-ba viszi át, a $\mathcal{C}_\alpha$ görbének egy-egy $\mathcal{C}_\beta$ és $\mathcal{C}_\gamma$ másodrendű görbét feleltet meg; ezeknek belseje a τ tartománynak a β, illetve a γ síkkal közös része. — *A* $\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{C}_\beta, \mathcal{C}_\gamma$ *görbék közül bármely kettőnek két közös pontja van*; ugyanis az α és β síkok c metszésvonalának az a szakasza tartozik a τ_α tartományhoz, amelyet a $\mathcal{C}_\alpha$ görbével való két metszéspontja határoz meg, s tartalmazza a P pontot. Ez egyszersmind c-nek a τ tartományhoz tartozó szakasza s ezért megegyezik azzal a P-t tartalmazó szakasszal, amelyet c-nek a $\mathcal{C}_\beta$ görbével való két metszéspontja határoz meg. — A $\mathcal{C}_\alpha$, $\mathcal{C}_\beta$, $\mathcal{C}_\gamma$ görbéken átmegy egy és csak egy $\mathcal{F}$ másodrendű felület (**73**.3). Legyen δ egy, a P ponton átmenő sík, mely nem tartalmazza az α, β, γ síkok a, b, c metszésvonalai közül egyiket sem. Jelöljük $\mathcal{C}_\delta$-val a δ síknak $\mathcal{F}$-fel való metszésvonalát, és $\mathcal{C}'_\delta$-vel azt a másodrendű görbét, mely a τ tartománynak a δ síkkal közös részét határolja. A $\mathcal{C}_\delta$ és a $\mathcal{C}_\delta'$ kúpszeletnek hat közös pontja van, t. i. a $\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{C}_\beta, \mathcal{C}_\gamma$ görbékkel való két-két metszéspontjuk; ebből következik, hogy $\mathcal{C}_\delta$ azonos $\mathcal{C}'_\delta$-vel (**60**.10). Minthogy $\mathcal{F}$-et a P ponton átmenő bármely sík egy nem elfajult másodrendű görbében metszi, *$\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület, és a τ tartomány $\mathcal{F}$-nek a belseje.*

A harmadik esetben jelöljük υ-nal a tér ama pontjainak összességét, amelyek nem tartoznak τ-hoz; az α síknak υ-nal közös része feltevésünk szerint az l egyenes. A P ponton átmenő bármely α' sík az α sík képe a **G** csoport valamely leképezésénél; tehát α'-nek υ-nal közös része egy l' egyenes, t. i. az l egyenesnek az illető leképezésnél származó képe. Az α és α' síkok a metszésvonalának υ-nal közös pontja az l és l' egyenesek metszéspontja. Továbbá υ két tetszőleges U és V pontját összekötő egyenes összes pontja υ-hoz tartozik; ez az egyenes ugyanis a PUV sík és υ közös része. Ebből következik, hogy υ egy sík, és τ *a projektív térnek az υ síkhoz nem tartozó pontjaiból áll.*

Ezzel igazoltuk a **100**.2 tételnek a τ tartomány alkatára vonatkozó állítását. A három esetnek megfelelő **G** csoporttal egyenkint foglalkozunk a következő szakaszokban.

101. §. Elliptikus térgeometria.

101.1. Feltesszük, hogy a τ tartomány az egész projektív térrel azonos. Legyen α egy tetszőleges sík ; a $\mathbf{G}$ csoportnak azok a leképezései, melyek az α síkot önmagába viszik át, az α síkban egy $\mathbf{G}_\alpha$ csoportot származtatnak, melyre nézve teljesülnek a **93**.22 tétel feltételei. Legyen P az α sík egy pontja s a egy ezen átmenő, irányított egyenes az α síkban.

A $\mathbf{G}$ csoportban feltevés szerint két olyan leképezés van, mely a P pontot, az a irányított egyenest s az α síkot önmagába viszi át, s megtartja a (P, a) sugársor irányítását ; vagyis a $\mathbf{G}_\alpha$ csoport azonos leképezésének a $\mathbf{G}$ csoportban két leképezés felel meg. Ezek közül az egyik a tér azonos leképezése, a másik a térnek egy $\mathbf{S}_\alpha$ perspektivitása, melynek perspektivitási síkja α (**46**.1). Mivel $\mathbf{S}_\alpha^2$ is az azonos leképezést származtatja az α síkban, ezért $\mathbf{S}_\alpha^2=\mathbf{I}$, tehát $\mathbf{S}_\alpha$ *a tér harmonikus perspektivitása* (**49**.1). A $\mathbf{G}$ csoport $\mathbf{S}_\alpha$ leképezését az α sík egyértelműen meghatározza ; a perspektivitás A középpontját az α *sík pólusának* nevezzük.

101.2. Legyen β egy tetszőleges olyan sík, mely átmegy az α sík A pólusán. A $\mathbf{G}$ által a β síkban meghatározott $\mathbf{G}_\beta$ csoport elemei felcserélhetők a β síknak egy Ω_β elliptikus polaritásával (**93**.22). Az $\mathbf{S}_\alpha$ harmonikus perspektivitás a β síkban egy harmonikus perspektivitást származtat, amelynek tengelye az α és β sík b metszésvonala. Ebből következik, hogy a b egyenesnek az Ω_β polaritásnál az A pont felel meg.

Ennek az összefüggésnek az alapján a síkra vonatkozó megfelelő tételekből következik, hogy két különböző síknak a fenti előírás értelmében két különböző pólus felel meg, továbbá, hogyha az α sík pólusa a β síkhoz, akkor β pólusa az α síkhoz tartozik. E szerint a síkok és pontok fent értelmezett vonatkozása a térnek egy Ω polaritása ; mivel egy harmonikus perspektivitás síkja és középpontja nem egyesített helyzetű, ezért Ω *a tér elliptikus polaritása.*

Ha a $\mathbf{G}$ csoport $\mathbf{T}$ leképezése az α síkot α'-be viszi át, akkor az α sík A pólusának az α' sík A' pólusát felelteti meg. Az $\mathbf{S}_\alpha$ harmonikus perspektivitásnak $\mathbf{T}$-vel való transzformáltja ugyanis: $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}_\alpha\mathbf{T}=\mathbf{S}_{\alpha'}$. Ebből következik, hogy a $\mathbf{G}$ csoport minden eleme felcserélhető az Ω elliptikus polaritással.

Viszont minden olyan harmonikus perspektivitás, mely Ω-hoz tartozik, vagyis amelynek középpontja a perspektivitás síkjának pólusa, a **G** csoporthoz tartozik (l. **101**.1). Bármely, az Ω elliptikus polaritással felcserélhető kollineáció előállítható Ω-hoz tartozó harmonikus perspektivitások szorzataként (**55**.20), s ezért ugyancsak a **G** csoporthoz tartozik. Ebből következik:

101.3. *Ha a τ tartomány a projektív térrel azonos, akkor a* **G** *csoport a térnek azokból a kollineációiból áll, amelyek egy Ω elliptikus polaritással felcserélhetők.*

A **G** csoport alapján értelmezett geometriát *elliptikus térgeometriának* nevezzük. **G** az *elliptikus tér kongruenciacsoportja;* ennek az irányítást megtartó leképezései alkotják az *elliptikus tér mozgáscsoportját.*

Az elliptikus térben a *merőlegesség* fogalmát a következő módon értelmezzük. Két sík merőleges egymásra, ha konjugáltak, vagyis ha az egyik sík átmegy a másiknak a pólusán (és megfordítva). Az α síkra merőleges minden olyan egyenes, mely átmegy az α sík A pólusán. Az a és b egyenesek merőlegesek egymásra, ha konjugáltak, vagyis ha az egyik a másiknak a polárisa, továbbá akkor is, ha az egyik egyenes metszi a másiknak a polárisát. — E szerint minden olyan egyenes, mely két konjugált egyenes egy-egy pontján megy át, a két konjugált egyenesnek közös merőlegese.

101.4. *Az elliptikus tér mozgásai és kongruens leképezései* az **55**.19 tételben adott felsorolás szerint a következő típusokhoz tartoznak.

a) Az elliptikus térnek egy α síkra s az α sík A pólusára vonatkozó harmonikus perspektivitása; megfordítja a tér irányítását. Ezt a leképezést az α síkra vonatkozó *tükrözés*nek, s ugyancsak az A pontra vonatkozó tükrözésnek tekinthetjük, s ennek megfelelően *síktükrözés*nek, illetve *ponttükrözés*nek nevezzük.[1]

b) A tér kettőstengelyű hiperbolikus involuciója, melynek tengelye két egymáshoz konjugált a és a' egyenes; ezt az a, a' tengelyek körül való *félforgás*nak nevezzük. Előállítható két olyan síktükrözés szorzataként, melyeknek síkja merőleges egymásra. Az a tengelyre merőleges, vagyis az a' tengelyen átmenő invariáns síkokban a leképezés az a' tengelyre vonatkozó tükrözés, vagyis félforgás az a egyenessel való metszéspont körül.

c) A tér elliptikus típusú, általános tengelyes kollineációja, melynek ponttengelye a és síktengelye a-nak a' polárisa; előállítható két síktükrözés szorzataként. Ezt a leképezést az *a tengely körül való*

[1] Értelmezését l. első kötet, 160. és 187. o.

forgásnak[1] tekinthetjük, mivel minden, az a egyenesre merőleges síkban s az a tengelyű síksorban forgást származtat. Ugyanez a leképezés a térnek az a' *egyenes mentén való eltolásaként*[2] is értelmezhető s előállítható két ponttükrözés szorzataként, melyeknek középpontja az a' egyenesen fekszik. A forgás és a félforgás, mivel két tükrözés szorzata, megtartja a tér irányítását.

d) A tér *tükrözött forgása*, vagyis egy a tengely körül való forgásnak s egy, a-ra merőleges α íkra vonatkozó tükrözésnek a szorzata; megfordítja a tér irányítását.

e) A tér kettőstengelyű elliptikus kollineációja, melyet két félforgás szorzataként, vagy egy egyenes mentén való eltolás s ugyanez egyenes körül való forgás szorzataként állíthatunk elő; az utóbbi előállításra való tekintettel az elliptikus tér *csavarmozgásának* nevezzük.

f) A tér fixpont és invariáns sík nélküli kollineációja két invariáns egyenessel, amely ugyancsak két félforgás szorzata, vagy másként egy egyenes mentén való eltolásnak s ugyanez egyenes körül való forgásnak a szorzata, azaz a tér *csavarmozgása.*

Az e), illetve az f) típusú leképezést a tér *egyenletes*, illetve *általános csavarmozgásának* nevezzük; az előbbi egy a egyenes körül való forgásnak s a polárisa, a' körül való, azzal aequivalens forgásnak a szorzata; az utóbbi az a és az a' egyenesek körül való, nem aequivalens forgásoknak a szorzata.

101.5. Az elliptikus térnek azok a forgásai (és félforgásai), amelyeknek van egy közös A fixpontja, egy $\mathbf{G}_A$ csoportot alkotnak; ezt az *A pont körül való forgások csoportjának* nevezzük. Jelöljük $\mathbf{S}_A$-val az A pontra vonatkozó tükrözést, és $\mathbf{G}'_A$-vel azt a csoportot, melyet $\mathbf{G}_A$-ból $\mathbf{S}_A$ hozzáfűzésével kapunk. $\mathbf{G}'_A$ azoknak a kongruens leképezéseknek a csoportja, melyeknél A fixpont.

A $\mathbf{G}'_A$ csoport leképezései A polársíkját, α-t önmagába viszik át s ebben a síkban felcserélhetők az Ω által származtatott elliptikus polaritással. Egy tetszőleges P pontnak, mely különbözik A-tól s az α sík pontjaitól, a $\mathbf{G}'_A$ csoportnál megfelelő képpontok egy $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felületet alkotnak. $\mathcal{F}$ minden pontjának A-tól való távolsága egyenlő; az $\mathcal{F}$ felület az elliptikus térben egy A középpontú *gömbfelület*, s egyben a középpont α polársíkjának *aequidistans felülete.*

[1] L. első kötet, 173. o. [2] u. o., 174. o.

Az $\mathfrak{F}$ gömbfelület szferikus geometriáját a $\mathbf{G}'_4$ csoport, illetve az általa származtatott homográfiák és antihomográfiák csoportja értelmezi. Ezek felcserélhetők $\mathfrak{F}$-nek azzal a másodfajú antiinvolucióiával, amelyet az $\mathbf{S}_4$ harmonikus perspektivitás származtat. Ugyanez a tulajdonság jellemzi az euklidesi térben a gömbfelület forgás-, illetve kongruenciacsoportját (**84**.7). E szerint *az elliptikus és az euklidesi szferikus geometria megegyezik egymással, vagyis az elliptikus tér gömbfelületén érvényesek az euklidesi szferikus geometria tételei.*

101.6. Az elliptikus térnek az Ω polaritással felcserélhető, kettőstengelyű elliptikus kollineációi közül előbb az involuciókkal fogunk foglalkozni. Legyen a és a' két tetszőleges konjugált egyenes ; az Ω-nál konjugált pontok az a és az a' egyenesen egy-egy elliptikus involuciót határoznak meg, amelyek aequivalensek egymással a $\mathbf{G}$ csoportra vonatkozóan.

Legyen $\mathbf{T}_0$ egy *kettőstengelyű elliptikus involució*, melynek invariáns egyenese a és a', s amely felcserélhető Ω-val. Felveszünk az a egyenenesen két konjugált A és B pontot, s az a' egyenesen két konjugált A' és B' pontot. Az a kettőstengelyű $\mathbf{T}_1$ hiperbolikus involució, melynek tengelyei az egymáshoz konjugált AA' és BB' egyenesek, felcserélhető Ω-val, tehát $\mathbf{T}_1$ az elliptikus térnek az AA', BB' tengelyek körül való félforgása. — A $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_0$ leképezés az a és az a' egyenesen hiperbolikus involuciót létesít, ezeknek fixpontjait jelöljük C, D-vel és C', D'-vel. A $CC'D'$ invariáns háromszög $C'D'$ oldalának irányítását megfordítja a $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_0$ leképezés, ezért a másik két oldal közül az egyiket meg maradó, a másikat megfordított irányítással viszi át önmagába (**30**.3) ; válasszuk a jelöléseket úgy, hogy a CC' oldalon megmaradjon az irányítás. A $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_0$ leképezés a CC' egyenesen, s hasonlóan a DD' egyenesen az azonos leképezést származtatja (l. **93**.2), s mivel a CD egyenesen involutorius, tehát a térnek a CC', DD' tengelyekre vonatkozó $\mathbf{T}_2$ hiperbolikus involuciója, vagyis az elliptikus térnek egy félforgása.

A $\mathbf{T}_0$ *kettőstengelyű elliptikus involució előállítható tehát a* $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ *félforgások szorzataként.*

Legyen viszont A, B és A', B' az a és az a' egyenes két-két konjugált pontja, továbbá C, D az a, és C', D' az a' egyenesnek az a konjugált pontpárja, mely harmonikusan választja el A, B-t, illetve A', B'-t. Jelöljük $\mathbf{T}_1$-gyel az AA', BB' tengelyek körül való félforgást, továbbá $\mathbf{T}_2$-vel és $\mathbf{T}'_2$-vel a CC', DD', illetve a $CD', C'D$ tengelyek körül való félforgást. A $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ és a $\mathbf{T}'_0 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}'_2$ leképezések Ω-val felcserélhető kettőstengelyű elliptikus involuciók, melyeknek invariáns egyenese a és a' ; ez a két involució megegyezik egymással az a és az a' egyenesen, megegyezik ugyanis az Ω által az a és a' egyenesen származtatott elliptikus involucióval.

E szerint az elliptikus tér mozgáscsoportjában két olyan kettőstengelyű elliptikus involució van, amelynek invariáns egyenese a és a'.

Jelöljük E, E'-vel az AA' egyenesnek, F, F'-vel a BB' egyenesnek azt a konjugált pontpárját, mely harmonikusan választja el az A, A', illetve a B, B' pontpárt. Az E, E' pontpár mind a $\mathbf{T}_2$, mind a $\mathbf{T}_2'$ hiperbolikus involuciónál az F, F' pontpárba, s ezért a $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_2'$ leképezésnél önmagába megy át. Mivel $\mathbf{T}_0=\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$, és $\mathbf{T}_0'=\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2'=\mathbf{T}_2'\mathbf{T}_1$, ezért $\mathbf{T}_0\mathbf{T}_0'=\mathbf{T}_2\mathbf{T}_2'$; ez a leképezés az a és az a' egyenesen az azonosság, s az AA' egyenesen involutorius, mivel felcseréli E-t és E'-t, tehát a térnek az a, a' tengelyekre vonatkozó félforgása. E szerint a $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_0'$ *kettőstengelyű elliptikus involuciók közül mindegyik megegyezik a másiknak és az a, a' tengelyű félforgásnak a szorzatával.*

Jelöljük $\mathbf{S}$-sel a térnek azt a harmonikus perspektivitását, amelynek perspektivitási síkja $\alpha=A'a$, s középpontja B' ; az $\mathbf{S}$ leképezésnél E és E' fixpont, F és F' egymásba megy át. Ha az E pont a $\mathbf{T}_0$ elliptikus involuciónál F-be, akkor az $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}_0\mathbf{S}$ leképezésnél F'-be megy át ; mivel az utóbbi leképezés is Ω-val felcserélhető elliptikus involució, mely önmagába viszi át az a és az a' egyenest, ezért a fentiek szerint : $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}_0\mathbf{S}=\mathbf{T}_0'$. — Eredményünket a következő tételben foglaljuk össze :

101.7. *Az elliptikus tér bármely két konjugált a és a' egyenesének a* $\mathbf{G}$ *csoportban két olyan kettőstengelyű elliptikus involució felel meg, amelyeknél a és a' invariáns. Ezek közül az egyik a másiknak transzformáltja egy olyan tükrözéssel, melynek invariáns síkja merőleges az a, vagy az a' egyenesre.*

101.8. Legyen b a $\mathbf{T}_0$ elliptikus involuciónak egy, a-tól és a'-től különböző invariáns egyenese. Jelöljük $\mathbf{t}$-vel az a egyenesnek olyan önmagára való, elliptikus leképezését, mely felcserélhető az Ω-nál konjugált pontok involuciójával ; a $\mathbf{t}$ leképezést átvisszük az a' és a b egyenesre a három egyenes közös tranzverzálisaival (l. a **48**.4 tétel bizonyítását) ; az a, a', b egyeneseknek ez a leképezése meghatározza a térnek egy *kettőstengelyű* $\mathbf{T}$ *elliptikus kollineáció*ját, mely felcserélhető a $\mathbf{T}_0$ involucióval, s ugyancsak az Ω polaritással. Az ilyen módon meghatározott $\mathbf{T}$ leképezések összessége *egytagú, kommutatív* *csoportot* alkot ; jelöljük ezt $\mathbf{G}_{a,a'}$-vel. *Ennek a csoportnak pályavonalai azok az egyenesek, amelyek invariánsak a* $\mathbf{T}_0$ *involuciónál* (**48**.4).

A $\mathbf{G}_{a,a'}$ csoport bármely eleme előállítható az a egyenes mentén való eltolás s az a' egyenes mentén ugyanolyan nagyságú szakasszal való eltolás szorzataként. Az a' egyenes mentén való eltolást az a egyenes körül való forgásnak tekinthetjük, tehát a leképezés az a egyenes mentén való eltolás s a körül való forgás szorzata, azaz *egyenletes csavarmozgás* az a tengely körül (s ugyancsak az a' tengely körül). Jegyezzük meg, hogy a és a' nem kitüntetett egyenesei a $\mathbf{G}_{a,a'}$ csoportnak, hanem helyettesíthetjük őket két tetszőleges egymáshoz konjugált b, b' pályavonallal.

Ha a és a' a $\mathbf{G}_{a,a'}$ csoport két konjugált pályavonala, s b egy harmadik pályavonala, akkor ezeknek bármely közös c tranzverzálisa a $\mathbf{G}_{a,a'}$ csoport tetszőleges $\mathbf{T}$ leképezésénél a három egyenesnek egy közös c' tranzverzálisába megy át. A c és a c' egyenes az a, a', b egyeneseknek közös merőlegese az elliptikus mértékmeghatározás értelmében. Jelöljük c-nek az a, a', b egyenesekkel való metszéspontját P, P', P''-vel, s a c' egyenesnek a, a', b-vel való metszéspontját Q, Q', Q''-vel. A P'-t nem tartalmazó PP'' szakasz, mely a P'' pontnak az a egyenestől való merőleges távolsága, egyenlő a Q'-t nem tartalmazó QQ'' szakasszal, vagyis a Q'' pontnak az a egyenestől való merőleges távolságával. E szerint a *b egyenes valamennyi pontja az a egyenestől (s hasonlóan a'-től) egyenlő távolságban van.* Mivel az a, b egyeneseknek ez a tulajdonsága megegyezik az euklidesi tér párhuzamos egyeneseinek egyik jellemző tulajdonságával, ezért az a és b egyenest az *elliptikus tér párhuzamos egyeneseinek*, vagy Clifford-*féle párhuzamosak*nak nevezzük. Az euklidesi tér párhuzamos egyeneseitől eltérően, az elliptikus tér párhuzamos egyenesei nem tartoznak egy síkhoz (mivel egy síkban fekvő bármely két egyenes metszi egymást).

101.9. A fenti értelmezés szerint *az elliptikus tér két a és b egyenese akkor és csak akkor párhuzamos, ha van az elliptikus térnek olyan kettőstengelyű elliptikus involuciója, mely felcserélhető Ω-val, s melynél invariáns a és b.* Ezzel a feltétellel aequivalens a következő (l. **101**.6) : *Az a, b egyeneseknek s polárisaiknak, a'-nek és b'-nek legalább három különböző, közös tranzverzálisuk van ;* a **6**.2 tétel szerint ekkor az a, b, a', b' egyenesek közül bármely háromnak minden közös tranzverzálisa metszi a negyedik egyenest is.

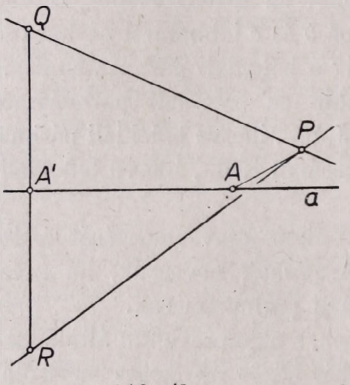
Az a és a' konjugált egyenesek **101**.7 szerint az elliptikus térnek két, $\mathbf{T}_0$ és $\mathbf{T}_0'$ elliptikus involucióját határozzák meg, melyek felcserélhetők Ω-val, tehát a térnek az a és az a' egyeneshez nem tartozó bármely P pontján *két, a-val párhuzamos egyenes* megy át. Ezeknek megkülönböztetésére jegyezzük meg, hogy a **G** csoporthoz tartozó kettőstengelyű *elliptikus involuciók két osztályt alkotnak* oly értelemben, hogy egy osztály bármely két eleme aequivalens egymással az elliptikus mozgáscsoportnál, viszont a térnek az irányítását megfordító kongruens leképezései egymásba transzformálják a két osztályt (l. **101**.7). Az egyik osztály elemeit *jobboldali*, a másikét *baloldali involuciók*nak nevezzük, s ennek megfelelően két egyenest *jobboldali*, illetve *baloldali párhuzamos*nak, ha egy jobboldali, illetve baloldali involuciónál invariánsak. Ebből az értelmezésből közvetlenül következik, hogy ha a és b, továbbá b és c jobboldali párhuzamosak, akkor a és c is ; hasonlóan tranzitív a baloldali párhuzamosság. (Két konjugált egyenes egymásnak jobb- és baloldali párhuzamosa, s azonkívül merőleges is egymásra). Jobb-, illetve baloldali párhuzamosak az elliptikus tér minden mozgásánál jobb-, illetve baloldali párhuzamosakba mennek át.

Az elliptikus tér valamely egyenletes csavarmozgását *jobboldali*, illetve *baloldali egyenletes csavarmozgás*nak nevezzük, ha invariáns egyenesei jobboldali, illetve baloldali párhuzamosak.

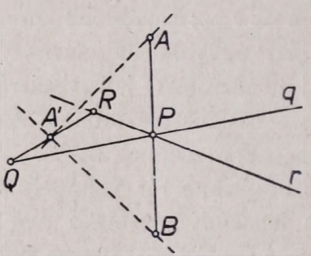
Két, egymást metsző egyenesnek, s ugyancsak két általános helyzetű torz egyenesnek két és csak két közös merőleges metszője van. Két metsző egyenesnek két közös merőlegese a metszéspontjukban a két egyenes síkjára emelt merőleges s ennek polárisa. — Legyen a és b két torz egyenes, amely nem merőleges egymásra, azaz a polárisa, a' és b szintén torz. Jelöljük $\mathbf{T}$-vel a-nak a'-re b-ről való vetítését, $\mathbf{J}_a$-val és $\mathbf{J}_{a'}$-vel az a, illetve az a' egyenes konjugált pontjainak elliptikus involucióját. $\mathbf{T}\mathbf{J}_{a'}\mathbf{T}^{-1}$ az a egyenes elliptikus involuciója ; ha ez különbözik $\mathbf{J}_a$-tól, akkor $\mathbf{J}_a$-val egy közös A, A' konjugált pontpárja van (**16**.5) ; az a, a', b egyeneseknek az A és az A' ponton átmenő közös tranzverzálisa a-nak és b-nek két közös merőlegese. — Ha pedig $\mathbf{T}\mathbf{J}_{a'}\mathbf{T}^{-1}$ és $\mathbf{J}_a$ azonos egymással, akkor a, a' és b minden közös tranzverzálisa közös merőlegese a-nak és b-nek. *Ha tehát az a és b nem konjugált egyenesek jobboldali párhuzamosak, akkor minden pontjukon átmegy egy és csak egy közös merőlegesük, s ezek páronkint baloldali párhuzamosak.* Ha két egyenes konjugált, akkor közös merőlegesük minden olyan egyenes, mely metszi mindkettőt.

Ha a P pont nem tartozik sem az a egyeneshez, sem ennek a' polárisához, akkor a-nak a P ponton átmenő jobb- és baloldali párhuzamosát a következő szerkesztéssel határozzuk meg (145. ábra). A Pa síkban P-ből merőlegest bocsátunk a-ra, ennek talppontja legyen A, s A-nak az a egyenesen fekvő konjugáltja A'. Az A' pontban a Pa síkra merőlegest emelünk, ez a PA egyenes polárisa, s erre az A' ponttól mindkét irányban rámérjük a PA szakasszal egyenlő $A'Q$ és $A'R$ szakaszt. *A PQ és PR egyenesek párhuzamosak a-val, közülök egyik jobboldali, a másik baloldali párhuzamos.*

Legyen q és r két egyenes, melynek közös pontja P. Van egy olyan a egyenes, melynek jobboldali párhuzamosa q, s baloldali párhuzamosa r, továbbá egy olyan b egyenes, melynek bal- és jobboldali



146. ábra.



146. ábra.

párhuzamosa q és r. Ezeknek megszerkesztésére, jelöljük Q-val és R-rel a q és az r egyenesnek P-hez konjugált pontjait, A'-vel a QR szakasz középpontját (146. ábra). A P pontban a qr síkra merőlegest emelünk s erre rámérjük a P ponttól egyik és másik irányban a QA' szakasszal egyenlő PA és PB szakaszt. *Az $a = AA'$ és a $b = BA'$ egyenes, valamint ezeknek polárisai azok az egyenesek, amelyeknek közös párhuzamosai q és r.*

101.10. Legyen a_1, a_2, a_3 három jobboldali párhuzamos egyenes. Ezeknek közös tranzverzálisai páronkint baloldali párhuzamosak, s összességük egy $\mathcal{F}$ másodrendű vonalfelület egyik alkotóserege. Az $\mathcal{F}$ felület másik alkotóserege, amelyhez a_1, a_2, a_3 is tartozik, jobboldali párhuzamosokból áll. Az $\mathcal{F}$ másodrendű vonalfelületet Clifford-*féle felületnek* nevezzük.

Jelöljük (a)-val és (b)-vel az $\mathcal{F}$ felület két alkotóseregét. Az (a)

sereg a_1 egyenese körül való tetszőleges **T** jobboldali egyenletes csavarmozgás az (a) sereg alkotóit önmagukba, a (b) sereg alkotóit egymásba viszi át. Legyen b_1 a (b) sereg tetszőleges eleme, P az a_1, b_1 egyenesek metszéspontja, továbbá p és p' az a két konjugált egyenes, amelynek jobboldali párhuzamosa a_1, s baloldali párhuzamosa b_1. A **T** jobboldali csavarmozgásnál p és p' önmagába, b_1 a (b) sereg valamely b_2 egyenesébe megy át. Az a_1 és b_2 egyenes a p és p' konjugált egyeneseknek a $P'=\mathbf{T}(P)$ ponton átmenő jobb-, illetve baloldali párhuzamosa. Ebből következik, hogy *p és p' az $\mathcal{F}$ felület valamennyi alkotójának közös párhuzamosai*, az (a) sereg alkotóinak jobb-, s a (b) sereg alkotóinak baloldali párhuzamosai. A p és a p' egyenest az $\mathcal{F}$ CLIFFORD-*féle felület tengelyeinek* nevezzük.

A p tengelyen átmenő bármely α síknak az $\mathcal{F}$ felülettel való metszésvonala kör, melynek középpontja a p' tengelyen fekszik. Ebből a körből az $\mathcal{F}$ felületet úgy származtathatjuk, hogy a kör síkját a p' tengelyre merőlegesen tartva, középpontját a p' tengelyen eltoljuk, vagy ami ugyanaz, hogy a kört a p tengely körül forgatjuk. Ugyancsak előállíthatjuk a felületet azáltal, hogy valamely alkotóját az egyik vagy a másik tengely körül forgatjuk. A tengelyek körül való forgások és csavarmozgások az $\mathcal{F}$ felületen egyszeresen tranzitív csoportot alkotnak (l. **77**.4).

A CLIFFORD-féle felületen az egyik sereg két tetszőleges a_1 és a_2 alkotója a másik sereg két tetszőleges b_1 és b_2 alkotójával egy *parallelogrammát* határol, amelynek átellenes oldalai párhuzamosak és egyenlők. A parallelogramma két-két átellenes szöge egyenlő, két szomszédos szög közül az egyik egyenlő a másiknak mellékszögével. Az euklidesi sík parallelogrammáinak ugyanezek a jellemző tulajdonságai ; lényeges különbség viszont az, hogy az elliptikus tér parallelogrammája nem síkidom, hanem egy görbe felületnek a része.

102. §. Hiperbolikus térgeometria.

A **100**.2 tétel második esetének megfelelően, tegyük fel, hogy a τ tartomány egy $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület belsejéből áll. Ebben az esetben *a* **G** *csoport minden leképezése az $\mathcal{F}$ felületet, s ennek belsejét önmagába viszi át.* Viszont *a térnek minden olyan* **T** *kollineációja, mely az $\mathcal{F}$ felületet önmagába viszi át, a* **G** *csoporthoz tartozik.* Legyen ugyanis $\mathcal{C}$ egy α síknak az $\mathcal{F}$ felülettel való metszésvonala, s A, B, C ennek három különböző pontja. Az AB egyenesnek a $\mathcal{C}$ görbére vonatkozó pólusát jelöljük D-vel, az AB és CD egyenesek metszéspontját P-vel; P a $\mathcal{C}$ görbe belső pontja. A $\mathcal{C}$ görbének s a felvett öt pontnak **T**-nél származó képét jelöljük $\mathcal{C}'$-vel, illetve A', B', C', D', P'-vel, s a $\mathcal{C}'$ görbe síkját α'-vel. A (P, α) és a (P', α') sugársor egy-egy irányítását a $\mathcal{C}$ görbe (ABC) és a $\mathcal{C}'$ görbe $(A'B'C')$ irányításával határozzuk meg. A **G** csoportra vonatkozó 2. feltétel szerint a **G** csoportban pontosan két olyan $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ leképezés van, mely a P pontot P'-be, az APB irányított egyenest az $A'P'B'$ irányított egyenesbe, az α síkot α'-be viszi át, s a (P, α) és a (P', α') sugársornak az (ABC), illetve az $(A'B'C')$ sorrenddel meghatározott irányítását egymásnak felelteti meg. A $\mathbf{T}_1$ és a $\mathbf{T}_2$ leképezésnél a $\mathcal{C}$ görbe $\mathcal{C}'$-be, az AB egyenes D pólusa az $A'B'$ egyenes D' pólusába, tehát a PD egyenes és a $\mathcal{C}$ görbe C metszéspontja a $P'D'$ egyenes és a $\mathcal{C}'$ görbe C' metszéspontjába megy át. Mivel az $\mathcal{F}$ felület $\mathbf{T}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ homográfikus vagy antihomográfikus leképezései az A, B, C pontokban megegyeznek egymással, közülök kettő azonos (**80**.2), tehát a **T** leképezés a **G** csoport $\mathbf{T}_1$ vagy $\mathbf{T}_2$ elemével azonos.

A **G** csoport alapján az $\mathcal{F}$ felület belsejében értelmezett geometriát *hiperbolikus térgeometriának* nevezzük. **G** a *hiperbolikus tér kongruenciacsoportja,* ennek a tér irányítását megtartó leképezésekből álló alcsoportja a *hiperbolikus tér mozgáscsoportja.*

102.1. A fentiek szerint *a hiperbolikus tér kongruenciacsoportja kölcsönösen egyértelmű és izomorf módon megfelel az $\mathcal{F}$ elliptikus másodrendű felület homográfikus és antihomográfikus leképezéseiből álló csoportnak s a hiperbolikus tér mozgáscsoportja az $\mathcal{F}$ felület homográfikus csoportjának.*

Ebből következik továbbá, hogy *a komplex projektív egyenes és a hiperbolikus tér geometriája között izomorf vonatkozás áll fenn, hasonlóan, mint a valós projektív egyenes és a hiperbolikus sík geometriája között;* vagyis az egyik geometria csoportja kölcsönösen egyértelmű és izomorf módon megfelel a másik geometria csoportjának.

102.2. A hiperbolikus térnek azokat a mozgásait, melyeknél invariáns a térnek egy A pontja (vagyis a projektív térnek egy $\mathcal{F}$ belsejében fekvő pontja), az *A pont körül való forgásoknak* nevezzük. Az A pont körül való bármely forgásnak megfelel egy A-n átmenő *tengely,* amelynek minden pontja fixpont. Az $\mathcal{F}$ felület megfelelő homográfiája *elliptikus* s fixpontjai megegyeznek a tengely végpontjaival.

Azoknak a pontoknak az összessége, melyekbe a hiperbolikus ternek egy, A-tól különböző P pontja az A pont körül való forgások-nál megy át, egy A középpontú *gömbfelület*et alkot. Ez egy $\mathcal{F}_1$ elliptikus másodrendű felület, az $\mathcal{F}$ felületnek a képe egy olyan perspektivitásnál, amelynek középpontja A, s perspektivitási síkja A-nak $\mathcal{F}$-re vonatkozó α polársíkja. Az A pont körül való forgások csoportja aequivalens egy euklidesi gömbfelület forgáscsoportjával (**84**.7). Tehát *a hiperbolikus tér bármely gömbfelületén is érvényesek az euklidesi szferikus geometria tételei.*

102.3. A hiperbolikus térnek egy a egyenese mentén való *eltolásai* az $\mathcal{F}$ felület *hiperbolikus homográfiái*nak felelnek meg, amelyeknek fixpontjai az a egyenes végpontjai. Az a egyenes körül való *csavarmozgások,* vagyis az a mentén való eltolások és az a körül való forgások szorzatai, azoknak a *loxodromikus homográfiák*nak felelnek meg, melyeknek fixpontjai az a egyenesnek végpontjai.

A hiperbolikus térgeometria bármely $\mathcal{F}$-et metsző γ síknak $\mathcal{F}$ belsejéhez tartozó részében megegyezik azzal a hiperbolikus síkgeometriával, melyet a γ síkban $\mathcal{F}$ és γ metszésvonalára, mint alapgörbére vonatkozóan értelmezünk. A γ síknak $\mathcal{F}$-re vonatkozó pólusa legyen C ; a γ síkra *merőlegesek* a hiperbolikus mérték értelmében a C ponton átmenő egyenesek és csak ezek. Ha a γ síkra merőleges egyenesek közül mindegyikre egyenlő szakaszokat mérünk fel a γ síknak ugyanazon az oldalán, a szakaszok végpontjai γ-nak egy *aequidistans felületét* alkotják. Az ezen a felületen fekvő aequidistans vonalak (t. i. a γ sík egyeneseinek aequidistans vonalai) egy olyan rendszert alkotnak, mely aequivalens a hiperbolikus sík egyeneseiből álló rendszerrel ; az egyiket a másikba viszi át a C pontból való vetítés. Az aequidistans felület ugyancsak egy elliptikus másodrendű felület, t. i. az $\mathcal{F}$ felület képe egy olyan perspektivitásnál, melynek középpontja C s perspektivitási síkja γ.

A hiperbolikus térnek azok a kongruens leképezései, amelyek a γ síkot, s a hiperbolikus térnek γ által meghatározott két részét önmagába viszik át, a γ hiperbolikus síkban ennek kongruenciacsoportját származtatják, s γ aequidistans felületén hiperbolikus síkgeometriát értelmeznek. Ezt úgy fejezzük ki, hogy *a γ hiperbolikus sík aequidistans felületein a hiperbolikus síkgeometria érvényes.*

102.4. Azok a hiperbolikus egyenesek, amelyeknek közös végpontja az $\mathcal{F}$ felület U pontja, *párhuzamos egyenesnyaláb*ot alkotnak ; ennek episzféráit (értelmezést l. első kötet, 193. o.) *horoszférák-*

nak (vagy paraszféráknak) nevezzük. Egy $\mathcal{H}$ horoszférának az U ponton átmenő síkokkal való metszésvonalai horociklusok, amelyek az U végpontú párhuzamos egyenesseregekhez tartoznak. A $\mathcal{H}$ horoszféra a projektív térben egy elliptikus másodrendű felület, az $\mathcal{F}$ felületnek a képe egy olyan speciális perspektivitásnál, amelynek középpontja U, s perspektivitási síkja $\mathcal{F}$-nek az U ponthoz tartozó érintősíkja. A hiperbolikus térnek azok a mozgásai, melyek az U pontot s a $\mathcal{H}$ horoszférát önmagába viszik át, az $\mathcal{F}$ felület *elliptikus és parabolikus homográfiái*nak felelnek meg. A hiperbolikus térnek mindazok a kongruens leképezései, melyeknél U és a $\mathcal{H}$ horoszféra invariáns, ezen a horoszférán euklidesi síkgeometriát értelmeznek. Az U pontból való sztereográfikus vetítésnél ugyanis a $\mathcal{H}$-n fekvő horociklusok egy euklidesi sík egyeneseinek, s a $\mathcal{H}$-n értelmezett csoport az euklidesi sík kongruenciacsoportjának felel meg. (**84**.2). E szerint *a horoszférákon az euklidesi síkgeometria érvényes.*

102.5. A hiperbolikus térben *háromféle egyenesnyaláb* van : 1. egy ponton átmenő egyenesekből álló sugárnyaláb, episzférái a gömbök ; 2. párhuzamos egyenesnyaláb, episzférái a horoszférák ; 3. egy síkra merőleges egyenesekből álló nyaláb, ennek episzférái a sík aequidistans felületei. A síkra vonatkozó **95**.5 tételből következik, hogy ez a felsorolás teljes. A háromféle nyalábnak a projektív térben olyan sugárnyalábok felelnek meg, melyeknek középpontja rendre az $\mathcal{F}$ felület belsejében, a felületen, illetve $\mathcal{F}$ külsejében fekszik.

102.6. A *hiperbolikus tér* POINCARÉ-*féle modellje* az euklidesi térnek valamely sík által meghatározott egyik félterében hasonlóan értelmezhető, mint a hiperbolikus síké a komplex félsíkban.

A projektív térben vegyünk fel végtelen távoli síknak egy υ síkot, amely nem metszi s nem érinti az $\mathcal{F}$ felületet ; abszolut polaritásnak vegyük fel az υ síknak $\mathcal{F}$-re vonatkozó elliptikus polaritását. Az így értelmezett euklidesi térben $\mathcal{F}$ gömbfelület, melynek középpontja υ-nak $\mathcal{F}$-re vonatkozó O pólusa. Legyen (ξ, η, ζ) ebben a térben egy O kezdőpontú, derékszögű koordinátarendszer, s az $\mathcal{F}$ felület egyenlete legyen :

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1 = 0.$$

Vegyünk fel egy másik euklidesi teret, ebben egy (x, y, z) derékszögű koordinátarendszert, s egészítsük ki a teret egy végtelen távoli ponttal *zárt térré*. A $z>0$ féltérre leképezzük az $\mathfrak{F}$ felület belsejét a következő transzformációval:

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta},\quad y=\frac{\eta}{1-\zeta},\quad z=\frac{+\sqrt{1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2}}{1-\zeta};$$

ebből:

$$\xi=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+1},\quad \eta=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2+1},$$

$$\zeta=\frac{x^2+y^2+z^2-1}{x^2+y^2+z^2+1}.$$

A (ξ,η,ζ) tér valamely síkjának egyenlete legyen:

$$A\xi+B\eta+C\zeta+D=0;$$

az (x, y, z) térben a megfelelő egyenlet:

$$(C+D)(x^2+y^2+z^2)+2Ax+2By+(D-C)=0$$

egy gömbfelület egyenlete, amelynek középpontja a $z=0$ síkban fekszik, illetve egy, a z tengellyel párhuzamos síké, ha $C=-D$. Az $\mathfrak{F}$ belsejében fekvő hiperbolikus egyeneseknek az xy síkra merőleges félkörök és félsugarak, s a hiperbolikus síkoknak az xy síkra merőleges félgömbök és félsíkok felelnek meg. Ezeken a megfelelő hiperbolikus síkgeometriát a Poincaré-féle modell valósítja meg (l. **95**.7 és 8). Ebből következik, hogy bármely két, egymást metsző s az xy síkra merőleges félkör egymással bezárt euklidesi szöge egyenlő a megfelelő hiperbolikus egyenesek szögének hiperbolikus mértékével (l. **99**.8). A felső féltér két P és Q pontjának hiperbolikus távolságát következőképpen fejezzük ki; a P, Q pontokon átmenő, az xy síkra merőleges körnek az xy síkkal való metszéspontjai legyenek U és V; jelölésüket válasszuk meg úgy, hogy fennálljon a körön az $(UPQV)$ elrendezés. A

$$(P, Q, V, U)=\frac{PV.QU}{PU.QV}$$

kettősviszony logaritmusának s egy pozitív valós k konstansnak a szorzata adja a P, Q pontok hiperbolikus távolságát (l. 99. §).

A hiperbolikus tér mozgásait az

$$x+iy,\quad x-iy,\quad x^2+y^2+z^2$$

változók lineáris tört transzformációval állíthatjuk elő. Lásd erre vonatkozóan Fricke és Klein-nek az irodalmi jegyzékben idézett művét.

102.7. A **100**.2 tételnek a τ *tartomány alkatára vonatkozó harmadik esetével* kell még foglalkoznunk. Ha a τ tartomány a projektív térből egy υ sík elhagyásával származik, akkor a $\mathbf{G}$ csoport minden leképezése az υ síkot önmagába viszi át. Az υ sík önmagára való kollineációi, melyeket a $\mathbf{G}$ csoport elemei származtatnak, egy $\mathbf{G}_0$ csoportot alkotnak s erre teljesül a következő feltétel : az υ sík tetszőleges P pontját s az ezen átmenő a irányított egyenesét egy tetszőleges P' pontjába s az ezen átmenő a' irányított egyenesébe a $\mathbf{G}_0$ csoportnak pontosan két leképezése viszi át. A **93**.6 tétel szerint a $\mathbf{G}_0$ csoport az υ síknak azokból a kollineációiból áll, amelyek υ-nak egy Ω_0 elliptikus polaritásával felcserélhetők. Ha υ-t végtelen távoli síknak s az Ω_0 polaritást abszolut polaritásnak vesszük fel, akkor azoknak a kollineációknak a csoportja, melyek az υ síkot önmagába viszik át, s ebben felcserélhetők az Ω_0 abszolut polaritással, az euklidesi tér hasonlósági csoportjával azonos. A megadott $\mathbf{G}$ *csoport az euklidesi tér kongruenciacsoportja,* mint könnyen belátható.

Jegyezzük meg végül, hogy a térben értelmezett *projektív mérték analitikus kifejezését* ugyanazok a képletek adják, mint a sík esetében, azzal a különbséggel, hogy az ottan alkalmazott háromváltozós négyzetes és bilineáris alakokat a tér koordinátáiból képezett, négyváltozós alakokkal kell helyettesíteni.

VIII. A projektív geometria axiómáiról.

Az előző fejezetekben foglalt tárgyalásunk célja az volt, hogy a valós projektív tér geometriáját részletesen kifejtsük, s a projektív geometriának más geometriákkal való kapcsolatát megvilágítsuk. Ebben a fejezetben a projektív geometria axiómáit fogjuk elemezni. Ismertetjük a projektív összetartozási axiómák különböző, alkalmas csoportosítását, amelyekkel az általunk felvett **P I** axiómák helyettesíthetők. Ennek során foglalkozunk azzal a kérdéssel is, mely projektív jellegű (azaz összetartozási) alaptételek alkalmazásával érhetjük el a rendezési axiómáknak a projektív geometriában mutatkozó hatását. Megvizsgáljuk továbbá néhány alapvető tételnek, úgymint a DESARGUES-féle tételnek, a PAPPUS- (vagy PASCAL-) féle tételnek s az ARCHIMEDES-féle axiómának a szerepét. Foglalkozunk végül a valós és a komplex projektív geometria topologiai jellemzésével.

103. §. A projektív geometria összetartozási axiómái.

103.1. A projektív geometria önálló (vagyis az euklidesi geometriától független) felépítése céljából alapfogalomnak a *pont*, *egyenes* és *sík* fogalmát s alapvető vonatkozásnak ezeknek az elemeknek *összetartozását* vesszük fel.

Az 1. §-ban a projektív geometria összetartozási axiómáit az euklidesi geometria tételeiből vezettük le. Ennek a tárgyalásnak megfelelő módon az egyenest és a síkot *pontok összességének* tekintettük. Az a kifejezés, hogy az A pont az a egyeneshez tartozik, azt jelenti, hogy az A pont az a egyenes pontjaiból álló összességhez (vagy osztályhoz) tartozik. Ennek a felfogásnak megfelelően az a kifejezés, hogy az a egyenes az α síkhoz tartozik, azt jelenti, hogy az a egyenes minden pontja az α síkhoz tartozik.

Ezzel a felfogásunkkal a szemléletünk által megszabott didaktikai céloknak akartunk megfelelni. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy eljárásunk nem felelt meg minden tekintetben a szigorúan axiomatikus tárgyalás követelményeinek. Szándékosan olyan bőségben vettük fel ugyanis az összetartozási axiómákat, hogy ne legyen szükséges egy, szemléletünknek magától értetődő (tehát axióma-jellegű) tételt egyik vagy másik ugyanolyan jellegű tételből levezetni. Ezt az eljárásunkat didaktikai szempontok indokolják. Viszont egy szigorúan axiomatikus felépítésben kezdettől fogva arra kell törekedni, hogy az axiómák egymástól függetlenek legyenek. Következő tárgyalásunkban ismertetjük, miként lehet ennek a követelménynek eleget tenni.

103.2. Vegyük fel alapfogalomnak a pont, egyenes és sík fogalmát s alapvető vonatkozásnak a *pont és egyenes*, a *pont és sík*, valamint az *egyenes és sík összetartozását;* az utóbbit tehát nem értelmezzük úgy, mint az 1. §-ban. E helyett a **P I** axiómacsoport **d** és **d′** axiómáit helyettesítjük a következő két axiómával :

$\mathbf{d}_0$) *Ha egy egyenes két pontja egy síkhoz tartozik, akkor az egyenes minden pontja ehhez a síkhoz tartozik.*

$\mathbf{d}_0'$) *Ha egy egyenesen átmenő két sík tartalmaz egy pontot, akkor minden, azon az egyenesen átmenő sík tartalmazza ezt a pontot.*

Ezeknek az axiómáknak, valamint a **P I** csoport többi axiómáinak alapján bebizonyítjuk, hogy az 1. §-ban adott értelmezés az egyedüli, amely összeegyeztethető a nevezett axiómákkal, vagyis hogy érvényes a következő tétel :

Ha az A pont az a egyeneshez s az a egyenes az α síkhoz tartozik, akkor az A pont az α síkhoz tartozik.

Bizonyítás. Az a egyenesnek van legalább egy, A-tól különböző B pontja (**b**). Az α síknak van legalább egy C pontja, amely nem tartozik az a egyeneshez (**c**). Az A, B, C pontokon átmegy egy, és csak egy α' sík (**e**). Az A, B pontokon átmegy egy és csak egy AB egyenes (**a**), ez tehát azonos a-val, s minden pontja az α' síkhoz tartozik ($\mathbf{d}_0$). Van a térben négy olyan A', B', C', D' pont, amely nem tartozik egy síkhoz (**h**). A négy pont közül legalább az egyik, például D', nem tartozik α'-höz ; D' nem tartozik az AB egyeneshez, különben az α' síkhoz tartoznék ($\mathbf{d}_0$). Mivel az A, B, D' pontok nem feküsznek egy egyenesen, meghatároznak egy β síkot (**e**) ; β különbözik α'-től, mert α' nem tartalmazza a D' pontot. Az $AB=a$ egyenesen átmenő α' és β sík tartalmazza az A pontot, tehát az a egyenesen átmenő bármely sík, így nevezetesen az α sík is tartalmazza az A pontot ($\mathbf{d}_0'$).

BIEBERBACH axiómarendszere.

103.3. A projektív geometria axiómáinak igen ügyes csoportosítását adta BIEBERBACH, mely megfelel a fenti szempontoknak. Eredetileg a következő axiómákat vezeti be :

1. *Ha az A pont az a egyeneshez s a az α síkhoz tartozik, akkor az A pont az α síkhoz tartozik.*

2. *Ha A és B két különböző pont, akkor van egy és csak egy AB egyenes, melyhez mindkét pont tartozik.*

2'. *Ha α és β két különböző sík, akkor van egy és csak egy αβ egyenes, mely mindkét síkhoz tartozik.*

3. *Ha az a egyenes két pontja az α síkhoz tartozik, akkor az a egyenes az α síkhoz tartozik.*

3'. *Ha az a egyenesen átmenő két sík tartalmazza az A pontot, akkor az a egyenes tartalmazza az A pontot.*

4. *Van legalább egy egyenes.*

5. *Egy síkhoz tartozó bármely két egyenesnek van legalább egy közös pontja* (azaz olyan pont, amely mindkét egyeneshez tartozik).

5'. *Egy ponton átmenő bármely két egyenesnek van legalább egy közös síkja* (azaz olyan sík, amelyhez mindkét egyenes tartozik).

6. *Minden egyeneshez legalább három pont tartozik.*

6'. *Minden egyenes legalább három síkhoz tartozik.*

7. *Nem fekszik az összes pont egy síkban.*

7'. *Nem megy az összes sík egy ponton át.*

A fenti axiómákban érvényesül a *dualitás elve;* az **1** axiómában szimmetrikusan szerepel a pont és a sík fogalma ; a **2** és **2'** stb. axiómák duálisan egymásnak felelnek meg, vagyis a **2** axiómából a **2'** axiómát a pont és a sík szerepének felcserélésével kapjuk.

A fenti axiómák *nem függetlenek* egymástól, azaz tartalmaznak felesleges adatokat. Ha az axiómák közül kettőt vagy többet egyesítünk, olyan módon, hogy az eredetivel *egyenlőértékű axiómarendszer*hez jussunk (amelynek axiómáit az eredeti axiómákból levezethetjük, és megfordítva), rejtve akkor is megmaradhatnak az eredeti axiómákban foglalt felesleges adatok. Viszont ezzel az átalakítással elérhetjük azt, hogy az új rendszer axiómái egymástól függetlenek legyenek. BIEBERBACH ilyen átalakítást végez a fenti axiómarendszeren, mégpedig úgy, hogy a **3** és **3'** axiómák helyett a **3''**-vel, s a **6, 6', 7, 7'** axiómák helyett a **6''**-vel jelölt következő axiómákat vezeti be :

3''. *Ha A és B két különböző pont, s α és β két különböző sík, s ha* *az A pont α-hoz és β-hoz, s a B pont α-hoz és β-hoz tartozik, akkor az AB egyenes a két sík közös $\alpha\beta$ egyenesével azonos.*

6″. *Minden egyenesnek van legalább három, páronkint torz metszője.*

Két egyenest *metsző*nek nevezünk, ha van közös pontjuk és közös síkjuk; két egyenest *torz*nak nevezünk, ha nincs közös pontjuk, sem közös síkjuk. (Mindkét értelmezésben a két feltétel közül az egyik következik a másikból az **5** és **5′** axióma alapján.)

Ezek az újabb axiómák is egyszerűek és szemléletesek. Mind a **3″**, mind a **6″** axióma önmagának duálisa.

103.4. A fenti két axiómarendszer aequivalenciáját a következő tárgyalással igazoljuk, melynek során levezetjük az 1. §-ban adott **P I** axiómacsoport axiómáit is.

A **P I** axiómacsoport **a**, **a′**, **b**, **b′**, **d**, **d′** axiómái sorban megegyeznek a **2**, **2′**, **6**, **6′**, **3**, **3′** axiómákkal. A **g** és a **g′** axióma a **2** és **5**, illetve a **2′** és **5′** axiómából közvetlenül következik.

e) *Bármely három, nem egy egyenesen fekvő pont egy és csak egy síkhoz tartozik.* Legyen ugyanis A, B, C három, nem egy egyenesen fekvő pont; az A, B pontok egy AB egyeneshez, az A, C pontok egy AC egyeneshez tartoznak (**2**), s feltevésünk folytán az AB és az AC egyenes nem azonos egymással, mert különben ehhez az egyeneshez tartoznék az A, B és a C pont. Az AB és AC egyenesnek közös pontja A, tehát ez a két egyenes legalább egy α síkhoz tartozik (**5′**). Mivel az A és a B pont az AB egyeneshez, s ez az egyenes az α síkhoz tartozik, ezért az A és a B pont az α síkhoz tartozik (**1**); ugyanúgy a C pont is. Az A, B és C pontok nem tartozhatnak egy, α-tól különböző α' síkhoz; különben az α és az α' síknak két közös egyenese volna: AB és AC, ellentétben a **2′** axiómával.

Az **e′** axióma ebből a dualitás elve alapján következik.

f) *Egy egyenes és egy hozzá nem tartozó pont egy és csak egy síkhoz tartozik.* Legyen a egy egyenes, A, B ennek két különböző pontja (**6**). Ha C az a egyeneshez nem tartozó pont, akkor az egymástól különböző A, C pontok egy és csak egy AC egyeneshez tartoznak (**2**), s ez különbözik az $AB=a$ egyenestől. Az AB és AC egyenesek, amelyeknek közös pontja A, egy és csak egy α síkhoz tartoznak, s ez tartalmazza a C pontot (lásd az **e** axióma fenti bizonyítását).

Az **f′** axióma ebből a dualitás elve alapján következik.

h) *Van legalább négy pont, mely nem tartozik egy síkhoz.* Van ugyanis legalább egy a egyenes (**4**), s ezen átmegy legalább két β és γ sík (**6′**).

Legyen A az a egyenes valamely pontja (**6**). Nem megy az összes sík az A ponton át (**7'**), van tehát legalább egy olyan α sík, amely nem tartalmazza az A pontot. Az a egyenes nem tartozik az α síkhoz (**1**); az a egyenesnek az α síkkal egy és csak egy B közös pontja van (az **f'** axióma folytán, melyet már igazoltunk). A β és γ síknak az α síkkal egy-egy b és c közös egyenese van (**2'**). A b és c egyenesnek közös pontja B; a B pont ugyanis az a egyeneshez, a a β síkhoz, tehát B a β síkhoz, s ugyanúgy a γ síkhoz tartozik (**1**). A b egyenes az α és β síkhoz tartozik. Mivel a b egyenes s egy hozzá nem tartozó pont egy és csak egy síkhoz tartozik (**f**), a b egyenes és a B pont pedig két különböző síkhoz, t. i. α-hoz és β-hoz, ezért a B pont a b egyeneshez tartozik. Hasonlóan B a c egyeneshez tartozik. A b és a c egyenesnek van legalább egy-egy, B-től különböző C és D pontja (**6**). Az A, B, C, D pontok nem feküsznek egy síkban; a B, C, D pontok ugyanis nem feküsznek egy egyenesen, mivel BC és BD különböző egyenesek; ez a három pont meghatároz egy és csak egy síkot (**e**), ez az α sík, amely nem tartalmazza az A pontot.

Megjegyzés. Az A, B, C, D pontok közül, amelyek nem tartoznak egy síkhoz, bármely három nem tartozik egy egyeneshez. Ha például A, B, C egy a egyeneshez tartozik, s ha a D pont is ehhez az egyeneshez tartozik, akkor az a egyenesen átmegy legalább egy α sík (**6'**), s ehhez a síkhoz tartozik az A, B, C, D pont (**1**). Ha pedig a D pont nem tartozik az A, B, C pontokat tartalmazó a egyeneshez, akkor van egy és csak egy α sík, amelyhez az a egyenes és a D pont tartozik (**f**), s ehhez a síkhoz tartozik az A, B, C, D pont (**1**).

A **h'** axióma a fentiből a dualitás elve alapján következik.

c) *Bármely síkhoz tartozik három, nem egy egyenesen fekvő pont.* Legyen α tetszőleges sík, s legyen A, B, C, D négy olyan pont, mely nem tartozik egy síkhoz (**h**). Ha a négy pont közül három az α síkhoz tartozik, akkor ez az α síknak három, nem egy egyeneshez tartozó pontja, fenti megjegyzésünk szerint. Ha az A és a B pont nem tartozik az α síkhoz, akkor jelöljük β-val azt a síkot, amelyhez az A, C, D pontok tartoznak (**e**), s b-vel az α és a β sík közös egyenesét (**2'**), továbbá E-vel az AB egyenesnek az α síkkal közös pontját (**f'**). Az E pont nem tartozik a b egyeneshez, különben a β síkhoz tartoznék (**1**), s az AE egyenes A és E pontjával együtt ennek az egyenesnek B pontja is a β síkhoz tartoznék (**3** és **1**), holott feltevésünk szerint az A, B, C, D pontok nem tartoznak egy síkhoz. A b egyenesnek van legalább két

F és G pontja (**6**). Az E, F, G pontok az α síkhoz tartoznak (**1**), de mint igazoltuk, nem tartoznak egy egyeneshez.

A **c'** axióma a fentiből a dualitás elve szerint következik.

A **3"** axióma bizonyítása. Ha A és B két különböző pont, akkor van egy és csak egy AB egyenes, amelyhez mindkét pont tartozik (**2**). Mivel az AB egyenes A és B pontja az α síkhoz tartozik, tehát az AB egyenes is az α síkhoz tartozik (**3**) ; hasonlóan, az AB egyenes a β síkhoz is tartozik. Mivel az egymástól különböző α és β síkhoz egy és csak egy egyenes tartozik (**2'**), ez az egyenes azonos AB-vel.

A **6"** axióma bizonyítása. A **6** axióma szerint van az a egyenesnek legalább három B, C, D pontja, s a **6'** axióma szerint az a egyenesen legalább három β, γ, δ sík megy át. A fent bebizonyított **c** axióma szerint van a β síkban legalább egy olyan B' pont, amely nem tartozik az a egyeneshez ; hasonlóan, van a γ és a δ síkban egy-egy olyan C' és D' pont, amely nem tartozik a-hoz. A $b=BB'$, $c=CC'$, $d=DD'$ egyeneseknek a-val közös pontja rendre B, C és D. A b és a c egyenesnek nincs közös pontja, ellenkező esetben egy ε síkhoz tartoznának (**5'**) ; a b egyenes B pontja s a c egyenes C pontja az ε síkhoz tartozik (**1**) s ezért az $a=BC$ egyenes is ε-hoz tartozik (**3**). Az a egyenes s a hozzá nem tartozó B' pont egy és csak egy síkhoz tartozik (**f**), ezért az ε sík azonos volna β-val. Hasonlóan, az a egyenes s a hozzá nem tartozó C' pont egy és csak egy síkhoz tartozik s ezért ε azonos volna γ-val ; ebből következnék, hogy a β és γ sík azonos, feltevésünkkel ellentétben. E szerint b, c és d az a egyenesnek három, páronkint torz metszője.

Ezzel igazoltuk, hogy *az* **1**, **2**, **2'**, **3**, **3'**, **4**, **5**, **5'**, **6**, **6'**, **7**, **7'** *axiómákból levezethető a* **3"** *és a* **6"** *axióma, továbbá a* **P I** *axiómacsoport valamennyi axiómája.*

Megfordítva, *a* **P I** *axiómákból levezethetők az* **1**, **2**, **2'**, **3**, **3'**, **4**, **5**, **5'** **6**, **6'**, **7**, **7'** *axiómák, s az* **1**, **2**, **2'**, **3"**, **4**, **5**, **5'**, **6"** *axiómákból levezethetők a* **3**, **3'**, **6**, **6'**, **7**, **7'** *axiómák.* Ezeknek az állításoknak igazolását az olvasóra bízzuk.

103.5. Az axiómarendszer függetlensége.

Az axiómarendszerekre vonatkozó elvi követelményeket az első kötet bevezetésében ismertettük. Ezek közül az a követelmény, hogy az axiómarendszer *ellenmondástól mentes* legyen, nyilván teljesül a projektív geometria összetartozási axiómáiból álló rendszerre vonatkozóan ; a rendszer megvalósítható ugyanis analitikusan, például a valós vagy a komplex projektív tér geometriájában, sőt még véges sok elemből álló rendszerben is (lásd később). Az összetartozási axiómák csoportja nem alkot teljes rendszert, mivel több, egymással nem izomorf megvalósítása létezik, például a valós projektív térgeometria és egy, véges sok pontból, egyenesből és síkból álló térgeometria.

Mint fent megjegyeztük, a Bieberbach-féle **1**, **2**, **2'**, **3''**, **4**, **5**, **5'**, **6''** axiómák *függetlenek* egymástól. Ennek az állításnak igazolása úgy történik, hogy megszerkesztünk egy-egy olyan mesterséges geometriát vagy modellt, amelyben a nevezett axiómák *egy axióma kivételével* teljesülnek. Bieberbach a nevezett axiómák függetlenségének igazolására a következő modelleket adta meg.

1. Pontoknak és egyeneseknek nevezzük a valós projektív tér pontjait és egyeneseit, síkokon értjük a valós projektív tér sugárnyalábjait. Az az állítás, hogy a P pont az e egyenesen fekszik, jelentse ugyanazt, mint közönségesen ; az e egyenes, illetve a P pont értelmezés szerint az ε síkhoz tartozik, ha közönséges értelemben az e egyenes az ε sugárnyalábhoz tartozik, illetve P annak középpontjával egybeesik. Az ilyen módon értelmezett geometriában nem érvényes az **1** axióma. Legyen ugyanis P és Q két különböző pont, jelentse e a PQ egyenest, és ε sík a Q középpontú sugárnyalábot. Az adott értelmezések szerint a P pont az e egyeneshez, s e az ε síkhoz tartozik, de P nem tartozik ε-hoz. A **2** és **2'** axióma nyilván érvényes. A **3''** axióma is érvényes, a következő okból : *ennek az axiómának feltételei nem teljesülhetnek a megadott modellben*, mivel nincs két különböző A és B pont, amely ugyanahhoz az ε síkhoz tartozik (vagyis ugyanannak a sugárnyalábnak a középpontja). A **4**, **5**, **5'**, **6''** axiómák ugyancsak teljesülnek.

2. Egyeneseken és síkokon értjük a valós projektív tér egyeneseit és síkjait ; pontoknak nevezzük a valós projektív tér pontjait s ezeken kívül még egy O pontot ; az O pont nem fekszik egy egyenesen sem, egy síkban sem. Az O pont s egy tőle különböző P pont nem határoz meg olyan egyenest, amelyhez ez a két pont tartozik. E szerint a **2** axióma nem teljesül, de a többi axióma érvényes, mint könnyen belátható. A **2'** axióma függetlenségét az előbbi modell duálisa igazolja.

3''. Pontoknak és egyeneseknek nevezzük a valós projektív tér pontjait és egyeneseit. Síkokon értjük a valós projektív tér síkjait egy ε sík kivételével ; az ε síkhoz hozzávesszük egy, a térben fekvő

γ gömböt s ε' síkon értjük az ε és γ egyesítéséből származó alakzatot. Az **1** és **2** axiómák nyilván teljesülnek ; a **2**$'$ axióma is ; ha ugyanis α és β két, ε'-től különböző sík, akkor nyilván egy és csak egy közös $\alpha\beta$ egyenesük van ; ha pedig α különbözik ε'-től, akkor α-nak és ε'-nek egy és csak egy közös $\alpha\varepsilon'$ egyenese van, t. i. az $\alpha\varepsilon$ egyenes. A **3**$''$ axióma nem teljesül ; legyen ugyanis A a γ gömb valamely, ε-hoz nem tartozó pontja, α az A ponton átmenő, tetszőleges sík, továbbá B az α és az ε sík valamely közös pontja ; az A, B pontok az α és ε' síkoknak közös pontjai, de az AB egyenes nem azonos az α és ε' síkok metszésvonalával, hiszen nem tartozik az ε' síkhoz.

4. Abban a geometriában, mely egy pontból áll, nincsenek sem egyenesek, sem síkok, tehát a **4** axióma nem teljesül. A többi axióma érvényes, mivel feltételei nem valósíthatók meg.

5. Legyen γ egy gömbfelület a valós projektív térben ; pontokon értjük a térnek γ külsejében fekvő pontjait ; az egyeneseknek és síkoknak, valamint az elemek összetartozásának értelmezése ugyanaz, mint közönségesen. Ha két metsző egyenes metszéspontja a közönséges értelemben a γ gömb belsejéhez tartozik, akkor, mivel γ belsejének pontjai nem pontjai a modellnek, ezért az egy síkban fekvő két egyenesnek a mesterséges geometriában nincs közös pontja, az **5** axióma tehát nem teljesül. A többi axióma viszont érvényes. Az **5**$'$ axióma függetlenségét az előbbi példának duálisa igazolja.

6$''$. Pontokon, egyeneseken, síkokon értjük egy tetraéder csúcsait, éleit és lapjait. Az összes axióma teljesül, **6**$''$-t kivéve. Másik példa ugyanerre a sík projektív geometriája.

103.6. Véges projektív geometria.

Fent már említettük, hogy a projektív térgeometria összetartozási axiómái megvalósíthatók véges sok pontból, egyenesből és síkból álló rendszerrel is. Egy ilyen értelemben véges projektív geometria példája a következő.

Ponton értünk minden olyan (x_1, x_2, x_3, x_4) számnégyest, melyben minden x_i vagy 0, vagy 1, de nem mind a négy 0 ; összesen 15 ilyen pont van. Síkon értünk minden olyan (u_1, u_2, u_3, u_4) számnégyest, melyben minden u_i vagy 0, vagy 1, de nem mind a négy 0. Az előbbit röviden x pontnak, az utóbbit u síknak nevezzük. Az x pont és az u sík értelmezés szerint akkor és csak akkor egyesített helyzetű, ha

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 \equiv 0 \pmod 2,$$

vagyis, ha a baloldalon álló számérték páros. Legyen x és y két különböző pont; a z pont értelmezés szerint akkor és csak akkor tartozik az x, y pontok által meghatározott egyeneshez, ha

$$z_i \equiv x_i + y_i \pmod 2 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Ebben az esetben az x, y, z pontok közül mindegyik a másik kettő által meghatározott egyeneshez tartozik; a fenti feltétel felírható ugyanis a három pontra vonatkozóan szimmetrikus, következő alakban is:

$$x_i + y_i + z_i \equiv 0 \pmod 2 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Egy egyenes akkor tartozik valamely síkhoz, ha minden pontja a síkhoz tartozik.

Az értelmezésből következik, hogy minden egyenesen három pont van s minden egyenesen három sík megy át. A 15 pontból 105 pontpárt alkothatunk, ezek közül mindegyik egy-egy egyenest határoz meg; de egy egyenes három pontjából alkotható három pontpár ugyanazt az egyenest határozza meg, s ezért a különböző egyenesek száma $\frac{105}{3} = 35$. A síkok száma, mint a pontoké, 15. Minden ponton 7 egyenes megy át; egy pontot a többi tizennéggyel összekötő egyenesek közül ugyanis kettő-kettő azonos, mivel egy egyenesen három pont fekszik. Hasonlóképpen minden ponton 7 sík megy át. Másrészt minden síkban 7 pont és 7 egyenes fekszik.

A pontok, egyenesek és síkok összetartozásának könnyebb áttekintése céljából jelöljük a, b, c, d, e-vel azokat a pontokat, melyeknek koordinátái rendre:

$$(1000), \quad (0100), \quad (0010), \quad (0001), \quad (1111).$$

A többi 10 pont koordinátáit ezekből mod 2 összeadással, vagyis úgy kapjuk, hogy az 5 pont közül bármely kettőnek megfelelő koordinátáit összeadjuk s az összegeket a 2 modulus szerint 0-ra, vagy 1-re redukáljuk (nevezetesen az összegben fellépő 2-eseket 0-val helyettesítjük). Például az a és b pontok koordinátáiból mod 2 összeadással adódik az (1100) koordinátájú pont, amelyet ab-vel jelölünk.

Jelentse x, y, z, t, s az a, b, c, d, e pontokat tetszőleges sorrendben. Az

$$x, \quad y, \quad xy$$

pontok egy egyenesen feküsznek; 10 ilyen típusú egyenes van. Ugyancsak egy egyenesen feküsznek az

$$xy,\ yz,\ zx$$

pontok ; ilyen típusú egyenes is 10 van. Végül egy egyenesen feküsznek az

$$x,\ yz,\ ts$$

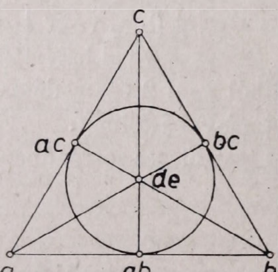
pontok ; 15 ilyen típusú egyenes van.

A 15 síkban a pontok elhelyezkedését a következő táblázat tünteti fel, amelynek egy sorában álló pontok egy síkhoz tartoznak ; jobboldalt megadtuk a síkok (u_1, u_2, u_3, u_4) koordinátáit.

a	*b*	*c*	*ab*	*ac*	*bc*	*de*	(0001)
a	*b*	*d*	*ab*	*ad*	*bd*	*ce*	(0010)
a	*c*	*d*	*ac*	*ad*	*cd*	*be*	(0100)
b	*c*	*d*	*bc*	*bd*	*cd*	*ae*	(1000)
a	*b*	*e*	*ab*	*ae*	*be*	*cd*	(0011)
a	*c*	*e*	*ac*	*ae*	*ce*	*bd*	(0101)
a	*d*	*e*	*ad*	*ae*	*de*	*bc*	(0110)
b	*c*	*e*	*bc*	*be*	*ce*	*ad*	(1001)
b	*d*	*e*	*bd*	*be*	*de*	*ac*	(1010)
c	*d*	*e*	*cd*	*ce*	*de*	*ab*	(1100)
a	*bc*	*bd*	*cd*	*be*	*ce*	*de*	(0111)
b	*ac*	*ad*	*cd*	*ae*	*ce*	*de*	(1011)
c	*ab*	*od*	*bd*	*ae*	*be*	*de*	(1101)
d	*ab*	*ac*	*bc*	*ae*	*be*	*ce*	(1110)
e	*ab*	*ac*	*ad*	*bc*	*bd*	*cd*	(1111).

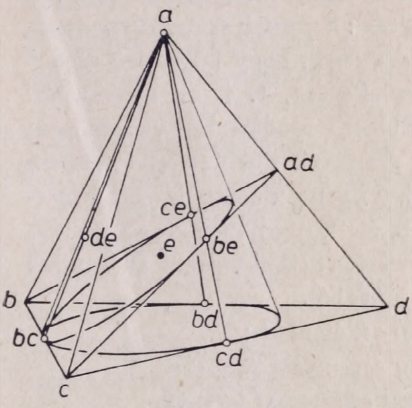
A fenti táblázatok teljes képet nyujtanak az értelmezett, véges projektív geometriáról ; segítségükkel könnyen belátható, hogy a projektív térgeometria összetartozási axiómái teljesülnek.

A közönséges térben ezt a modellt következőképpen ábrázolhatjuk. Felveszünk egy szabályos tetraédert, ennek csúcsait jelöljük *a, b, c, d*-vel, középpontját *e*-vel. Az *a, b, c, d* csúccsal átellenes lap középpontját jelöljük *ae, be, ce, de*-vel ; az *(a, b)* él középpontját *ab*-vel stb. A fenti felsorolásnak megfelelően a modell első négy síkját a tetraéder lapjai ábrázolják. A tetraéder egy lapján, például az *(a, b, c)* lapon a modell 7 egyenese fekszik, ezek az *(a, b, c)* háromszög oldalai és közép-

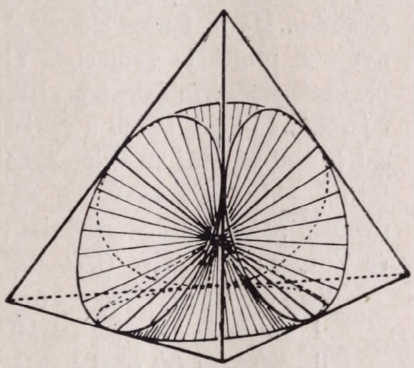


147. ábra.

vonalai, továbbá egy egyenes, amely az (a, b, c) háromszög oldalainak középpontján megy át; az utóbbit a 147. ábrán a háromszögbe írt körrel ábrázoljuk. (Jegyezzük meg, hogy a körnek s a háromszög középvonalainak nincs a háromszög belsejében közös pontja, vagyis, hogy ezeknek közönséges értelemben létező metszéspontjai nem pontjai a modellnek). A modell következő 6 síkját a tetraéder középsíkjai ábrázolják, vagyis a tetraéder egy-egy élén s az átellenes él középpontján átmenő síkok; további négy síkját azok a kúpfelületek, melyek a tetraéder egy-egy lapjába írt kört az átellenes csúcsból vetítik. Az a csúccsal bíró kúpfelületnek a (b, c) élen átmenő középsíkkal való metszésvonala ábrázolja a modell bc, be, ce pontjain



148. ábra.



149. ábra.

átmenő egyenesét (148. ábra). A 15-ödik sík ábrázolására kössük össze az e középpontot s a tetraéderlapokba írt körök pontjait egyenes szakaszokkal; az ilyen módon keletkező négy kúpfelület ábrázolja a 15-ödik síkot (149. ábra); ezen fekszik a négy körön kívül, az a három egyenes, amely a tetraéder két-két átellenes élének középpontját köti össze, például: ab, cd, e.

103.7. Megjegyzés. A tetraéder egy lapján, például az (a, b, c) lapon az a, b, c, de pontok egy teljes négyszögnek a csúcsai; az (a, b, c) háromszög oldalai és középvonalai ennek a teljes négyszögnek az oldalai, átlóspontjai pedig az ab, bc, ca élközéppontok; az utóbbiak is egy egyenesen feküsznek. Ebből következik:

A projektív térgeometria összetartozási axiómáiból nem vezethető le a 7.2 *tétel, amely szerint egy teljes négyszög három átlóspontja nem fekszik egy egyenesen.*

A 7.2 tételt a **P I** és **II** axiómacsoportból, vagyis az összetartozási és rendezési axiómákból vezettük le.

104. §. Az összetartozási axiómák bővített csoportja.

A VEBLEN-féle axiómarendszer.

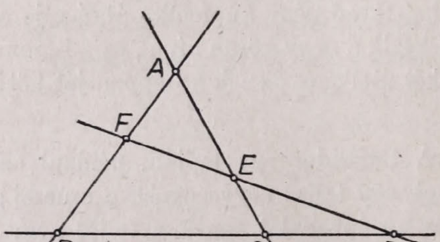
104.1. A projektív geometria összetartozási axiómáinak igen gondos elemzését s összeállítását adták az olasz geometriai iskola vizsgálatai (PEANO, PIERI, FANO és mások). Az általuk felvett axiómarendszereknek nagy előnye az, hogy kevés alapfogalomra vonatkoznak s egyszerű és kevés axiómából állanak. Elemek: a *pontok* és *egyenesek,* alapvető vonatkozás: a *pontok és egyenesek összetartozása.* Másik fontos előnye a rendszernek, hogy közvetlen módot nyujt a projektív geometria általánosítására, t. i. az *n-dimenziós projektív geometria* megalapozására. Ebben a rendszerben viszont nem fejeződik ki közvetlenül a projektív geometria dualitási elve, hanem azt le kell vezetni az axiómákból. Egy ilyen axiómarendszert ismertetünk ebben a szakaszban VEBLEN és YOUNG kitűnő tárgyalása nyomán; a következő tárgyalást változtatás nélkül vesszük át VEBLEN és YOUNG: Projective Geometry c. művéből.

Vegyük fel egyelőre a következő axiómákat:

i. *Bármely két pont legalább egy egyeneshez tartozik.*

ii. *Bármely két pont legfeljebb egy egyeneshez tartozik.*

iii. *Ha az A, B, C pontok nem tartoznak egy egyeneshez, s ha D és E olyan pontok, hogy B, C, D egy egyeneshez, és C, A, E egy egyeneshez tartoznak, akkor van olyan F pont, hogy az A, B, F pontok egy egyeneshez, s a D, E, F pontok egy egyeneshez tartoznak* (150. ábra).



150. ábra.

Az első két axiómából közvetlenül következik, hogy *két különböző pont egy és csak egy egyeneshez tartozik.* Az A, B pontok által meghatározott egyenest AB *egyenes*nek nevezzük. Ugyancsak az első két axiómából következik, hogy *ha C és D az AB egyenes két különböző pontja, akkor A és B a CD*

egyeneshez tartozik. Továbbá a **ii** axióma folytán *két különböző egyenesnek legfeljebb egy közös pontja van.*

Az **i**, **ii** axiómák alapján a **iii** axiómát a következő egyszerűbb alakban mondhatjuk ki:

Ha A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok, akkor a BC egyenes bármely D pontját a CA egyenes bármely, D-től különböző E pontjával összekötő DE egyenesnek van az AB egyenessel egy F közös pontja.

Értelmezés. Ha P, Q, R három, nem egy egyenesen fekvő pont, és l a Q és R pontokat összekötő egyenes, akkor azoknak a pontoknak az összességét, amelyek a P pontot az l egyenes pontjaival összekötő egyeneseken feküsznek, *a P pont és az l egyenes által meghatározott sík*nak nevezzük.

104.2. Tétel. *Ha A és B egy α sík két pontja, akkor az AB egyenes minden pontja az α síkhoz tartozik.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az α síkot a P pont és az l egyenes határozza meg. Ha az A, B pontok mindketten az l egyenesen feküsznek, vagy ha az AB egyenes átmegy a P ponton, akkor a tétel állítása az értelmezésből közvetlenül következik. Ha A az l egyenesen fekszik, de B nem, s ha az AB egyenes nem tartalmazza a P pontot, akkor, mivel B az α síkban fekszik, az értelmezés szerint van l-nek olyan B' pontja, mely a B és P pontokkal egy egyenesen fekszik. Ha C az AB egyenes tetszőleges pontja, akkor a CP egyenesnek van az $l=AB'$ egyenessel egy Q közös pontja (**iii**), tehát C az α síkhoz tartozik. Végül, ha sem A, sem B nem tartozik az l egyeneshez, s az AB egyenes sem megy át a P ponton, akkor, mert A és B az α sík pontjai, az értelmezés szerint van az l egyenesnek két olyan A' és B' pontja, hogy A, A' és P egy egyenesen, s ugyancsak B, B' és P egy egyenesen feküsznek. Az $A'P$ egyenes A pontját a PB' egyenes B pontjával összekötő AB egyenesnek van a $B'A'$ egyenessel egy Q közös pontja (**iii**). Ezért az $AB=AQ$ egyenes minden pontja az α síkhoz tartozik az előbbi esetnek megfelelően.

Értelmezés. Egy egyenesről akkor mondjuk, hogy *az α síkhoz tartozik,* ha az egyenes minden pontja az α síkhoz tartozik.

A fenti három axiómán kívül felvesszük még a következőt:

iv. *Minden egyeneshez legalább három pont tartozik.*

Az **i**—**iv** axiómák alapján bebizonyítjuk a következő tételt:

104.3. Tétel. *Bármely két egyenesnek, mely ugyanahhoz a síkhoz tartozik, van közös pontja.*

B i z o n y í t á s. Legyen α a P pont és az l egyenes által meghatározott sík, és legyen a és b az α síkhoz tartozó két egyenes.

Ha az a, b egyenesek közül az egyik, például a az l egyenessel azonos, s ha a b egyenes tartalmazza a P pontot, akkor a b egyenes bármely, P-től különböző B pontja (**iv**) P-vel s az $l=a$ egyenes valamely pontjával egy egyeneshez tartozik ; az utóbbi pont a-nak és b-nek közös pontja. Ha a P pont nem tartozik a b egyeneshez, akkor **iv** szerint van b-n két olyan A és B pont, amely nem tartozik l-hez, s mivel ezek az α sík pontjai, van az l egyenesnek két olyan A' és B' pontja, hogy A, A', P egy egyenesen, s ugyancsak B, B', P egy egyenesen feküsznek. Az $A'P$ egyenes A pontját a PB' egyenes B pontjával összekötő AB egyenesnek van az $A'B'$ egyenessel egy R közös pontja (**iii**), vagyis az $l=a$ és a b egyenesnek közös pontja R. E szerint *minden, az α síkban fekvő egyenesnek van l-lel közös pontja.*

Tegyük fel, hogy az a és a b egyenes különbözik l-től. Ha az a egyenes tartalmazza a P pontot, akkor a P pontot a b egyenes tetszőleges B pontjával (**iv**) összekötő PB egyenesnek van az l egyenessel egy B' közös pontja. Az előbbi bekezdés szerint pedig az a és a b egyenesnek is van l-lel egy A', illetve R közös pontja. Mivel az $a=A'P$ egyenes tartalmazza az RB' egyenes A' pontját s a $B'B$ egyenes P pontját, ezért az a egyenesnek van a $b=BR$ egyenessel egy közös A pontja (**iii**). Ebből következik, hogy az α sík bármely, a P ponton átmenő egyenesének van az α sík bármely más egyenesével közös pontja. Ha az a és b egyenesek közül egyik sem tartalmazza a P pontot, akkor, mint fent, az a és a b egyenesnek van l-lel egy-egy Q és R közös pontja. Legyen B' az l egyenesnek egy, Q-tól és R-től különböző pontja (**iv**). A PB' egyenesnek van az a és a b egyenessel egy A, illetve B közös pontja az előbbi eset szerint. Ha A egybeesik B-vel, ez a-nak és b-nek közös pontja. Ha A különbözik B-től, akkor a b egyenesnek van a QB' egyenessel egy R közös pontja, s a $B'A$ egyenessel egy B közös pontja ; ebből következik, hogy a b egyenesnek van az $a=AQ$ egyenessel is közös pontja (**iii**).

104.4. T é t e l. *A P pont és az l egyenes által meghatározott α sík azonos a Q pont és az m egyenes által meghatározott β síkkal, ha a Q pont és az m egyenes az α síkhoz tartozik.*

B i z o n y í t á s. A β sík bármely pontja a Q pont és az m egyenes valamely A pontja által meghatározott AQ egyenesen fekszik.

Mivel az A és a Q pont az α síkhoz tartozik, az AQ egyenes minden pontja az α síkhoz tartozik (**104**.2). E szerint a β sík minden pontja az α síkhoz tartozik. Viszont, ha B az α sík tetszőleges, Q-tól különböző pontja, akkor a BQ egyenes metszi az m egyenest egy pontban (**104**.3), tehát az α sík minden pontja a β síkhoz tartozik.

Ennek a tételnek korolláriuma a következő:

104.5. Tétel. *Három, nem egy egyenesen fekvő pont, továbbá egy egyenes és egy hozzá nem tartozó pont, végül két metsző egyenes egy és csak egy síkhoz tartozik.*

Az A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok által meghatározott síkot ABC *sík*nak nevezzük.

A **104**.2 és 5 tételből következik:

104.6. Tétel. *Ha A és B két különböző pont, s α és β két különböző sík, s ha az A és B pont az α és a β síkhoz tartozik, akkor az AB egyenes minden pontja az α és a β síkhoz tartozik, de a két síknak nincs az AB egyenes pontjain kívül más közös pontja.*

Ennek korolláriuma a következő:

104.7. Tétel. *Két különböző síknak legfeljebb egy közös egyenese van.*

Értelmezés. Ha P, Q, R, T nem egy síkhoz tartozó négy pont, s ha π a Q, R, T pontokat tartalmazó sík, akkor a P pont és a π sík által meghatározott *háromdimenziós S_3 tér*en azoknak a pontoknak összességét értjük, melyek a P pontot a π sík pontjaival összekötő egyeneseken feküsznek.

104.8. Tétel. *Ha A és B az S_3 tér két különböző pontja, akkor az AB egyenes (azaz ennek minden pontja) az S_3 térhez tartozik.*

Bizonyítás. Legyen S_3 a P pont és a π sík által meghatározott háromdimenziós tér.

1. Ha A és B a π síkhoz tartozik, akkor a tétel a **104**.2 tételből közvetlenül következik.

2. Ha az AB egyenes tartalmazza a P pontot, akkor a tétel állítása nyilvánvaló.

3. Tegyük fel, hogy A a π síkhoz tartozik, de B nem, s az AB egyenes nem tartalmazza a P pontot. Ebben az esetben az értelmezés folytán van a π síknak egy, A-tól különböző B' pontja, amely a BP egyenesen fekszik. Az AB egyenes tetszőleges M pontját a BB' egyenes P pontjával összekötő egyenesnek van a $B'A$ egyenessel egy M'

közös pontja (**iii**). Mivel az AB' egyenes M' pontja a π síkhoz tartozik, ezért az értelmezés szerint a PM' egyenes M pontja S_3-hoz tartozik.

4. Ha sem A, sem B nem tartozik π-hez, s ha az AB egyenes nem tartalmazza a P pontot, akkor a PA és a PB egyenes a π síkot két különböző A' és B' pontban metszi. Az $A'P$ egyenes A pontját a PB' egyenes B pontjával összekötő egyenesnek a **iii** axióma szerint van a $B'A'$ egyenessel egy C közös pontja. Mivel C a π síkhoz tartozik, ezzel ezt az esetet a megelőzőre vezettük vissza.

Jegyezzük meg, hogy a fenti bizonyításban csak az **i**, **ii**, **iii** axiómákat használtuk fel, **iv**-et nem.

A **104**.2 és 3 tételből és a **iv** axiómából adódik a következő:

104.9. Tétel. *Ha az l egyenes a P pont és a π sík által meghatározott S_3 térhez tartozik, de nem tartozik a π síkhoz, akkor az l egyenesnek a π síkkal egy és csak egy közös pontja van.*

104.10. Tétel. *Ha A, B, C az S_3 tér három, nem egy egyenesen fekvő pontja, akkor az ABC sík (azaz ennek minden pontja) S_3-hoz tartozik.*

Bizonyítás. Legyen S_3 a P pont és a π sík által meghatározott háromdimenziós tér. A BC egyenes minden pontja S_3-hoz tartozik (**104**.8) s az ABC sík bármely pontja az A pont és a BC egyenes valamely D pontja által meghatározott AD egyeneshez s ezért az S_3 térhez tartozik.

104.11. Tétel. *Ha α a P pont és a π sík által meghatározott S_3 tér π-től különböző síkja, akkor α-nak és π-nek egy és csak egy közös egyenese van.*

Bizonyítás. Legyen A, B, C az α sík három, nem egy egyenesen fekvő pontja, melyek közül A nem tartozik π-hez. Az AB és az AC egyenesnek van a π síkkal egy-egy közös B' és C' pontja (**104**.9), mely különbözik egymástól. Mivel B' és C' az α és a π sík két közös pontja, a **104**.6 tétel szerint α-nak és π-nek egy és csak egy közös egyenese van.

104.12. Tétel. *Ha az a egyenes és egy, a-t nem tartalmazó α sík az S_3 térhez tartozik, akkor a-nak és α-nak egy és csak egy közös pontja van.*

Bizonyítás. Legyen S_3 a P pont és a π sík által meghatározott tér. Ha α azonos π-vel, akkor a tétel állítása a **104**.9 tételből következik. Ha α különbözik π-től, akkor α-nak π-vel van egy közös

l egyenese (**104**.11). Legyen A az α sík tetszőleges, a-hoz nem tartozó pontja ; az A pont és az a egyenes által meghatározott β síknak van a π síkkal egy, l-től különböző m közös egyenese (**104**.11). A π síkban fekvő l és m egyenesnek van egy B közös pontja (**104**.3). Az AB egyenes a β síkhoz tartozik, metszi tehát a-t egy Q pontban (**104**.3), amely α-hoz tartozik, mivel AB α-hoz tartozik. Az a egyenesnek nincs az α síkkal Q-n kívül más közös pontja ; ellenkező esetben az a egyenes az α síkhoz tartoznék (**104**.2), feltevésünkkel ellenkezően.

104.13. Tétel. *Ha α és β két különböző sík, amely az S_3 térhez tartozik, akkor α-nak és β-nak egy és csak egy közös egyenese van.*

Bizonyítás. Legyen A, B, C az α sík három, nem egy egyenesen fekvő pontja, melyek közül A nem tartozik a β síkhoz. Az AB és az AC egyenesnek van a β síkkal egy-egy B' és C' közös pontja (**104**.12) s ezek különböznek egymástól. Mivel B' és C' az α és a β síknak két különböző közös pontja, a **104**.6 tétel szerint az α és a β síknak egy és csak egy közös egyenese van.

104.14. Tétel. *Ha két különböző síknak van egy közös egyenese, akkor van egy háromdimenziós S_3 tér, amelyhez mindkét sík tartozik.*

Bizonyítás. Ha α és β különböző síkok, s ezeknek közös egyenese l, akkor β-nak bármely, l-hez nem tartozó P pontja és az α sík meghatároz egy olyan S_3 teret, amely tartalmazza P-t és l-et, s ezért a β síkot is (**104**.10).

A **104**.9 és 13 tételből következik :

104.15. Tétel. *Ha az S_3 térhez tartozó három síknak nincs közös egyenese, akkor van egy és csak egy közös pontjuk.*

104.16. Tétel. *Ha α, β, γ az S_3 tér három síkja, amelynek nincs közös egyenese, s ha μ és ν két olyan sík, melyek közül μ tartalmazza a β és γ síkok metszésvonalát, s ν tartalmazza a γ és α síkok metszésvonalát, akkor van egy olyan λ sík, mely tartalmazza α és β metszésvonalát, valamint μ és ν metszésvonalát.*

Bizonyítás. A **104**.15 tétel szerint az α, β, γ síkoknak van egy és csak egy P közös pontja ; e három sík közül kettő-kettőnek metszésvonalát jelöljük $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$-val ; mindhárom egyenes tartalmazza a P pontot. A $\beta\gamma$ egyenesen átmenő μ és a $\gamma\alpha$ egyenesen átmenő ν síkoknak $\mu\nu$ metszésvonala tartalmazza a P pontot. P közös pontja a $\mu\nu$ és az $\alpha\beta$ egyenesnek, tehát ez a két egyenes egy λ síkhoz tartozik (**104**.5).

104.17. Tétel. *A P pont és a π sík által meghatározott S_3 tér azonos a P' pont és a π' sík által meghatározott S_3' térrel, feltéve, hogy π' és P' az S_3 térhez tartoznak.*

Bizonyítás. Az S_3' tér bármely A pontja a P' ponttal s a π' sík valamely A' pontjával egy egyenesen fekszik; mivel P' és A' az S_3 térhez tartoznak, az A pont is S_3-hoz tartozik (**104**.8). Tehát S_3' minden pontja S_3-hoz tartozik. Megfordítva, ha A az S_3 tér tetszőleges pontja, az AP' egyenesnek van a π' síkkal közös pontja (**104**.12). Ezért az S_3 tér minden pontja S_3'-höz tartozik.

Az utóbbi tétel korolláriuma a következő:

104.18. Tétel. *Négy tetszőleges olyan pont, amely nem tartozik egy síkhoz, továbbá egy sík és egy hozzá nem tartozó pont, vagy két torz egyenes meghatároz egy és csak egy háromdimenziós S_3 teret.*

A fenti előkészítő tárgyalás után a háromdimenziós tér projektív geometriáját az eddig felvett **i**—**iv** axiómákon kívül a következőkkel jellemezhetjük:

v. *Van legalább egy egyenes.*

vi. *Nem fekszik az összes pont egy egyenesen.*

vii. *Nem fekszik az összes pont egy síkban.*

viii. *Ha S_3 egy háromdimenziós tér, akkor az összes pont S_3-hoz tartozik.*

A **iv**—**vii** axiómákat a *kiterjesztés* axiómáinak, **viii**-at a *lezárás* axiómájának nevezzük.

Ezekből levezethetjük a következő tételeket:

104.19. Tétel. *Minden ponton átmegy legalább három, egy síkban fekvő egyenes.*

104.20. Tétel. *Minden egyenesen átmegy legalább három különböző sík.*

104.21. Tétel. *Nem megy át minden sík ugyanazon az egyenesen.*

104.22. Tétel. *Nem megy át minden sík ugyanazon a ponton.*

104.23. Tétel. *Ha S_3 egy háromdimenziós tér, akkor minden sík S_3-hoz tartozik.*

Azok a tételek, amelyeket az **i**—**iv** axiómákból vezettünk le, feltételes jelentésűek ; például a **104**.2 tétel azt jelenti, hogy *ha van egy sík, s ha van ennek két pontja, akkor a két pont által az* **i**, **ii** *axiómák szerint meghatározott egyenes minden pontja ehhez a síkhoz tartozik*. De ezekből az axiómákból nem következik egyetlen pont, egyenes vagy sík létezése sem. Az **v** axióma biztosítja, hogy van legalább egy egyenes, és **iv** szerint ezen az egyenesen van legalább három pont. A **vi** és a **vii** axiómából vezethető le sík, illetve háromdimenziós tér létezése. A **viii** axióma biztosítja az S_3 háromdimenziós térre feltételes alakban megállapított tételek általános érvényességét ; például a **104**.12 és 13 tétel az **i**—**viii** axiómák alapján a következőkkel helyettesíthető : *bármely síknak egy hozzá nem tartozó egyenessel egy és csak egy közös pontja van; bármely két különböző síknak egy és csak egy közös egyenese van.*

Az **i**—**viii** axiómák alapján levezetett tételek magukban foglalják a **P I** axiómákat (l. 2—3. o.). Ebből következik, hogy az **i**—**viii** axiómák alapján felépített geometriában is érvényes a *dualitás elve* (l. 4—5. o.).

Az n-dimenziós projektív térgeometria.

104.24. Az **i**—**iv** axiómák alapján (ugyancsak feltételes alakban) felépíthető az n-dimenziós projektív térgeometria.

Értelmezés. Ha $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ $n+1$ olyan pont, amely nem tartozik egy $(n—1)$-dimenziós térhez, s ha S_{n-1} olyan $(n—1)$-dimenziós tér, amely tartalmazza a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontokat, akkor a P_0 pont és az S_{n-1} tér által meghatározott *n-dimenziós S_n téren* azoknak a pontoknak összességét értjük, melyek a P_0 pontot az S_{n-1} tér pontjaival összekötő egyeneseken feküsznek.

Ugyanezzel az értelmezéssel vezettük be $n=2$ esetében a síkot, $n=3$ esetében a háromdimenziós teret. A fenti értelmezés rekurzív módon értelmezi minden pozitív n egész számra vonatkozóan az n-dimenziós projektív teret.

A **104**.18 tétel levezetéséhez hasonlóan igazolható az a tétel, hogy *bármely $n+1$ olyan pont, amely nem tartozik egy $(n—1)$-dimenziós térhez, egy és csak egy n-dimenziós S_n teret határoz meg.*

Az n-dimenziós projektív geometria megalapozásához az **i**—**iv** axiómákon kívül fel kell vennünk az **v** axiómát, továbbá a **vi**—**viii** axiómákat helyettesítő, következő két axiómát :

Nem tartozik az összes pont egy S_k térhez, ha $k < n$.

Ha S_n egy n-dimenziós tér, akkor az összes pont S_n-hez tartozik.

Az n-dimenziós projektív térben hasonló *dualitási elv* érvényes, mint a háromdimenziós térben vagy mint a síkban; az S_n térben az S_k és S_{n-k-1} terek szerepe felcserélhető egymással; S_0-on értjük a pontokat. Ha n páratlan, akkor az $(n-1)/2$-dimenziós terek a dualitásban önmaguknak felelnek meg, úgy mint az egyenesek a térbeli dualitásban.

A FANO-féle axiómák.

104.25. A valós projektív geometria felépítésében előnyösnek mutatkozott az elsőfajú elemi alakzatokban (például a pontsorban, vagyis az egyenesen) a rendezésnek axiomatikus úton való bevezetése. A komplex projektív geometria céljainak viszont a rendezés fogalma már nem felel meg. Ha a valós és a komplex projektív geometriát egységes alapon akarjuk felépíteni, akkor célszerű olyan összetartozási alaptétellel bővíteni az összetartozási axiómák csoportját, amelyet a valós projektív geometriában, mint tételt, éppen a rendezési axiómák felhasználásával bizonyítottunk be.

Megjegyeztük, hogy a 7.2 tétel, amelyet a **P I**, **II** axiómák alapján bizonyítottunk be, nem vezethető le a **P I** axiómákból (l. **103**.7). FANO az összetartozási axiómák csoportját a következő, ugyancsak összetartozási alaptételekkel bővítette ki, melyek közül az első levezethető a másodikból (FANO-*féle axiómák*):

A teljes négyszög három átlóspontja nem fekszik egy egyenesen.

IX. *Van legalább egy, végtelen sok pontból álló harmonikus pontsorozat.* (Értelmezést l. 11. §.)

Az utóbbi feltételből következik, hogy az egyenes bármely három különböző pontja által meghatározott harmonikus pontsorozat végtelen sok pontból áll. A harmonikus pontsorozatok segítségével megszerkeszthetjük az egyenes bármely három különböző pontja által meghatározott harmonikus pontrendszert (értelmezést l. 11. §); ennek pontjait a megfelelő racionális számok nagysági vonatkozásával megegyező módon *rendezhetjük*. A rendezés alapján bevezethetünk egy *folytonossági axiómát* is; erre a kérdésre vonatkozóan l. VEBLEN—YOUNG: Projective Geometry, 2. kötet, 16. o. — A valós és a komplex projektív geometriának más módon való közös jellemzésére visszatérünk a 111. §-ban.

105. §. A Desargues-féle tétel.

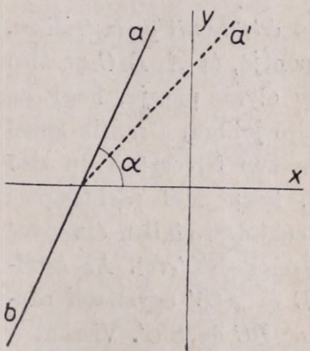
A Desargues-féle tétel és a síkgeometria.

105.1. A Desargues-féle tételt a 8. §-ban levezettük a **PI** axiómacsoport alapján, vagyis a projektív térgeometria összetartozási axiómáiból (l. **8.1**).

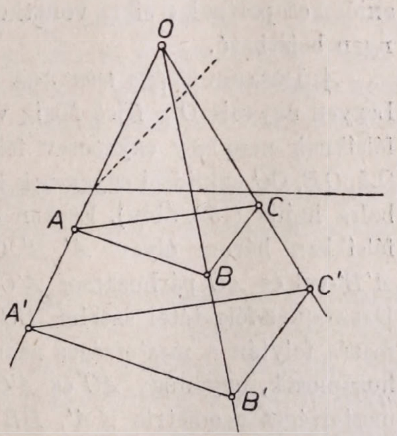
A Desargues-féle tétel nem következik a projektív síkgeometria összetartozási axiómáiból (vagyis a **PI** *axiómacsoportnak a síkra vonatkozó axiómáiból).*

Ez a fontos megállapítás Peanotól és Hilberttől, következő igazolása Moultontól származik.

Vegyük fel az euklidesi síkgeometriát, amelyben érvényesek az **I. 1—3, II, III, IV, V** axiómák. Vegyünk fel a síkban egy derékszögű (x, y) koordinátarendszert. Az euklidesi geometria alapján egy *mesterséges geometriát* vagy *modellt* értelmezünk olyan módon, hogy az euklidesi sík pontjait vesszük fel az értelmezendő síkgeometria pontjainak, de az egyenesek értelmezését a következő előírással meg-



151. ábra.



152. ábra.

változtatjuk. Ha egy euklidesi egyenes vízszintes vagy függőleges (azaz párhuzamos az x, illetve az y tengellyel), vagy ha *balra hajlik,* vagyis, ha az egyenesnek az $y > 0$ felső félsíkhoz tartozó félsugara a pozitív x tengellyel tompaszöget zár be, akkor az egyenest az értelmezendő geometriában is egyenesnek vesszük fel. Ha azonban az euklidesi egyenes *jobbra hajlik,* vagyis, ha a felső félsíkhoz tartozó a

félsugara a pozitív x tengellyel hegyesszöget zár be, akkor az egyenesnek az alsó félsíkhoz tartozó b félsugarát azzal a felső félsíkhoz tartozó a' félsugárral folytatjuk, amelynek kezdőpontja a kezdőpontjával egybeesik s amelynek a pozitív x tengellyel bezárt szögének tangense fele akkora, mint az a és a pozitív x tengely által bezárt szög tangense (151. ábra). A $b+a'$ törtvonalat egyenesnek vesszük fel az értelmezendő geometriában. Ha a $b+a$ egyenes egyenlete:

$$y=(x-x_0)\operatorname{tg}\alpha \quad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right),$$

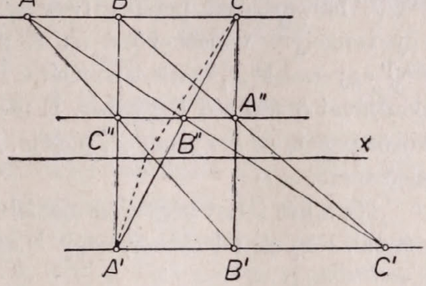
akkor az a' félsugár kifejezése:

$$y=\frac{1}{2}(x-x_0)\operatorname{tg}\alpha \quad (x>x_0).$$

A modell két $b+a'$ és b_1+a_1' egyenesét *párhuzamosnak* nevezzük, ha b párhuzamos b_1-gyel, s ennekfolytán a' párhuzamos a_1'-vel. Párhuzamos egyeneseknek közös végtelen távoli pontot, nem párhuzamos egyeneseknek különböző végtelen távoli pontokat feleltetünk meg. A végtelen távoli pontokkal kiegészített síkban érvényesek a **P I** axiómacsoportnak a síkra vonatkozó axiómái (l. 4—5. o.), mint könynyen belátható.

A DESARGUES-*féle tétel nem érvényes az értelmezett geometriában.* Legyen ugyanis O a felső félsík valamely pontja, és A, B, C az alsó félsíknak nem egy egyenesen fekvő három olyan pontja, hogy az OA, OB, OC euklidesi egyenesek közül az első jobbra, a másik kettő balra hajlik (152. ábra). Ezeken az egyeneseken felveszünk az alsó félsíkban három olyan A', B', C' pontot, hogy AB párhuzamos $A'B'$-vel és AC párhuzamos $A'C'$-vel. Az euklidesi síkban érvényes DESARGUES-féle tétel szerint BC is párhuzamos $B'C'$-vel. Az értelmezés folytán a mesterséges geometria AB és $A'B'$ egyenesei párhuzamosak, ugyanúgy AC és $A'C'$, valamint BC és $B'C'$. Viszont a mesterséges geometria AA', BB', CC' egyenesei nem mennek egy ponton át. A modell BB' és CC' egyenese ugyanis azonos a BB', illetve a CC' euklidesi egyenessel, de az AA', egyenes a modellben az x tengelyen megtörik, azaz egy másik félsugár folytatja (pontozott vonal az ábrán), amely nem megy át a BB' és CC' egyenesek O metszéspontján. Tehát a mesterséges geometriában nem érvényes a DESARGUES-féle tétel.

105.2. *A* PAPPUS-*féle tétel sem érvényes a fenti modellben* (l. **6**.10 és 107. §). Vegyünk fel ugyanis a felső félsíkban egy vízszintes egyenesen két A és B pontot, B-t A-tól jobbra. A B ponton átmenő függőleges egyenesen vegyük fel az A' pontot az alsó félsíkban, s a C'' pontot a felső félsíkban a BA' szakaszon (153. ábra). Az A' ponton átmenő vízszintes egyenesnek az AC'' egyenessel közös pontját jelöljük B'-vel, a B'-n átmenő függőlegesnek AB-vel közös pontját C-vel, továbbá $B'C$-nek a C''-n átmenő vízszintessel közös pontját A''-vel, végül BA''-nek $A'B'$-vel közös pontját jelöljük C'-vel. Az euklidesi síkra érvényes PAPPUS-féle tételből következik, hogy az AC' és $A'C$ euklidesi egyenesek B'' metszéspontja az $A''C''$ vízszintes egyenesen fekszik. A mesterséges geometriában is



153. ábra.

egyenesek az ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ vízszintesek, továbbá az AB', BA', BC', CB' és AC' euklidesi egyenesek ; de az $A'C$ euklidesi egyenes nem egyenes a modellben, mivel jobbra hajlik. Ezért a modellnek az A', C pontokat összekötő egyenese (pontozott vonal a 153. ábrán) nem megy át a B'' ponton, tehát a PAPPUS-féle tétel nem érvényes.

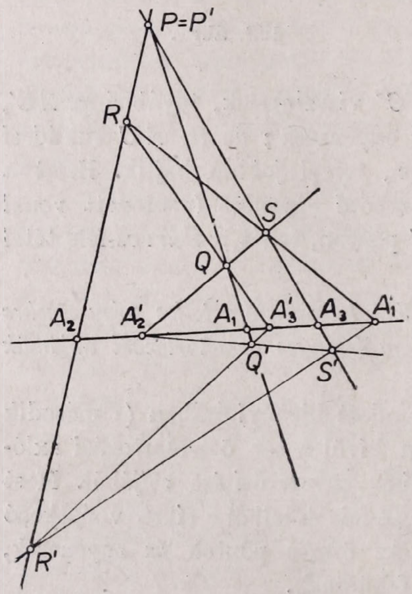
105.3. *A* DESARGUES-*féle tételből levezethető a teljes négyszögekre vonatkozó* **8.3** *(és* **8.4***) tétel a síkban érvényes összetartozási axiómák alapján.*

A **8.3** tételnek a 30. oldalon adott bizonyításában (a második részben) a DESARGUES-féle tételen kívül a tér összetartozási axiómáira is hivatkoztunk a bizonyítás egyszerűsítése céljából. Most levezetjük a **8.3** tételt a DESARGUES-féle tételből a síkra vonatkozó összetartozási axiómák alapján. Az összes pontok és egyenesek, amelyekről szó van, egy α síkban feküsznek.

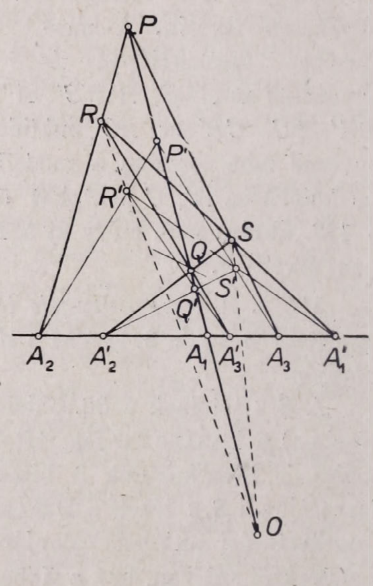
Legyen $PQRS$ és $P'Q'R'S'$ két teljes négyszög és l olyan egyenes, amely nem megy át e négyszögek egyik csúcsán sem. A PQ, PR, PS ; RS, QS, QR egyeneseknek az l egyenessel való metszéspontját jelöljük sorban A_1, A_2, A_3 ; A_1', A_2', A_3'-vel. Tegyük fel, hogy a $P'Q'$, $P'R'$ $P'S'$; $R'S'$, $Q'S'$ egyenesek rendre az A_1, A_2, A_3 ; A_1', A_2' ponton mennek át. A tétel állítása szerint ez esetben *a $Q'R'$ egyenes átmegy az A_3' ponton.*

Ha a PQ, PR, PS egyenesek rendre különböznek a $P'Q', P'R'$, $P'S'$ egyenesektől, akkor a PQS és $P'Q'S'$, valamint a PRS és $P'R'S'$ háromszögek, feltételeink folytán, perspektívek az l tengelyre s ezért a Desargues-féle (**8**.1) tétel szerint egy-egy középpontra vonatkozóan is. A két perspektivitás középpontja közös, ez ugyanis a PP' és SS' egyenesek O metszéspontja. Ebből következik, hogy a PQR és $P'Q'R'$ háromszögek perspektívek az O középpontra, tehát **8**.1 szerint egy tengelyre vonatkozóan is. A perspektivitás tengelye a PQ és $P'Q'$ egyenesek A_1 metszéspontját a PR és $P'R'$ egyenesek A_2 metszéspontjával összekötő l egyenes. E szerint a QR és $Q'R'$ egyeneseknek közös pontja az l egyenes A_3' pontja. Ez a 32. oldalon adott bizonyítás első része.

Ha a két teljes négyszög megfelelő oldalai nem különböznek egymástól, tegyük fel *először*, hogy P egybeesik P'-vel. A PQ és a $P'Q'$



154. ábra.



155. ábra.

egyenes azonos PA_1-gyel, a PR és a $P'R'$ egyenes PA_2-vel, a PS és a $P'S'$ egyenes PA_3-mal. A QRS és $Q'R'S'$ háromszögek tehát perspektívek a P középpontra, s ezért a **8**.1 tétel szerint egy tengelyre vonatkozóan is. A perspektivitás tengelye a QS és $Q'S'$ egyenesek A_2' metszéspontját az RS és $R'S'$ egyenesek A_1' metszéspontjával összekötő

l egyenes (154. ábra). Mivel feltételeinkben P és P' felcserélhető S-sel és S'-vel (s ugyancsak Q és Q' R-rel és R'-vel) ugyanerre az eredményre vezet az $S = S'$ feltevés.

Másodszor, ha P különbözik P'-től és S különbözik S'-től, de a PQ egyenes azonos $P'Q'$-vel, akkor feltételeink folytán a PRS és $P'R'S'$ háromszögek perspektívek az l tengelyre s ezért egy O középpontra vonatkozóan is. Ha a Q pont egybeesik Q'-vel, akkor a QP és a $Q'P'$ egyenes azonos QA_1-gyel, s a QS és a $Q'S'$ egyenes QA_2'-vel, tehát Q egybeesik a PP' és SS' egyenesek O metszéspontjával, amely a perspektivitás középpontja. Ebben az esetben a QR egyenes azonos $Q'R'$-vel, tehát az l egyenessel való metszéspontjuk közös. Ha pedig Q különbözik Q'-től, akkor a QQ' egyenes azonos PP'-vel, tehát a QRS és $Q'R'S'$ háromszögek perspektívek az O középpontra s ezért az l tengelyre vonatkozóan is (155. ábra). Hasonló meggondolással intézhető el az az eset, midőn P különbözik P'-től, S különbözik S'-től, de a PR egyenes azonos $P'R'$-vel.

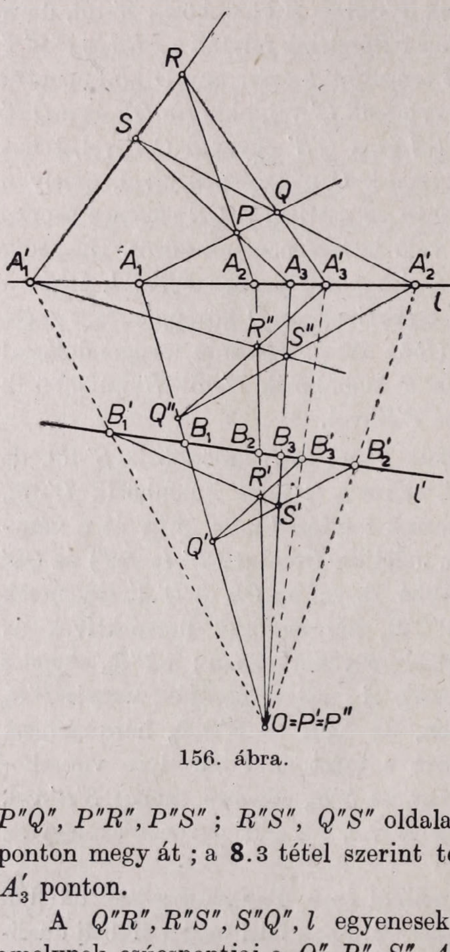
Harmadszor, ha P különbözik P'-től és S különbözik S'-től, de a PS egyenes azonos $P'S'$-vel, akkor a Q pont különbözik Q'-től, az R pont R'-től, mivel feltevésünk folytán l nem megy át a négyszögek egyik csúcspontján sem. Jelöljük O-val a PP' $(=SS')$ és QQ' egyenesek metszéspontját, továbbá R_0-val az OR és $Q'A_3'$ egyenesek metszéspontját. A PQR és $P'Q'R_0$ háromszögek perspektívek az O középpontra s ezért az l tengelyre vonatkozóan ; a $P'R_0$ egyenes átmegy tehát a PR és l egyenesek A_2 metszéspontján, vagyis $P'R_0$ azonos $P'R'$-vel. Hasonlóképpen, az SQR és $S'Q'R_0$ háromszögek perspektívek az O középpontra s ezért az l tengelyre vonatkozóan is ; ebből következik, hogy az $S'R_0$ egyenes azonos $S'R'$-vel. E szerint az R_0 pont egybeesik R'-vel, s a $Q'R'$ egyenes átmegy az A_3' ponton.

A sík összetartozási axiómáiból és a DESARGUES-féle tételből levezethető a következő tétel, mely **8**.3-nak felel meg a síkbeli dualitás szerint :

105.4. Tétel. *Legyen $pqrs$ és $p'q'r's'$ két teljes négyoldal, és O olyan pont, amely nem tartozik ezeknek egyik oldalához sem. Ha a két négyoldal megfelelő pq és $p'q'$ stb. csúcspontjait összekötő egyenesek közül öt átmegy az O ponton, akkor a hatodik is.*

Bebizonyítjuk a sík összetartozási axiómái és a DESARGUES-féle tétel alapján a következő tételt :

105.5. Tétel. *Ha A_1, A_2, A_3; A_1', A_2', A_3' a $PQRS$ teljes négyszög PQ, PR, PS; RS, QS, QR oldalának a csúcsokon át nem menő l egyenessel való metszéspontjai, s ha B_i, B_i' az A_i, A_i' pontoknak egy O pontból valamely l' egyenesre való vetületei, akkor van olyan $P'Q'R'S'$ teljes négyszög, amelynek $P'Q'$, $P'R'$, $P'S'$; $R'S'$, $Q'S'$, $Q'R'$ oldalai rendre a B_1, B_2, B_3; B_1', B_2', B_3' pontokon mennek át.* (Feltesszük, hogy az összes nevezett pont és egyenes egy síkban fekszik, s hogy az O pont nem tartozik sem az l, sem az l' egyeneshez.)



156. ábra.

Bizonyítás (156. ábra). Legyen S'' az OA_3 egyenes valamely, O-tól és A_3-tól különböző pontja, R'' az $S''A_1'$ és OA_2 egyenesek metszéspontja, Q'' pedig az $S''A_2'$ és OA_1 egyenesek metszéspontja. Az $O=P''$, Q'', R'', S'' pontok közül bármely három nem fekszik egy egyenesen; az általuk meghatározott teljes négyszög $P''Q''$, $P''R''$, $P''S''$; $R''S''$, $Q''S''$ oldala rendre az A_1, A_2, A_3; A_1', A_2' ponton megy át; a **8**.3 tétel szerint tehát a $Q''R''$ oldal átmegy az A_3' ponton.

A $Q''R'', R''S'', S''Q'', l$ egyenesek teljes négyoldalt alkotnak, amelynek csúcspontjai a $Q'', R'', S'', A_1', A_2', A_3'$ pontok.

Legyen S' az OB_3 egyenes tetszőleges, O-tól és B_3-tól különböző pontja. Jelöljük R'-vel az $S'B_1'$ és OB_2 egyenesek metszéspontját, továbbá Q'-vel az $S'B_2'$ és OB_1 egyenesek metszéspontját. A $Q'R'$, $R'S'$, $S'Q'$, l' egyenesek teljes négyoldalt alkotnak, amelynek öt csúcspontja: Q', R', S', B_1', B_2'. Ennek a teljes négyoldalnak s a $Q''R''$, $R''S''$, $S''Q''$, l egyenesek által alkotott teljes négyoldalnak megfelelő csúcsait összekötő egyenesek közül a következő öt: $Q'Q'', R'R'', S'S''$,

$B_1'A_1'$, $B_2'A_2'$ átmegy az O ponton. A **105**.4 tétel szerint tehát a hatodik megfelelő csúcspárt összekötő egyenes is átmegy az O ponton, vagyis a $Q'R'$ és l' egyenesek metszéspontja az OA_3' egyenesen fekszik, azaz megegyezik a B_3' ponttal.

A fentiekből következik, hogy az $O{=}P'$, Q', R', S' pontok olyan teljes négyszögnek a csúcsai, amelynek $P'Q'$, $P'R'$, $P'S'$; $R'S'$, $Q'S'$, $Q'R'$ oldala rendre átmegy az l' egyenes B_1, B_2, B_3 ; B_1', B_2', B_3' pontján. Ezzel a **105**.5 tételt bebizonyítottuk.

A Desargues-féle tétel és a térgeometria.

105.6. *Ha a projektív síkgeometriában érvényes a* Desargues-*féle tétel, akkor a síkgeometria kiegészíthető olyan projektív térgeometriává, amelyben érvényesek a* **P I** *axiómák.*

Ezt a tételt s analitikus bizonyítását Hilbert adta ; a tétel itt következő bizonyítása Schortól származik.

A bizonyítás alapgondolatának könnyebb megértése céljából ismertetjük előbb *az affin térnek egy affin síkon való ábrázolását.* Felveszünk a térben egy közönséges α síkot, továbbá egy közönséges O ponton átmenő, de nem egy síkban fekvő három p, q, r egyenest, melyek közül egyik sem párhuzamos az α síkkal. A tér minden P pontját az α síkra vetítjük a p, q és az r egyenes irányában, azaz átfektetünk P-n a p, q, r egyenesekkel párhuzamos egyeneseket, s ezeknek α-val közös A, B, C pontját feleltetjük meg a P pontnak. Ha a P pont az α síkban fekszik, akkor az A, B, C vetületek egybeesnek P-vel. Ha P nem tartozik az α síkhoz, akkor az A, B, C vetületek olyan háromszögnek a csúcsai, amelynek AB, BC, CA oldala rendre párhuzamos a pq, qr, rp síkkal, s nevezetesen az α síknak és ezeknek a síkoknak c_0, a_0, b_0 metszésvonalával. Viszont, ha felveszünk az α síkban tetszőleges olyan ABC háromszöget, amelynek AB, BC, CA oldala rendre a c_0, a_0, b_0 egyenessel párhuzamos, akkor van a térben egy és csak egy olyan P pont, amelynek a p, q, r egyenes irányában való vetülete A, B, C ; a P pont ugyanis az AB egyenesen át a pq síkkal, a BC egyenesen át a qr síkkal, és a CA egyenesen át az rp síkkal párhuzamosan fektetett síkok metszéspontja. Ilyen módon kölcsönösen egyértelműen megfelelnek egymásnak a térnek az α síkhoz nem tartozó, végesben fekvő pontjai, s az α síknak azok az ABC háromszögei, amelyeknek AB, BC, CA oldalai rendre a c_0, a_0, b_0 egyenesekkel párhuzamosak.

Legyen e tetszőleges olyan egyenes, amely nem fekszik az α síkban. Ha az e egyenes általános helyzetű, azaz nem párhuzamos az α, pq, qr, rp síkok közül egyikkel sem, akkor az e egyenesnek a fenti ábrázolás szerint az α síkban három különböző a, b, c egyenes felel meg, amelyek közül egyik sem párhuzamos a c_0, a_0, b_0 egyenesekkel; az a, b, c egyenesek egy ponton mennek át, t. i. az e egyenesnek az α síkkal való metszéspontján. Ha e párhuzamos az α síkkal, de nem párhuzamos a pq, qr, rp síkok közül egyikkel sem, akkor a megfelelő a, b, c vetületek párhuzamosak egymással, de nem párhuzamosak a c_0, a_0, b_0 egyenesekkel. Ha e párhuzamos a pq síkkal, de nem párhuzamos sem p-vel, sem q-val, akkor az a, b, c vetületek közül a és b egybeesik s a c_0 egyenessel párhuzamos. Ha e párhuzamos p-vel, akkor p irányában való a vetülete egy pontból áll, másik két vetülete, b és c ezen a ponton megy át s párhuzamos rendre a c_0 és a b_0 egyenessel. Végül, ha az e egyenes az α síkban fekszik, akkor a, b és c egybeesik e-vel.

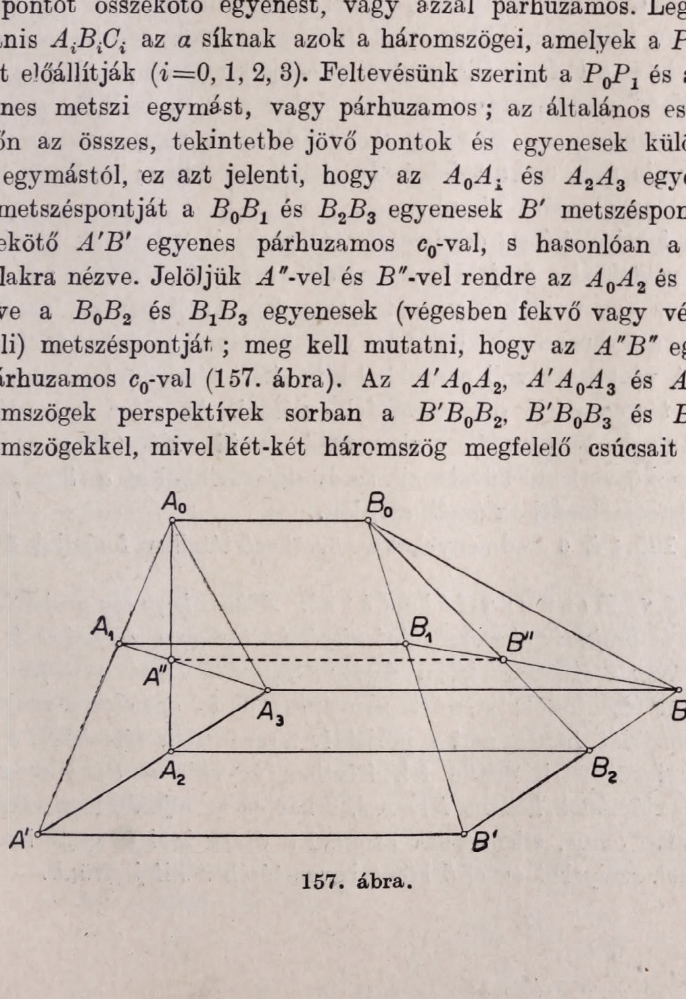
A **105.**6 t é t e l b i z o n y í t á s a a fenti ábrázolási mód megfordításából adódik. Legyen α egy affin sík, amelyben érvényes a DESARGUES-féle tétel. Felveszünk az α síkban három c_0, a_0, b_0 egyenest, melyek közül kettő-kettő nem párhuzamos. Ha ABC az α síkban tetszőleges olyan háromszög, amelynek AB, BC, CA oldala rendre a c_0, a_0, b_0 egyenessel párhuzamos, akkor ezt a háromszöget *térbeli pont*nak nevezzük. Az ABC háromszögekhez soroljuk az elfajult háromszögeket is, amelyeknek három csúcsa egybeesik.

Legyen ABC és $A'B'C'$ két tetszőleges térbeli pont; az ezeket az α síkban előállító ABC és $A'B'C'$ háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak, s ezért a DESARGUES-féle tétel szerint az $a=AA'$, $b=BB'$, $c=CC'$ egyenesek egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak; ha a két háromszög egy-egy megfelelő csúcsa, például A és A' egybeesik, akkor a-n értjük az $A=A'$ pontot. Az a, b, c vonalhármast az ABC és $A'B'C'$ térbeli pontok által meghatározott *térbeli egyenes*nek nevezzük. Ehhez az egyeneshez tartozik értelmezés szerint minden olyan $A''B''C''$ térbeli pont, amelynek megfelelő $A''B''C''$ háromszög A'', B'', C'' csúcsa rendre az a, b, c egyenesen fekszik.

Az a, b, c és az a', b', c' vonalhármasokkal előállított térbeli egyenesek értelmezés szerint akkor *párhuzamosak*, ha az α sík a és a', b és b', c és c' egyenesei páronkint párhuzamosak vagy azonosak; értelmezés szerint a ponttá fajuló egyenesek csak egymással párhuzamosak. Az a, b, c és a', b', c' nem párhuzamos egyenesek akkor *metszik egymást,* ha két megfelelő egyenes, például a és a' azonos, vagy pedig, ha a és a'-nek A metszéspontja, b és b'-nek B metszéspontja s c és c'-nek C metszéspontja egy térbeli pontot előállító ABC háromszög csúcsai (azaz, ha AB, BC, CA rendre párhuzamos a c_0, a_0, b_0 egyenessel, vagy ha az A, B, C pontok egybeesnek).

Legyen P_1, P_2, P_3 három térbeli pont, amely nem fekszik egy egyenesen. A P_1, P_2, P_3 pontok meghatároznak egy $P_1P_2P_3$ *térbeli síkot* ; ehhez tartozik értelmezés szerint a P_1, P_2, P_3 pont, továbbá minden olyan P_0 pont, melyre vonatkozóan a P_0P_1 egyenes metszi a P_2P_3 egyenest, vagy azzal párhuzamos.

Könnyen belátható, hogy ha az utóbbi feltétel teljesül, akkor a négy pont közül bármely kettőt összekötő egyenes metszi a másik két pontot összekötő egyenest, vagy azzal párhuzamos. Legyenek ugyanis $A_iB_iC_i$ az a síknak azok a háromszögei, amelyek a P_i pontokat előállítják (i=0, 1, 2, 3). Feltevésünk szerint a P_0P_1 és a P_2P_3 egyenes metszi egymást, vagy párhuzamos ; az általános esetben, midőn az összes, tekintetbe jövő pontok és egyenesek különböznek egymástól, ez azt jelenti, hogy az A_0A_1 és A_2A_3 egyenesek A' metszéspontját a B_0B_1 és B_2B_3 egyenesek B' metszéspontjával összekötő $A'B'$ egyenes párhuzamos c_0-val, s hasonlóan a többi oldalakra nézve. Jelöljük A''-vel és B''-vel rendre az A_0A_2 és A_1A_3, illetve a B_0B_2 és B_1B_3 egyenesek (végesben fekvő vagy végtelen távoli) metszéspontját ; meg kell mutatni, hogy az $A''B''$ egyenes is párhuzamos c_0-val (157. ábra). Az $A'A_0A_2$, $A'A_0A_3$ és $A'A_1A_3$ háromszögek perspektívek sorban a $B'B_0B_2$, $B'B_0B_3$ és $B'B_1B_3$ háromszögekkel, mivel két-két háromszög megfelelő csúcsait össze-



157. ábra.

kötő $A'B'$ és A_iB_i egyenesek párhuzamosak egymással (párhuzamosak ugyanis c_0-val). Ebből a DESARGUES-féle tétel szerint következik, hogy a megfelelő háromszögek egy-egy tengelyre vonatkozóan is perspektívek ; minthogy pedig az $A'A_0A_2$, $A'A_0A_3$, $A'A_1A_3$ háromszögek közül bármely kettőnek két oldala közös, s ugyanez érvényes a $B'B_0B_2$, $B'B_0B_3$, $B'B_1B_3$ háromszögekre is, ezért a három perspektív háromszögpár perspektivitási tengelye ugyanaz az l egyenes. Ebből következik, hogy az $A''A_0A_3$ és $B''B_0B_3$ háromszögek is perspektívek az l tengelyre vonatkozóan, s ezért a megfelelő csúcsokat összekötő $A''B''$, A_0B_0, A_3B_3 egyenesek egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak. Mivel A_0B_0 és A_3B_3 párhuzamos c_0-val, ezért $A''B''$ is párhuzamos c_0-val. Hasonlóan adódik, hogy $B''C''$ párhuzamos a_0-val és $C''A''$ párhuzamos b_0-val. E szerint, ha az A'', B'', C'' pontok végesben feküsznek, akkor az $A''B''C''$ háromszög egy térbeli pontot ábrázol s ez a P_0P_2 és P_1P_3 térbeli egyenesek metszéspontja ; ha pedig A'', B'', C'' végtelen távoli pontok, akkor a P_0P_2 és P_1P_3 egyenesek párhuzamosak. — Hasonló meggondolással ugyanerre az eredményre jutunk a különböző, speciális esetekben; ezeknek kidolgozását az olvasóra bízzuk.

A fenti előírással értelmezett tér pontjait egészítsük ki *végtelen távoli pontok*kal a projektív geometriában szokásos módon : két párhuzamos egyenesnek ugyanazt a végtelen távoli pontot, nem párhuzamos egyeneseknek különböző végtelen távoli pontokat feleltetünk meg. A végtelen távoli pontokkal kibővített térre érvényesek a projektív térgeometria összetartozási axiómái. Az előző bekezdésben igazoltuk a VEBLEN-féle axiómarendszer **iii** axiómáját ; a többi axióma közvetlenül következik az értelmezésekből az α síkra vonatkozó összetartozási axiómák alapján.

A **105**.1 és 6 eredményeket a következő tételben foglaljuk össze :

105.7. HILBERT-féle tétel. *Ahhoz, hogy egy projektív síkgeometria projektív térgeometriává kiegészíthető legyen, szükséges és elégséges, hogy a síkgeometriában érvényes legyen a* DESARGUES-*féle tétel.*

Ez a tétel indokolja, miért nem építettük fel önállóan a projektív síkgeometriát, hanem csak a projektív térgeometria részeként. A projektív síkgeometria önálló felépítésében ugyanis a DESARGUES-féle tételt axiómának kellene felvenni, s bár ez az eljárás logikailag kifogástalan lenne, ellenkeznék azokkal a didaktikai és esztetikai elveinkkel, melyeket az első kötet bevezetésében kifejtettünk.

106. §. A projektív geometria számteste.

Pontszámolás a DESARGUES-féle tétel alapján.

106.1. A 21. §-ban értelmezett műveleti szabályokhoz az egyenes projektív leképezéseinek analitikus kifejezéséből jutottunk, amelyeket az összetartozási, rendezési és folytonossági axiómákból vezettünk le. Mostani tárgyalásunkban csak összetartozási alaptételeket veszünk fel, mégpedig vagy a térgeometria összetartozási axiómáit (**P I**), melyekből levezethető a DESARGUES-féle tétel, vagy a síkra vonatkozó összetartozási axiómákat s ezenkívül a DESARGUES-féle tételt is. Mivel a nevezett alaptételekből levezethető a teljes négyszögekre vonatkozó **8.**3 és 4 tétel (l. **105.**3), az egyenes pontjainak összeadását és szorzását ugyanúgy értelmezhetjük, mint **21.**11 és 12-ben; az O (0), E (1) és U (∞) pontok megválasztása alapján az ottan megadott szerkesztések egyértelműen meghatározzák az egyenes két X és Y pontjának $X+Y$ összegét és $X.Y$ szorzatát, függetlenül a szerkesztés céljára alkalmazott o, u, u', illetve o, e, u egyenesek speciális választásától. Igazolni fogjuk, hogy az összeadás kommutatív és asszociatív, továbbá a szorzás asszociatív és az összeadásra vonatkozóan disztributív művelet, azaz érvényesek a következő szabályok:

$$\begin{aligned}
X+Y &= Y+X,\\
(X+Y)+Z &= X+(Y+Z),\\
(X.Y).Z &= X.(Y.Z),\\
(X+Y).Z &= X.Z+Y.Z,\\
Z.(X+Y) &= Z.X+Z.Y.
\end{aligned}$$

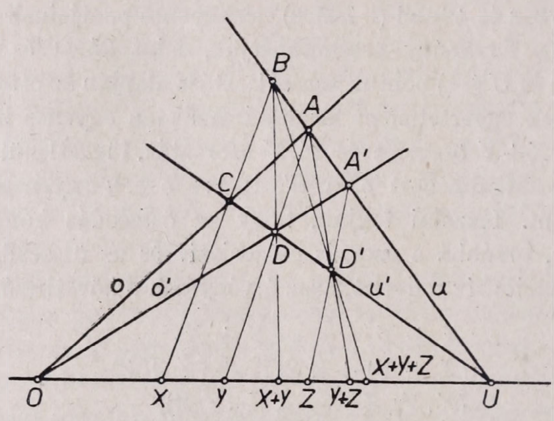
Ezeknek a szabályoknak igazolását a következő tárgyalás adja, melyben feltesszük, hogy az összes pontok és egyenesek egy síkban feküsznek.

106.2. Legyen O és U az a egyenes két különböző pontja, továbbá X és Y az a egyenes két tetszőleges, U-tól különböző pontja. Az X és Y pontok $X+Y$ összegét a következő módon szerkesztjük meg. Felveszünk két u és u' egyenest az U ponton át, amelyek egymástól és a-tól különböznek, s egy, a-tól különböző o egyenest az O ponton át; az X pontot az o, u' egyenesek C metszéspontjával összekötő egyenesnek és az u egyenesnek közös pontja legyen B; az Y pontot az o, u egyenesek A metszéspontjával összekötő egyenesnek és az u' egyenesnek közös pontja legyen D; a BD egyenesnek a-val való metszéspontja az $X+Y$ pont (158. ábra).

A **8**.4 tétel folytán az $X+Y$ pont független az o, u, u' egyenesek speciális megválasztásától. Nevezetesen, ha felcseréljük u és u' szerepét, akkor a fenti szerkesztéssel az $Y+X$ pontot kapjuk ; ebből következik :

$$X + Y = Y + X.$$

106.3. Legyen X, Y és Z az a egyenes három, U-tól különböző pontja. Vegyük fel az o, u, u' egyeneseket úgy, mint előbb s képezzük az $X + Y$ pontot. Ennek s a Z pontnak az összegét olyan módon képezzük, hogy az o egyenest az előbbi szerkesztés $OD=o'$ egyenesével helyettesítjük (158. ábra) ; o'-nek u-val való metszéspontja legyen



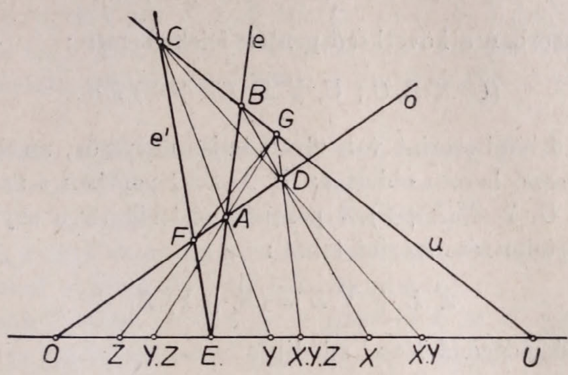
158. ábra.

A', a ZA' egyenesnek u'-vel való metszéspontja D' ; a $D'B$ egyenesnek a-val való metszéspontja az $(X+Y)+Z$ pont. Az $Y+Z$ pont az AD' egyenesnek a-val közös pontja (o-t ismét o'-vel helyettesítettük) ; az X és az $Y+Z$ pont összege a $D'B$ egyenesnek a-val való metszéspontja. E szerint :

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z).$$

106.4. Legyen E az a egyenesnek O-tól és U-tól különböző pontja. Az a egyenes U-tól különböző X és Y pontjának $X.Y$ szorzatát következőképpen szerkesztjük meg. Felveszünk az O, E, U ponton át egy-egy o, e, u egyenest, melyeknek nincs közös pontjuk. Jelöljük A-val o és e metszéspontját, B-vel e és u metszéspontját (159. ábra). Legyen C az AY egyenesnek u-val, és D a BX egyenesnek o-val való metszéspontja. A CD egyenesnek a-val való metszéspontja az $X.Y$ pont.

Legyen Z az a egyenes tetszőleges, U-tól különböző pontja ; a fenti eljárással megszerkesztjük az $X.Y$ és a Z pont szorzatát olyan módon, hogy az e egyenest helyettesítjük az $e'=EC$ egyenessel ; ennek o-val való metszéspontja legyen F, s az FZ egyenesnek u-val közös pontja G.



159. ábra.

A GD egyenesnek s az a egyenesnek metszéspontja az $(X.Y).Z$ pont. Az AG egyenesnek a-val közös pontja az $Y.Z$ pont (ismét e'-vel helyettesítettük e-t). Az X és $Y.Z$ pontok szorzatát az o, e, u egyenesek segítségével megszerkesztve azt kapjuk, hogy ez a GD egyenesnek a-val való metszéspontja, azaz :

$$(X.Y).Z = X.(Y.Z).$$

M e g j e g y z é s. A **106**.3 és 4-ben levezetett eredmények másik igazolását a **105**.5 tétel alapján adhatjuk meg ; ennek a módszernek alkalmazását illetően l. a **106**.5 levezetést.

106.5. Ha X és Y az a egyenes két tetszőleges, U-tól különböző pontja és $X+Y$ ezeknek összege, akkor az összeadás értelmezése szerint van olyan teljes négyszög, amelynek egy csúcsán átmenő három oldala az U, X, O pontban, s az átellenes oldalak az U, Y, $X+Y$ pontban metszik az a egyenest (U átlóspontja a teljes négyszögnek) ; a **8**.3 és 4 tétel jelöléseivel megegyezően :

$$(A_1, A_2, A_3 \,;\, A_1', A_2', A_3') = (U, X, O \,;\, U, Y, X+Y).$$

Az a egyenes bármely X pontjának az a egyenes fix Z pontjával való $X.Z$ szorzatát úgy képezzük, hogy az X pontot az e és u egyenes B metszéspontjából az o egyenesre vetítjük s a vetületet az AZ és

u egyenes C metszéspontjából a-ra vetítjük (159. ábra); az utóbbi vetület az $X.Z$ pont. (Tegyük fel, hogy Z különbözik O-tól és U-tól). A nevezett két vetítéssel az

$$(U, X, O\ ;\ U, Y, X+Y)$$

pontoknak sorban a következő pontok felelnek meg:

$$(U, X.Z, O\ ;\ U, Y.Z,\ (X+Y).Z).$$

A **105**.5 tétel szerint van olyan teljes négyszög, amelynek egy csúcsán átmenő három oldala az $U, X.Z, O$ pontban s az átellenes oldalak az $U, Y.Z, (X+Y).Z$ pontban metszik az a egyenest. Az összeadás értelmezése szerint tehát:

$$X.Z + Y.Z = (X+Y).Z.$$

Hasonló meggondolással adódik a

$$Z.X + Z.Y = Z.(X+Y)$$

műveleti szabály.

106.6. Az értelmezésekből közvetlenül következik, hogy az egyenes minden, U-tól különböző X pontjára:

$$X + O = X$$

és

$$X.E = E.X = X.$$

Ha X az a egyenes tetszőleges, U-tól különböző pontja, akkor van az a egyenesnek egy és csak egy olyan Y pontja, melyre

$$X + Y = O\ ;$$

ezt a pontot $-X$-szel jelöljük. Az összeadás értelmezéséből közvetlenül következik, hogy $-X$ az X pontnak az O, U pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltja. Ha $X=O$, akkor $-X=O$.

106.7. Ha X az a egyenes tetszőleges, O-tól és U-tól különböző pontja, akkor van az a egyenesnek egy és csak egy olyan Y pontja, melyre

$$X.Y = E\ ;$$

ezt a pontot X^{-1}-gyel jelöljük s az X-hez *inverz* vagy *reciprok pontnak* nevezzük (szerkesztését l. **21**.13).

106. 8. A DESARGUES-féle tétel alapján értelmezett pontszámolás lényegét a következőben foglalhatjuk össze. Felvettük az a egyenes három tetszőleges, egymástól különböző O, E, U pontját, s ezek alapján hozzárendeltünk az a egyenes bármely két, U-tól különböző X és Y pontjához egy $X+Y$ összeget s egy $X.Y$ szorzatot, melyek maguk is az a egyenesnek U-tól különböző pontjai. Az összeadásra és a szorzásra teljesülnek a **106.** 1 végén összeállított műveleti szabályok.

Ha a' egy, a-tól különböző (vagy a-val azonos) egyenes, s O', E', U' ennek három különböző pontja, akkor az a' egyenes pontjainak összegét és szorzatát hasonlóan értelmezhetjük az O', E', U' alappontokra vonatkozóan. Az a és az a' egyenesen értelmezett műveletek a következő kapcsolatban állanak egymással:

Megfeleltethetjük az a egyenes pontjainak az a' egyenes pontjait kölcsönösen egyértelmű módon úgy, hogy az a egyenes bármely két X és Y pontjából alkotott $X+Y$ összegnek és $X.Y$ szorzatnak az a' egyenes megfelelő X' és Y' pontjából alkotott $X'+Y'$ összeg, illetve $X'.Y'$ szorzat felel meg.

Létesíthetünk ugyanis (két vagy három vetítés összetételéből, l. például a **13.** 1 tétel bizonyítását) olyan projektív vonatkozást az a és az a' egyenes pontjai között, mely az O, E, U pontnak rendre az O', E', U' pontot felelteti meg. Az

$$(U, X, O\,;\, U, Y, X+Y) \quad \text{és} \quad (O, Y, E\,;\, U, X, X.Y)$$

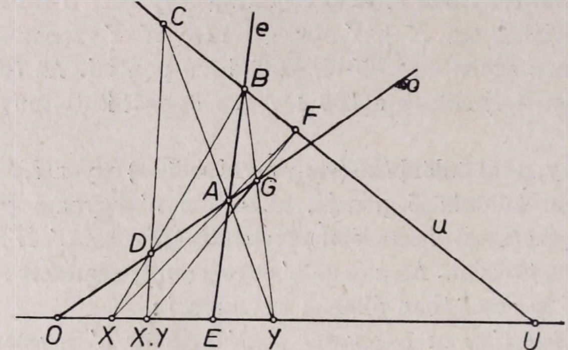
pontcsoportok közül mindegyiknek első három pontja egy-egy teljes négyszög egy csúcsán átmenő oldalainak, s a következő három pontja az átellenes oldalaknak az a egyenessel való metszéspontjai. A **105.** 5 tétel folytán ezeknek a pontcsoportoknak az a és az a' egyenes közti projektív leképezés az a' egyenesen ugyanilyen tulajdonságú pontcsoportokat feleltet meg. Ebből következik, hogy az $X+Y$ pontnak az $X'+Y'$ pont és az $X.Y$ pontnak az $X'.Y'$ pont felel meg.

Kommutatív szorzás és a PAPPUS-féle tétel.

106. 9 Tétel. *A DESARGUES-féle tétel alapján értelmezett szorzás akkor és csak akkor kommutatív, ha a geometriában érvényes a* PAPPUS-*féle tétel* (l. **6.** 10).

Bizonyítás (160. ábra). Legyenek O, E, U az a egyenesen értelmezett műveletek alappontjai, továbbá o, e, u rendre az O, E, U ponton átmenő egyenesek, amelyeknek nincs közös pontja. Jelöljük

e és o metszéspontját A-val, e és u metszéspontját B-vel. Legyen D a BX egyenesnek o-val, továbbá C az AY egyenesnek u-val való metszéspontja. Az értelmezés szerint az $X.Y$ pont a CD egyenesnek



160. ábra.

a-val való metszéspontja. Jelöljük F-fel az AX és u egyenesek, továbbá G-vel a BY és o egyenesek metszéspontját. Az FG egyenesnek a-val közös pontja az $Y.X$ pont.

Ha a Pappus-féle tétel érvényes, alkalmazzuk ezt az o egyenes G, A, D s az u egyenes C, B, F pontjaira. E szerint a CA és GB egyenesek Y metszéspontja, a BD és AF egyenesek X metszéspontja s a CD és GF egyenesek metszéspontja egy egyenesen fekszik. Ez más szóval azt jelenti, hogy az X és Y pontokat összekötő egyenesnek a CD egyenessel való $X.Y$ metszéspontja egybeesik a GF egyenessel való $Y.X$ metszéspontjával, azaz:

$$X.Y = Y.X.$$

Megfordítva, ha a szorzás kommutatív, vagyis ha az a egyenes bármely két, U-tól különböző X és Y pontjára $X.Y = Y.X$, akkor bármely az O ponton átmenő o egyenesre, s bármely az U ponton átmenő u egyenesre érvényes a Pappus-féle tétel a fenti meggondolás szerint, feltéve, hogy két metszéspont a-hoz tartozik. Ha O', E', U' az a egyenes tetszőleges más, három különböző pontja, akkor az ezekre az alappontokra vonatkozó szorzás is kommutatív (l. **106**.8). A fentiek szerint tehát az O' ponton átmenő, tetszőleges o', s az U' ponton átmenő, tetszőleges u' egyenesre is érvényes a Pappus-féle tétel, ha két metszéspont a-hoz tartozik. Ezzel a **106**.9 tételt bebizonyítottuk.

Számtest értelmezése.

106. 10. *Számtesten* bizonyos elemek összességét értjük, melyekre két művelet: az összeadás és szorzás értelmezve van; azaz bármely két x és y elemnek megfelel a megadott összességnek egy és csak egy $x+y$ eleme, s ugyancsak egy és csak egy $x.y$ eleme olyan módon, hogy teljesülnek a következő szabályok:

$$x+y=y+x \tag{1}$$
$$(x+y)+z=x+(y+z) \tag{2}$$
$$(xy)z=x(yz) \tag{3}$$
$$(x+y)z=xz+yz \tag{4}$$
$$z(x+y)=zx+zy. \tag{5}$$

Feltesszük továbbá, hogy van *nulla-elem*, azaz olyan o elem, amelyre s az összesség bármely x elemére:

$$x+o=x \tag{6}$$

s hogy bármely x elemnek megfelel olyan y elem, amelyre

$$x+y=o. \tag{7}$$

Feltesszük végül, hogy van *egység-elem*, azaz olyan e elem, amely nem nulla-elem[1] és amelyre s az összesség bármely x elemére

$$x.e=x \tag{8}$$

s hogy bármely olyan x elemnek, amely nem nulla-elem, megfelel olyan y elem, amelyre

$$x.y=e. \tag{9}$$

A számtest elemeit *számok*nak nevezzük. A számtestet *kommutatív*nak vagy *nem-kommutatív*nak nevezzük a szerint, hogy a szorzás kommutatív szabálya érvényes bármely két x, y elemre, vagy nem.

Megjegyzés. Az irodalomban található terminológia nem egységes. Egyes szerzők számtesten csupán valós vagy komplex számok összességét értik, ha az eleget tesz a fenti feltételeknek. Olyan összességet, amely kielégíti a fenti feltételeket, szokás számrendszernek is nevezni, s számtestnek abban az esetben, ha a szorzás kommutatív.

[1] Ebből a feltevésből következik, hogy a számtestnek legalább két különböző eleme van.

106.11. *A számtestben egy és csak egy nulla-elem van.* Ha ugyanis o és o' nulla-elemek, akkor értelmezés szerint:

$$o' + o = o' \quad \text{és} \quad o + o' = o,$$

s mivel az összeadás kommutatív, ezért

$$o' + o = o + o', \quad \text{azaz:} \quad o' = o.$$

A nulla-elemet a továbbiakban 0-val fogjuk jelölni. Az összeadás kommutativitásából következik még, hogy a számtest bármely x elemére:

$$0 + x = x + 0 = x.$$

106.12. *Az x számnak egy és csak egy olyan y szám felel meg, amelyre $x+y=0$.* Ha ugyanis

$$x + y = 0 \quad \text{és} \quad x + z = 0,$$

akkor

$$z=0+z=(x+y)+z=x+(y+z)=x+(z+y)=(x+z)+y=0+y=y.$$

Az ilyen módon egyértelműen meghatározott y számot $-x$-szel jelöljük. Ha $x=0$, akkor $-x=0$; bármely x elemre:

$$-(-x) = x.$$

106.13. *Ha x és z a számtest két tetszőleges eleme, akkor van egy és csak egy olyan y elem, amelyre*

$$x + y = z.$$

Az y elem ugyanis a z és a $-x$ elemek összege, melyet így jelölünk

$$z + (-x) = z - x$$

s a z és x elemek *különbségének* nevezünk. Erre az elemre:

$$x + (z + (-x)) = (x + (-x)) + z = z.$$

106.14. *Bármely x elemnek 0-val való szorzata* 0; ugyanis:

$$x.0 = x\,(0 + 0) = x.0 + x.0 \quad \text{(5 szerint)}$$

és

$$x.0 = x.0 + 0$$

a 0 elem értelmezése szerint; ebből a két egyenlőségből **106**.13 folytán következik, hogy

$$x.0 = 0,$$

s hasonlóképpen :

$$0.x = 0.$$

106.15. *Ha e egység-elem, azaz bármely x-re* $x.e=x$, *s ha y olyan elem, amelyre* $x.y=e$, *akkor* $y.x=e$. Az y elemnek megfelel ugyanis (9) szerint olyan z elem, amelyre $y.z=e$. Tehát

$$x = x.e = x(yz) = (xy)z = e.z\,;$$

ebből :

$$y.x = y\,(ez) = (ye)z = y.z = e.$$

106.16. *A számtest minden x elemére* $e.x = x$. Az előbbi bekezdés jelöléseit alkalmazva :

$$x.y = y.x = e, \quad y.z = z.y = e,$$

ebből :

$$e.x = (ee)x = [e(zy)]x = (ez)(yx) = x.e = x.$$

106.17. *A számtestben csak egy egység-elem van.* Ha ugyanis bármely x számra $x.e=x.e'=x$, akkor

$$e.e' = e \quad \text{és} \quad e'.e = e',$$

s mivel **106**.15 szerint $e.e'=e'.e$, tehát $e=e'$.

Az egység-elemet 1-gyel is fogjuk jelölni.

106.18. *Minden, 0-tól különböző x-nek egy és csak egy olyan y elem felel meg, amelyre* $x.y=e$. Ha ugyanis $x.y=x.z=e$, akkor **106**.15 szerint $z.x=e$, s ezért

$$z = z.e = z(xy) = (zx)y = e.y = y \quad (\mathbf{106}.16).$$

Az ilyen módon egyértelműen meghatározott y-t az *x-hez reciprok elem*nek nevezzük és x^{-1}-gyel jelöljük.

106.19. *Ha* $x \neq 0$, *s ha két y és z elemre fennáll az*

$$y.x = z.x$$

egyenlőség, akkor

$$y = z.$$

Ugyanis :

$$y = y.e = y\,(xx^{-1}) = (yx)x^{-1} = (zx)\,x^{-1} = z\,(xx^{-1}) = z.e = z.$$

Hasonlóképpen, *ha* $x \neq 0$, *akkor az*

$$x.y = x.z$$

egyenlőségből következik az

$$y = z$$

egyenlőség.

106.20. *Ha* $x.y=0$, *akkor* x *és* y *közül legalább az egyik* 0. Ha ugyanis $y \neq 0$, akkor

$$x = x.e = x.(y.y^{-1}) = (x.y).y^{-1} = 0.y^{-1} = 0.$$

106.21. *Ha* x *és* z *két tetszőleges elem, melyek közül* $x \neq 0$, *akkor az*

$$x.y = z$$

egyenletnek egy és csak egy y *megoldása van.* Szorozzuk meg ugyanis az egyenletet balról x^{-1}-gyel, adódik:

$$x^{-1}(x.y) = (x^{-1}.x).y = e.y = y = x^{-1}.z.$$

Az $x^{-1}.z$ elemet következő módon jelöljük:

$$x^{-1}.z = \frac{z}{x}$$

s a z elemnek az x elemmel való *baloldali hányados*ának nevezzük. *Az*

$$y.x = z$$

egyenletnek, ha $x \neq 0$, *ugyancsak egy és csak egy* y *megoldása van;* ez

$$y = z.x^{-1} = z/x,$$

melyet a z elemnek az x elemmel való *jobboldali hányados*ának nevezünk.

Nem kommutatív számtest esetében a $\frac{z}{x}$ és a z/x hányadosok általában különböző elemek; azonban **106**.15 és 17 szerint:

$$\frac{1}{x} = 1/x.$$

Ha $x \neq 0$ és $z \neq 0$, akkor tetszőleges y-ra

$$\frac{z}{x} \cdot \frac{y}{z} = \frac{y}{x};$$

ugyanis

$$\frac{z}{x} \cdot \frac{y}{z} = (x^{-1}.z).(z^{-1}.y) = x^{-1}(z.z^{-1})y = x^{-1}.y = \frac{y}{x}.$$

Ugyanazon feltételek mellett:

$$y/z.z/x = (y.z^{-1}).(z.x^{-1}) = y(z^{-1}.z)x^{-1} = y.x^{-1} = y/x.$$

A fenti meggondolással igazoltuk, hogy *az* (1)—(9) *feltételeknek eleget tevő számtestben korlátlanul elvégezhetők az alapműveletek, azaz képezhetjük két tetszőleges szám összegét, különbségét, bármely sorrendben vett szorzatát, s bármely számnak bármely, 0-tól különböző számmal való bal- és jobboldali hányadosát.*

106.22. Ha x a számtest eleme és n tetszőleges pozitív egész szám, akkor $n.x$-szel (vagy nx-szel) jelöljük a következő n-tagú összeget:

$$n.x = x + x + \ldots + x,$$

továbbá $-n.x$-szel az $n.(-x)$ szorzatot.

Ha valamely p egész számnak és a számtest e egység-elemének szorzata: $p.e = 0$, akkor a számtest minden x elemére: $p.x = 0$; ugyanis:

$$p.x = x + x + \ldots + x = e.x + e.x + \ldots + e.x =$$
$$= (e + e + \ldots + e).x = (p.e).x = 0,$$

mivel $p.e=0$ (**106**.14).

Értelmezés. Azt a legkisebb, pozitív p egész számot, amelyre $p.e=0$, a *számtest karakterisztikájának* nevezzük. Ha $p.e \neq 0$ minden p pozitív egész számra vonatkozóan, akkor a számtest karakterisztikája, értelmezés szerint 0.

Például a **103**.6-ban értelmezett véges projektív geometria számteste a 0, e elemekből áll, a következő műveleti szabályokkal:

$$0 + 0 = 0,\ 0 + e = e + 0 = e,\ e + e = 0,$$
$$0.0 = 0.e = e.0 = 0,\ e.e = e;$$

ennek a számtestnek karakterisztikája 2. A valós számok testéé 0.

106.23. *A számtest $n.e$ eleme felcserélhető a számtestnek minden x elemével.* Ugyanis:

$$x.(n.e) = x.(e + e + \ldots + e) = x.e + x.e + \ldots + x.e =$$
$$= e.x + e.x + \ldots + e.x = (e + e + \ldots + e).x = (n.e).x.$$

Legyen m olyan pozitív egész szám, melyre $m.e \neq 0$; ha x a számtest tetszőleges eleme, akkor az $m.y = x$ egyenletnek a számtestben egy és csak egy y megoldása van; ugyanis $m.y = (m.e).y$, s az

$(m.e).y = x$ egyenletnek egy és csak egy y megoldása van (**106**.21); ezt az elemet így jelöljük:

$$y = \frac{x}{m}.$$

A fentiek szerint

$$\frac{x}{m} = \frac{x}{(me)} = x/(me).$$

Meghatározásából következik, hogy

$$m \cdot \frac{x}{m} = \frac{m.x}{m} = x.$$

Ha m és n tetszőleges pozitív egész számok, és $m.e \neq 0$, akkor $\frac{n}{m} \cdot x$-szel jelöljük az

$$\frac{n}{m} \cdot x = \frac{n.x}{m}$$

elemet. Ha n és m különböző előjelű egész számok, és $m.e \neq 0$, akkor értelmezés szerint

$$\frac{n}{m} \cdot x = \left(-\frac{n}{m}\right) \cdot (-x).$$

A fentiekből következik:

106.24. *Ha m és n tetszőleges egész számok, és $m.e \neq 0$, akkor a számtest $\frac{n}{m} \cdot e$ eleme felcserélhető a számtest minden x elemével, azaz:*

$$\left(\frac{n}{m} \cdot e\right) \cdot x = x \cdot \left(\frac{n}{m} \cdot e\right) = \frac{n}{m} \cdot x$$

Továbbá, ha m, n, m', n' olyan egész számok, hogy $m.e \neq 0$, $m'.e \neq 0$, akkor a számtest bármely x és y elemére

$$\left(\frac{n}{m} \cdot x\right)\left(\frac{n'}{m'} \cdot y\right) = \frac{nn'}{mm'} \cdot (x.y).$$

Értelmezés. Két számtestet *izomorf*nak nevezünk, ha megadható elemeik között olyan kölcsönösen egyértelmű vonatkozás, amellyel bármely két elem összegének a megfelelő két elem összege, s bármely két elem valamely sorrendben vett szorzatának a megfelelő két elemnek ugyanabban a sorrendben vett szorzata felel meg.

A Desargues-*féle tétel alapján az egyenes pontjaira bevezetett összeadás és szorzás az egyenes pontjait mint egy számtest elemeit értel-*

mezi. Az alappontok különböző megválasztásának megfelelő számtestek egymással izomorfak (l. **106**.8).

Az egyenes pontjaival értelmezett számtest alapján bevezethetünk a síkban homogén (x_1, x_2, x_3) pontkoordinátákat (l. 40. §) s igazolhatjuk, hogy bármely egyenes

$$x_1.u_1 + x_2.u_2 + x_3.u_3 = 0$$

alakú egyenlettel állítható elő; ebben az egyenletben mind az x_i változók, mind az u_i együtthatók az illető számtest elemei. A **40**.1-ben adott levezetés változatlanul érvényes nem-kommutatív számtestek esetében is. (A 40. § további tárgyalásában már nem vettük figyelembe a nem-kommutatív számtesteket; nem lett volna indokolt például az osztás két különböző jelölése ottan, ahol csupán a valós számok kommutatív testéről volt szó.)

Ugyancsak értelmezhetünk a számtest alapján a térben homogén (x_1, x_2, x_3, x_4) pontkoordinátákat s igazolhatjuk, hogy minden síkot

$$x_1.u_1 + x_2.u_2 + x_3.u_3 + x_4.u_4 = 0$$

alakú egyenlet állít elő.

Projektív térgeometria megadott számtesttel.

106.25. Legyen **K** tetszőleges, kommutatív vagy nem-kommutatív számtest; nem-kommutatív számtest egyszerű példáját a *valós quaterniók* összessége nyujtja. A **K** számtest alapján értelmezünk egy projektív térgeometriát, melyben teljesülnek a **P I** axiómák; a Desargues-féle tétel alapján értelmezett műveletekkel az egyenes pontjaiból (egy U pontot elhagyva) számtestet alkotunk, s igazoljuk, hogy ez a megadott **K** számtesttel azonos. Következő tárgyalásunkban számon mindig a **K** számtest elemeit értjük.

*Pont*on értünk bármely olyan (x_1, x_2, x_3, x_4) számnégyest, amelynek nem minden eleme 0; ezt a pontot röviden x-szel jelöljük s az x_i számokat az x pont koordinátáinak nevezzük. *Sík*on értünk bármely olyan (u_1, u_2, u_3, u_4) számnégyest, amelynek nem minden eleme 0; ezt a síkot röviden u-val jelöljük, s az u_i számokat az u sík koordinátáinak nevezzük.

Az x és y *pontok* akkor és csak akkor *azonosak*, ha van olyan λ szám, melyre

$$x_i = \lambda y_i \qquad (i=1, 2, 3, 4);$$

ez esetben :

$$y_i = \lambda^{-1} x_i \quad (i=1, 2, 3, 4),$$

tehát a feltétel szimmetrikus a két pontra vonatkozóan. Az x_i és az y_i négyest ebben az esetben *aequivalens*nek nevezzük.

Az u és v *síkok* akkor és csak akkor *azonosak*, ha van olyan μ szám, melyre

$$u_i = v_i \mu, \quad v_i = u_i \mu^{-1} \quad (i=1, 2, 3, 4),$$

az u_i és a v_i négyest ebben az esetben *aequivalens*nek nevezzük.

Az x pont és az u sík *egyesített helyzet*ének feltétele értelmezés szerint :

$$\Sigma x_i u_i = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = 0.$$

Ha az x_i, illetve az u_i négyest rendre az aequivalens

$$y_i = \lambda x_i, \quad v_i = u_i \mu \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

négyessel helyettesítjük, az egyesített helyzet feltétele változatlanul érvényes marad, mivel :

$$\Sigma y_i v_i = \Sigma \lambda x_i u_i \mu = \lambda (\Sigma x_i u_i) \mu = 0.$$

Legyen x és y két különböző pont ; az általuk meghatározott *egyenes* pontjait értelmezés szerint a

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

négyesek állítják elő, melyekben λ, μ tetszőleges számok, de nem mindkettő 0.

Igazolni fogjuk, hogy az így értelmezett pontokra, egyenesekre és síkokra teljesülnek a **P I** axiómák.

Ha

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i$$

az x, y pontok által meghatározott egyenesnek x-től és y-tól különböző pontja, akkor (mivel $\mu \neq 0$)

$$y_i = - \mu^{-1} \lambda x_i + \mu^{-1} z_i,$$

tehát y az x, z pontok által meghatározott egyenesnek pontja.

Ha pedig

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i \quad \text{és} \quad t_i = \nu x_i + \varrho y_i$$

az x, y pontok által meghatározott egyenes két különböző pontja, melyek x-től és y-tól is különböznek, akkor a λ, μ, ν, ϱ, továbbá a

$(\mu^{-1}\lambda-\varrho^{-1}\nu)$ és $(\lambda^{-1}\mu-\nu^{-1}\varrho)$ számok valamennyien különböznek 0-tól s ezért x_i és y_i kifejezhető a következő képletekkel:

$$x_i=\lambda' z_i+\mu' t_i,\quad y_i=\nu' z_i+\varrho' t_i,$$

ahol

$$\lambda'=(\mu^{-1}\lambda-\varrho^{-1}\nu)^{-1}.\mu^{-1},\quad \mu'=-(\mu^{-1}\lambda-\varrho^{-1}\nu)^{-1}.\varrho^{-1},$$
$$\nu'=(\lambda^{-1}\mu-\nu^{-1}\varrho)^{-1}.\lambda^{-1},\quad \varrho'=-(\lambda^{-1}\mu-\nu^{-1}\varrho)^{-1}.\nu^{-1}.$$

Az egyenletrendszer megoldását például a helyettesítési módszerrel végezhetjük el; csupán arra kell ügyelnünk, hogy ne változtassuk meg a szorzat tényezőinek sorrendjét. Következőképpen igazolhatjuk, hogy a fenti képletekkel kifejezett x_i, y_i értékek kielégítik az egyenletrendszert. Nyilván fennállanak a következő egyenletek:

$$\lambda'\lambda+\mu'\nu=1,\quad \lambda'\mu+\mu'\varrho=0,$$
$$\nu'\lambda+\varrho'\nu=0,\quad \nu'\mu+\varrho'\varrho=1.$$

Az első és a második sorban álló egyenleteket szorozzuk meg balról λ-val, illetve μ-vel s adjuk össze az egymás alatt álló kifejezéseket; így kapjuk a következő egyenleteket:

$$(\lambda\lambda'+\mu\nu')\lambda+(\lambda\mu'+\mu\varrho')\nu=\lambda,$$
$$(\lambda\lambda'+\mu\nu')\mu+(\lambda\mu'+\mu\varrho')\varrho=\mu.$$

Ezekből:

$$-(\lambda\lambda'+\mu\nu'-1)=(\lambda\mu'+\mu\varrho').\nu\lambda^{-1}=(\lambda\mu'+\mu\varrho').\varrho\mu^{-1};$$

mivel $\varrho^{-1}\nu\neq\mu^{-1}\lambda$, ezért $\nu\lambda^{-1}\neq\varrho\mu^{-1}$, tehát $\lambda\mu'+\mu\varrho'=0$, és ugyanúgy: $\nu\lambda'+\varrho\nu'=0$. E szerint

$$\lambda\lambda'+\mu\nu'=1,\quad \lambda\mu'+\mu\varrho'=0,$$
$$\nu\lambda'+\varrho\nu'=0,\quad \nu\mu'+\varrho\varrho'=1.$$

Ebből következik továbbá:

$$\lambda x_i+\mu y_i=\lambda(\lambda' z_i+\mu' t_i)+\mu(\nu' z_i+\varrho' t_i)=(\lambda\lambda'+\mu\nu')z_i+(\lambda\mu'+\mu\varrho')t_i=z_i,$$
$$\nu x_i+\varrho y_i=\nu(\lambda' z_i+\mu' t_i)+\varrho(\nu' z_i+\varrho' t_i)=(\nu\lambda'+\varrho\nu')z_i+(\nu\mu'+\varrho\varrho')t_i=t_i.$$

A fentiek szerint x és y a z, t pontok által meghatározott egyeneshez tartoznak. Ebből következik, hogy *bármely két különböző pont egy és csak egy egyeneshez tartozik.* Igazoltuk tehát a **P I** csoport **a** axiómáját.

Az **a'** axióma igazolása a következő. Legyen u és v két különböző sík; feltehetjük, hogy például $u_1\neq 0$, $v_2\neq 0$ és $u_1-v_1v_2^{-1}u_2\neq 0$, $v_2-u_2u_1^{-1}v_1\neq 0$. Ha x_3 és x_4 két tetszőleges szám, de nem mindkettő 0, akkor az u és a v síknak közös pontja az az x pont, melynek x_1 és x_2 koordinátáit az x_3, x_4 koordinátákkal a következő képletek fejezik ki:

$$x_1=x_3(v_3v_2^{-1}u_2-u_3)(u_1-v_1v_2^{-1}u_2)^{-1}+x_4(v_4v_2^{-1}u_2-u_4)(u_1-v_1v_2^{-1}u_2)^{-1},$$
$$x_2=x_3(u_3u_1^{-1}v_1-v_3)(v_2-u_2u_1^{-1}v_1)^{-1}+x_4(u_4u_1^{-1}v_1-v_4)(v_2-u_2u_1^{-1}v_1)^{-1},$$

vagy rövidebben:

$$x_1 = x_3\lambda + x_4\mu, \quad x_2 = x_3\nu + x_4\varrho.$$

Viszont az u, v síkok bármely közös pontjának koordinátáit a fenti képletek fejezik ki, alkalmasan választott x_3, x_4 számokkal. Legyen (x_3, x_4) és (y_3, y_4) két *független számpár*, azaz két olyan számpár, melyre bármely 0-tól különböző σ számmal nem állanak fenn

$$x_3 = \sigma y_3, \quad x_4 = \sigma y_4$$

alakú egyenlőségek. Képezzük a fenti képletekkel az ezeknek megfelelő x_1, x_2, valamint y_1, y_2 számokat; az (x_1, x_2, x_3, x_4) és az (y_1, y_2, y_3, y_4) koordinátájú pontok különbözők, tehát x és y az u és a v síknak két különböző közös pontja.

Az x és az y pontot összekötő egyenes valamennyi pontja az u és a v síknak közös pontja (ezzel egyben igazoljuk a **d** axiómát is). Ha ugyanis:

$$z_i = \Lambda x_i + M y_i \qquad (i=1,2,3,4),$$

akkor

$$\Sigma z_i u_i = \Sigma(\Lambda x_i + M y_i)\, u_i = \Lambda \Sigma x_i u_i + M \Sigma y_i u_i = 0,$$

s ugyanúgy

$$\Sigma z_i v_i = 0,$$

Megfordítva, ha z az u és a v sík valamely közös pontja, akkor

$$z_1 = z_3\lambda + z_4\mu, \quad z_2 = z_3\nu + z_4\varrho.$$

Meghatározhatjuk a Λ, M számokat úgy, hogy

$$z_3 = \Lambda x_3 + M y_3, \quad z_4 = \Lambda x_4 + M y_4$$

legyen; ebből következik:

$$z_1 = z_3\lambda + z_4\mu = (\Lambda x_3 + M y_3)\lambda + (\Lambda x_4 + M y_4)\mu =$$
$$= \Lambda(x_3\lambda + x_4\mu) + M(y_3\lambda + y_4\mu) = \Lambda x_1 + M y_1,$$

s ugyanúgy

$$z_2 = \Lambda x_2 + M y_2$$

tehát a z pont az x és az y pontot összekötő egyeneshez tartozik. Ezzel igazoltuk az **a**′ axiómát. A **d**′ axiómát ugyanúgy igazoljuk, mint fent a **d** axiómát.

Az x és az y pontokat összekötő egyenesen legalább három pont fekszik, például az x, y és az $x + y$ pont, amelynek koordinátái: $x_i + y_i$; tehát a **b** axióma teljesül. Hasonlóan a **b**′ axióma is: ha u

és v két különböző sík, metszésvonalukon átmegy az $u+v$ sík is, amelynek koordinátái : u_i+v_i.

A **c** és a **c'** axióma igazolása : az u síknak három, nem egy egyenesen fekvő pontja (ha $u_1 \neq 0$) a következő :

$$(-u_2u_1^{-1}, 1, 0, 0), \ (-u_3u_1^{-1}, 0, 1, 0), \ (-u_4u_1^{-1}, 0, 0, 1).$$

Az x ponton átmenő, nem egy egyeneshez tartozó három sík (ha $x_1 \neq 0$) a következő :

$$(-x_1^{-1}x_2, 1, 0, 0), \ (-x_1^{-1}x_3, 0, 1, 0), \ (-x_1^{-1}x_4, 0, 0, 1).$$

Az **e** axióma igazolására vegyünk fel három, nem egy egyenesen fekvő x, y, z pontot. Ha az u sík tartalmazza az x és az y pontot, akkor az u_1, u_2, u_3, u_4 koordináták közül két alkalmasan választott koordinátával kifejezhetjük a másik kettőt olyan együtthatókkal, melyek x és y koordinátáinak függvényei. Tegyük fel például, hogy $x_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$, s hogy az (x_1, x_2), (y_1, y_2) számpárok függetlenek. Ez esetben :

$$u_1 = \Lambda u_3 + Mu_4, \quad u_2 = Nu_3 + Pu_4,$$

ahol

$$\Lambda = (x_1 - x_2y_2^{-1}y_1)^{-1}(x_2y_2^{-1}y_3 - x_3), \quad M = (x_1 - x_2y_2^{-1}y_1)^{-1}(x_2y_2^{-1}y_4 - x_4),$$
$$N = (y_2 - y_1x_1^{-1}x_2)^{-1}(y_1x_1^{-1}x_3 - y_3), \quad P = (y_2 - y_1x_1^{-1}x_2)^{-1}(y_1x_1^{-1}x_4 - y_4).$$

Ha a z pont is az u síkhoz tartozik, akkor

$$z_1(\Lambda u_3 + Mu_4) + z_2(Nu_3 + Pu_4) + z_3u_3 + z_4u_4 = 0,$$

azaz :

$$(z_1\Lambda + z_2N + z_3)u_3 + (z_1M + z_2P + z_4)u_4 = 0$$

Az utóbbi egyenletben nem lehet mind u_3, mind u_4 együtthatója 0, különben az x, y, z pontok egy egyenesen feküdnének. Meghatározhatjuk ugyanis a λ, μ számokat úgy, hogy

$$\lambda x_1 + \mu y_1 = z_1, \quad \lambda x_2 + \mu y_2 = z_2$$

legyen ; mivel

$$x_1\Lambda + x_2N + x_3 = 0, \quad y_1\Lambda + y_2N + y_3 = 0,$$

ezért

$$\lambda(x_1\Lambda + x_2N + x_3) + \mu(y_1\Lambda + y_2N + y_3) =$$
$$= (\lambda x_1 + \mu y_1)\Lambda + (\lambda x_2 + \mu y_2)N + (\lambda x_3 + \mu y_3) = 0.$$

Ha az u_3, u_4-re vonatkozó fenti egyenlet mindkét együtthatója 0 volna, akkor az utóbbi egyenletnek a

$$z_1\Lambda + z_2N + z_3 = 0$$

egyenlettel való összehasonlításából adódnék :

$$z_3 = \lambda x_3 + \mu y_3,$$

s hasonló módon

$$z_4 = \lambda x_4 + \mu y_4 ;$$

ebben az esetben az x, y, z pontok egy egyenesen feküdnének, feltevésünkkel ellentétben.

A

$$(z_1 A + z_2 N + z_3) u_3 + (z_1 M + z_2 P + z_4) u_4 = 0$$

egyenlet az (u_3, u_4) számpárt egy jobboldali arányossági tényezőtől eltekintve egyértelműen meghatározza, ez a számpár pedig u_1 és u_2 fenti kifejezése alapján egyértelműen meghatározza az (u_1, u_2, u_3, u_4) számnégyest. E szerint *három, nem egy egyenesen fekvő pont egy és csak egy síkhoz tartozik.* Ugyanígy adódik az **e'** axióma is, mely szerint *három síknak, ha nincs közös egyenese, van egy és csak egy közös pontja.*

Az **f**, **g'** és az **f'**, **g** axióma az **a**, **b**, **d**, **e**, illetve az **a'** **b'**, **d'** **e'** axióma következménye, ezeket nem kell külön igazolnunk.

A **h** és a **h'** axióma igazolására jegyezzük meg, hogy azok a pontok (illetve síkok), melyeknek koordinátái rendre

$$(1, 0, 0, 0), \quad (0, 1, 0, 0), \quad (0, 0, 1, 0), \quad (0, 0, 0, 1),$$

nem feküsznek egy síkban (illetve nem mennek egy ponton át).

Igazolnunk kell még, hogy *a* **K** *számtest alapján felépített projektív geometriában a* Desargues*-féle tétel segítségével értelmezett összeadás és szorzás izomorf vonatkozásban van a* **K** *számtestben eredetileg értelmezett összeadással és szorzással.* Végezzük el ezeket a műveleteket az $x_4=0$ síkban az $x_1=0$ egyenesen. Az $x_4=0$ sík pontjait az (x_1, x_2, x_3) számhármasokkal állítjuk elő. Az $x_4=0$ síkban fekvő tetszőleges egyenest

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$$

alakú egyenlet állít elő, mely az illető egyenesen átmenő tetszőleges, az $x_4=0$-tól különböző síknak

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = 0$$

egyenletéből az $x_4 = 0$ helyettesítéssel származik.

Az *összeadás* értelmezésére vegyük fel alappontoknak az O (0, 0, 1) és az U (0, 1, 0) pontokat ; legyen o az $x_2=0$ egyenes, u az $x_3=0$, és u' az $x_1-x_3=0$ egyenes. Jelöljük X-szel és Y-nal a $(0, x, 1)$ és a $(0, y, 1)$

koordinátájú pontokat. (A következő szerkesztéshez l. például a 158. ábrát, 540. o.) Az X pontot az o, u' egyenesek C (1, 0, 1) metszéspontjával összekötő egyenes egyenlete :

$$x_1x + x_2 - x_3x = 0,$$

ennek s az u (x_3=0) egyenesnek B metszéspontjához tartozó koordináták : (1,—x, 0). Az Y pontot az o, u egyenesek A(1, 0, 0) metszéspontjával összekötő egyenes egyenlete :

$$x_2 - x_3y = 0\,;$$

ennek és az u' egyenesnek D metszéspontjához tartozó koordináták : (1, y, 1). A BD egyenes egyenlete

$$x_1x + x_2 - x_3(x + y) = 0,$$

s ennek az $x_1 = 0$ egyenessel való metszéspontjához tartozó koordináták :

$$(0, x + y, 1).$$

A *szorzás* értelmezésére (lásd például a 159. ábrát, 541. o.) vegyük fel harmadik alappontnak az E (0, 1, 1) pontot s e egyenesnek az

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

egyenlettel előállított egyenest. Az e és u egyenesek metszéspontja : B(1, —1, 0), az e és o egyenesek metszéspontja : A(1, 0, 1). Az XB egyenes egyenlete :

$$x_1 + x_2 - x_3x = 0,$$

ennek az o(x_2=0) egyenessel való metszéspontja : $D(x, 0, 1)$. Az YA egyenes egyenlete :

$$x_1y + x_2 - x_3y = 0,$$

ennek az u egyenessel való metszéspontja : C(1, —y, 0).

A CD egyenes egyenlete :

$$x_1y + x_2 - x_3(x.y) = 0\,;$$

a CD egyenes és az x_1=0 egyenes metszéspontjához tartozó koordináták a fentiek szerint :

$$(0, x.y, 1).$$

Meggondolásunk eredményét a következő tételben mondjuk ki :

106.26. *Tetszőleges* **K** *számtesthez megadható olyan projektív térgeometria, amelynek számteste megegyezik* **K**-*val.*

106.27. Ha a **K** számtest nem kommutatív, mint például a valós quaterniók számteste, akkor a **K** számtest alapján meghatározott projektív geometriában nem érvényes a PAPPUS-féle tétel (l. **106**.9) E szerint:

A PAPPUS-*féle tétel nem vezethető le a tér összetartozási axiómáiból.*

107. §. A Pappus-féle tétel.

Egyenesek projektív leképezéseinek előállítása perspektivitásokkal.

Következő tárgyalásunk alapjául vagy a tér összetartozási axiómáit vesszük fel, vagy pedig a sík összetartozási axiómáit és a DESARGUES-féle tételt; az utóbbi esetben feltesszük, hogy az összes pontok és egyenesek egy síkhoz tartoznak.

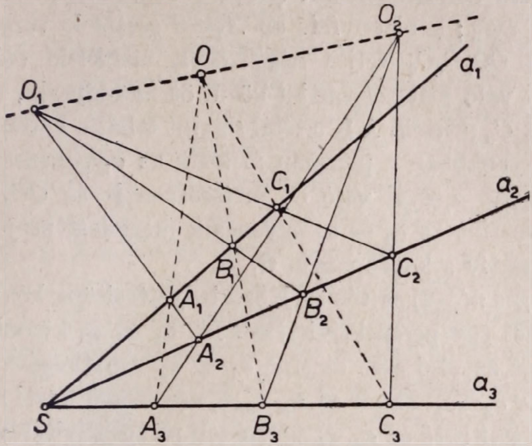
Legyen a és a' két különböző egyenes; a két egyenes projektív vonatkozása értelmezés szerint

az $a_1 = a$ és a_2 egyenesek O_1 középpontú,
az a_2 és a_3 egyenesek O_2 középpontú,
. . . .
az a_n és $a_{n+1}=a'$ egyenesek O_n középpontú

perspektivitásának a szorzata; $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ tetszőleges olyan egyenesek, amelyek közül a_ν és $a_{\nu+1}$ különböznek egymástól, de metszik egymást ($\nu=1, 2, \ldots, n$); O_ν tetszőleges pontja az $a_\nu a_{\nu+1}$ síknak, mely nem tartozik sem az a_ν, sem az $a_{\nu+1}$ egyeneshez.

107.1. Tétel. *Ha az $a=a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}=a'$ egyenesek egy S ponton mennek át, akkor az a, a' egyenesek vonatkozása perspektív.*

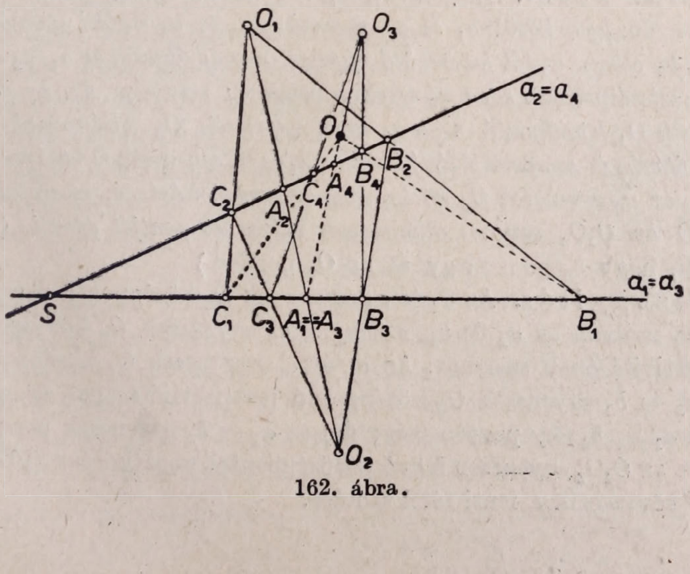
Bizonyítás. Tegyük fel *először*, hogy $n=2$ és $a_1 \neq a_3$. Ha $O_1=O_2$, akkor az a_1 és a_3 egyenesek megadott projektív vonatkozása megegyezik a_1-nek az $O_1=O_2$ pontból a_3-ra való vetítésével. Ha $O_1 \neq O_2$, legyen A_1, B_1, C_1 az a_1 egyenes három tetszőleges pontja, mely különbözik S-től, s legyenek A_2, B_2, C_2 és A_3, B_3, C_3 az a_2 és az a_3 egyenes megfelelő pontjai. Az $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ háromszögek közül bármely kettő perspektív az S középpontra vonatkozóan. A DESARGUES-féle tétel szerint tehát a megfelelő oldalak metszéspontjai egy egyenesen feküsznek, vagyis az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 oldalak O_1 metszéspontja s az A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 oldalak O_2 metszéspontja által meghatározott O_1O_2 egyenes tartalmazza az A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 egyenesek közül bármely kettőnek a metszéspontját (161. ábra). Más szóval az A_1A_3 és B_1B_3, egyenesek O metszéspontján átmegy az a_1 egyenes bármely C_1 pontját az a_3 egyenes megfelelő C_3 pontjával összekötő egyenes.



161. ábra.

E szerint *az a_1, a_3 egyenesek megadott projektív vonatkozása perspektív s középpontja, O az O_1O_2 egyenesen fekszik.*

Tegyük fel *másodszor,* hogy $n=3$, és $a_1=a_3$, $a_2=a_4$. Az O_1O_2 egyenesnek a_1-gyel való metszéspontját jelöljük A_1-gyel s az ennek az a_2, a_3, a_4 egyeneseken megfelelő pontokat A_2, $A_3=A_1$, A_4-gyel.



162. ábra.

Legyen B_1 és C_1 az a_1 egyenes két pontja, mely különbözik A_1-től és S-től, s legyenek B_2, B_3, B_4, illetve C_2, C_3, C_4 az a_2, a_3, a_4 egyeneseken megfelelő pontok. Jelöljük O-val a B_1B_4 egyenesnek az O_3A_3 egyenessel való metszéspontját. (Lásd a 162. ábrát, mely az $A_1 \neq S$ esetnek felel meg; a bizonyítás az $A_1=S$ esetre is vonatkozik.) Az $O_1O_2B_2C_2$ és $OO_3B_4C_4$ teljes négyszögek megfelelő oldalainak az a_1 egyenessel való metszéspontjai közül öt megegyezik, ezek t. i. az S, A_1, B_1, B_3, C_3 pontok. A **8**.3 tétel szerint tehát a hatodik megfelelő oldalak is ugyanabban a pontban metszik az a_1 egyenest, vagyis az O_1C_2 egyenesnek a_1-gyel való C_1 metszéspontja az OC_4 egyeneshez tartozik. E szerint az a_1 és a_4 egyenesek megadott projektív vonatkozása perspektív s középpontja O.

Tetszőleges $n(\geqq 2)$ esetén sorjában helyettesítünk két vagy három perspektivitást egy perspektivitással. Ha a_1, a_2, a_3 különböznek egymástól, akkor az első eset szerint a_1 és a_3 vonatkozása perspektív. Ha $a_1=a_3$, de $a_2 \neq a_4$, akkor az a_2, a_3, a_4 egyenesek közti két perspektivitás helyettesíthető az a_2, a_4 egyenesek perspektivitásával, továbbá az a_1, a_2, a_4 egyenesek közti két perspektivitás az a_1 és a_4 közti perspektivitással. Ha pedig $a_1=a_3$, $a_2=a_4$, akkor az első három perspektivitást helyettesíthetjük a_1 és a_4-nek egy perspektivitásával, a második esetnek megfelelően. Ezzel az eljárással eljutunk végül az $a_1=a$ és $a_{n+1}=a'$ egyenesek perspektív vonatkozásához, amely megegyezik a megadott projektív leképezéssel.

107.2. Tétel. *Legyen a_1, a_2, a_3 három, közös pont nélküli egyenes, amelyek közül a_1 és a_2, valamint a_2 és a_3 metszi egymást, s legyen b_2 olyan, a_1-től különböző egyenes, amely átmegy az a_1, a_2 egyenesek metszéspontján s az a_3 egyenes valamely pontján. Az a_1 és a_2 egyenesek O_1 középpontú, s az a_2 és a_3 egyenesek O_2 középpontú perspektivitásának szorzata előállítható az a_1 és b_2 egyenesek O középpontú, s a b_2 és a_3 egyenesek O_2 középpontú perspektivitásának szorzataként, ahol O az O_1O_2 egyenes alkalmasan választott pontját jelenti.* (Feltesszük, hogy b_2 nem megy át az O_2 ponton.)

Bizonyítás. Az a_2 és a_3 egyenesek O_2 középpontú perspektivitása nyilván az a_2 és b_2, s a b_2 és a_3 egyenesek O_2 középpontú perspektivitásának szorzata. Az a_1 és a_2 egyenesek O_1 középpontú, s az a_2 és b_2 egyenesek O_2 középpontú perspektivitásának szorzata (mivel a_1, a_2, b_2 egy ponton megy át) az a_1 és b_2 egyenesek perspektivitása az O_1O_2 egyenesen fekvő O középpontra vonatkozóan (**107**.1). Ebből következik a fenti tétel állítása.

107.3. Tétel. *Két különböző a és a' egyenes bármely projektív vonatkozása előállítható (az a és a' egyenesek közös b metszőjének s az O O' pontoknak alkalmas megválasztásával) az a és b egyenesek O középpontú, s a b és a' egyenesek O' középpontú perspektivitásának szorzataként.*

Bizonyítás. Legyenek $a=a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}=a'$ azok az egyenesek, amelyek közül két-két egymásra következőnek rendre az $O_1, O_2, \ldots, O_n$ középpontra vonatkozó perspektivitása származtatja a és a' megadott projektív vonatkozását; legyen $n>2$, különben a tétel állítása nyilvánvaló. Feltehetjük, hogy bármely három egymásután következő $a_\nu, a_{\nu+1}, a_{\nu+2}$ egyenesnek nincs közös pontja; ellenkező esetben elhagyjuk $a_{\nu+1}$-et, mivel a_ν és $a_{\nu+2}$ vonatkozása is perspektív (**107**.1). Feltehetjük azt is, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ egyenesek valamennyien különböznek egymástól; ellenkező esetben, ha például $a_\nu=a_\mu$, akkor helyettesítjük a_ν-t a **107**.2 tétel szerint egy a'_ν egyenessel, amely különbözik a_μ-től. Jelöljük b_2-vel azt az egyenest, amely a_1 és a_2 metszéspontját a_3 és a_4 metszéspontjával köti össze. Ha b_2 nem megy át az O_2 ponton, akkor a_1 és a_3 projektív vonatkozását (mely az a_1 és a_2 s az a_2 és a_3 közti perspektivitások szorzata) előállíthatjuk az a_1 és b_2 s a b_2 és a_3 egyenesek perspektív vonatkozásainak szorzataként (**107**.2), azaz helyettesíthetjük a fenti sorozatban a_2-t b_2-vel. A b_2 és a_3 s az a_3 és a_4 egyenesek perspektív vonatkozásainak szorzata, mivel a három egyenes egy ponton megy át, a b_2 és a_4 egyenesek perspektív vonatkozása (**107**.1). E szerint elhagyhatjuk a_3-t, vagyis az eredetileg megadott $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n+1}$ sorozatban az a_2, a_3 egyeneseket helyettesíthetjük egy b_2 egyenessel. Ha azonban b_2 átmegy az O_2 ponton, akkor a_2-t (**107**.2 szerint) helyettesítjük egy olyan c_2 egyenessel, amely átmegy az a_2, a_3 egyenesek metszéspontján s az a_1 egyenes valamely pontján, de nem azonos a_3-mal és nem megy át az O_1 ponton; ennek megfelelően O_2-t egy O'_2 ponttal helyettesítjük. Az a_1, c_2 egyenesek metszéspontját az a_3, a_4 egyenesek metszéspontjával összekötő egyenes nem megy át az O'_2 ponton, mert különben az a_1, a_2 egyenesek metszéspontjának is, s az a_1, c_2 egyenesek metszéspontjának is az a_3 egyenesen ugyanaz a pont, t. i. az a_4 egyenessel való metszéspont felelne meg, s ez ellenmondás. A fenti eljárást alkalmazhatjuk tehát az a_1, c_2, a_3, a_4 egyenesekre s c_2-t és a_3-t helyettesíthetjük egy b_2 egyenessel. Ilyen módon csökkenthetjük a közvetítő egyenesek számát mindaddig, míg eljutunk az a, a' egyenesek megadott projektív vonatkozásának két perspektivitás szorzataként való előállításához.

Ha az a, a' egyenesek egy síkhoz tartoznak, akkor a fenti bizonyítás eredménye a **6**.7 tétel.

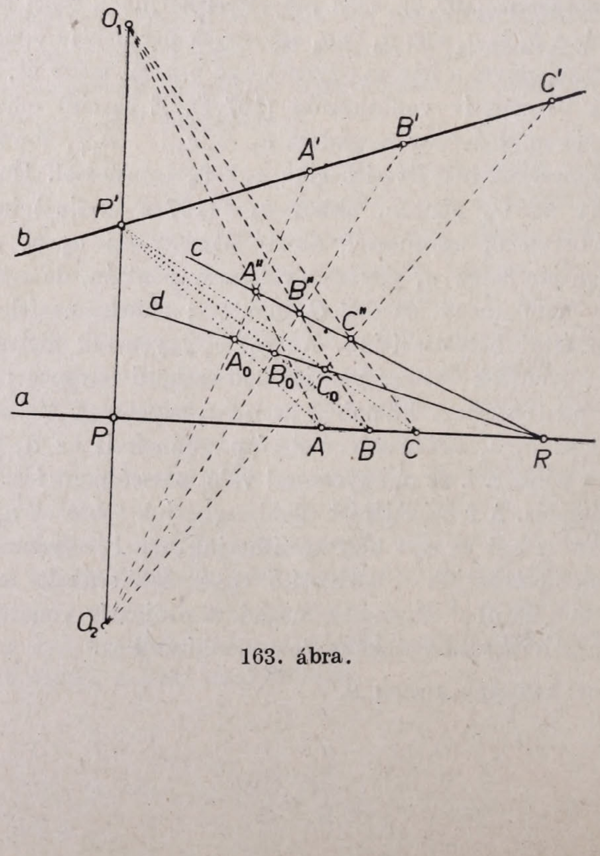
Ha a és a' torz egyenesek, s ha ezeknek megadott projektív vonatkozását előállítjuk az a és b egyenesek O középpontú, s a b és a' egyenesek O' középpontú perspektivitásának szorzataként, akkor a két perspektivitás szorzata megegyezik az a egyenesnek az OO' egyenesről a'-re való vetítésével; a fenti bizonyítás ebben az esetben a **6**.1 tételt adja.

A **6**.1 és 7 tételnek a 6. §-ban adott bizonyításában felhasználtuk az egyenesek projektív vonatkozásainak alaptételét (**5**.5); a fenti levezetésben nem alkalmaztuk az **5**.5 tételt.

A fenti tárgyalást VEBLEN és YOUNG könyve nyomán adtuk.

107.4. Tétel. *Két egymást metsző egyenes bármely projektív vonatkozása előállítható két olyan perspektivitás szorzataként, amelyek középpontjai ezekhez az egyenesekhez tartoznak és egymásnak felelnek meg a megadott projektív vonatkozásnál.*

Bizonyítás (163. ábra). Az a egyenesnek a b egyenesre való projektív leképezését a **107**.3. tétel értelmében állítsuk elő két per-



163. ábra.

spektivitás szorzataként olyan módon, hogy az a egyenest az (a, b) síkban fekvő c egyenesre vetítjük egy O_1 pontból s c-t b-re vetítjük egy O_2 pontból. Legyen A, B, C az a egyenes három tetszőleges pontja, amelyek közül A-t és B-t változatlannak, C-t változónak tekintjük; legyenek A'', B'', C'' és A', B', C' a c és a b egyenesen megfelelő pontok. Jelöljük P'-vel az O_1O_2 egyenesnek b-vel való metszéspontját, továbbá A_0, B_0, C_0-val a $P'A$ és O_2A', a $P'B$ és O_2B' s a $P'C$ és O_2C' egyenespárok metszéspontját. Az $AA''A_0$ és $BB''B_0$ háromszögek perspektívek az O_1O_2P' tengelyre, s ezért a DESARGUES-féle tétel szerint egy középpontra vonatkozóan is; az A_0B_0 egyenes átmegy tehát az $a{=}AB$ és $c{=}A''B''$ egyenesek R metszéspontján. Hasonlóképpen B_0C_0 is átmegy az R ponton, vagyis az A_0, B_0, C_0 pontok egy d egyenesen feküsznek. A megadott projektív leképezést e szerint előállíthatjuk olyan módon, hogy az a egyenest b-nek P' pontjából d-re, s d-t az O_2 pontból b-re vetítjük. Ugyanilyen módon helyettesíthetjük O_1-t a $P'O_1$ és a egyenesek P metszéspontjával; ennek megfelelően a d egyenest azzal az e egyenessel kell helyettesíteni, amely a PA' és $P'A$ egyenesek metszéspontját a PB' és $P'B$ egyenesek metszéspontjával köti össze. Az a és b egyenesek megadott projektív vonatkozása az a és e egyenesek P' középpontú, s az e és b egyenesek P középpontú perspektivitásának szorzata.

A PAPPUS-féle tétellel aequivalens tételek.

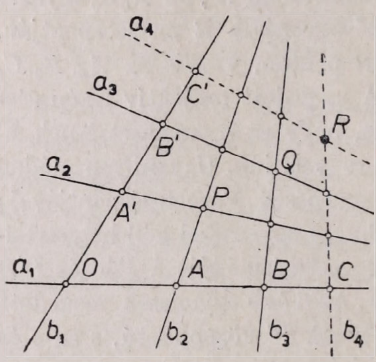
107.5. Tétel. *A projektív tér összetartozási axiómái alapján aequivalens egymással a* PAPPUS-*féle tétel, a torz egyenesek közös metszőire vonatkozó tétel* (**6**.2) *és az egyenesek projektív vonatkozásainak alaptétele* (**5**.5).[1]

Bizonyítás. Ha érvényes az egyenesek projektív vonatkozásainak alaptétele, vagyis ha két egyenes két olyan projektív vonatkozása, mely három-három pontban megegyezik, azonos egymással, akkor érvényes a torz egyenesek metszőire vonatkozó **6**.2 tétel, továbbá a PAPPUS-féle tétel (**6**.10); az utóbbi két tételt a 6. §-ban a **P I** axiómák alapján az **5**.5 tételből vezettük le.

[1] A következő tárgyalásban feltehetjük, hogy *egy egyenesen legalább négy különböző pont fekszik.* Ellenkező esetben ugyanis mindhárom idézett tétel tartalmatlan volna, azaz triviálisan teljesülne (**5**.5 és **6**.10), illetve feltételei nem valósulhatnának meg (**6**.2).

a) Tegyük fel, hogy érvényes a **6**.2 tétel; legyen a_1, a_2, a_3 három páronkint torz egyenes, b_1, b_2, b_3, b_4 ezeknek négy közös metszője; legyen továbbá a_4 a b_1, b_2, b_3 egyenesek valamely közös metszője. A **6**.2 tétel szerint a_4-nek és b_4-nek is van közös pontja. Ennek a tételnek s a **P I** axiómáknak alapján bebizonyítjuk a Pappus-féle tételt.

Legyen a_1 és b_1 az O ponton átmenő két egyenes, s legyen A, B, C az a_1 egyenesnek, A', B', C' a b_1 egyenesnek három-három tetszőleges egymástól és O-tól különböző pontja. Az A' és B' ponton át két, egymáshoz és a_1-hez torz a_2 és a_3 egyenest fektetünk; legyenek b_2, b_3, b_4 az a_1, a_2, a_3 egyeneseknek az A, B, C ponton átmenő közös metszői, végül a_4 a b_1, b_2, b_3 egyeneseknek a C' ponton átmenő közös metszője; a **6**.2 tétel szerint a_4 és b_4 is metszi egymást (164. ábra).



164. ábra.

Jelöljük az a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4 pontot rendre P, Q, R-rel. A P pont nem fekszik az (a_1, b_1) síkban, mivel az $a_1 = OA$ és $a_2 = A'P$ egyenesek torz helyzetűek. A PQ egyenes és az AB' egyenes az (a_3, b_2) síkban fekszik, a két egyenes metszi tehát egymást. Ugyancsak metszik egymást az (a_2, b_3) síkban fekvő PQ és $A'B$ egyenesek is. E szerint a PQ egyenesnek az (a_1, b_1) síkkal való metszéspontja az AB' és $A'B$ egyenesek C'' metszéspontjával azonos. Hasonló meggondolással kapjuk, hogy a QR, illetve a PR egyenesnek az (a_1, b_1) síkkal közös pontja a BC' és $B'C$ egyenesek A'' metszéspontjával, illetve az AC' és $A'C$ egyenesek B'' metszéspontjával azonos. A P, Q, R pontok nem feküsznek egy egyenesen; ellenkező esetben ennek az egyenesnek s az (a_1, b_1) síknak metszéspontjával egybeesnék az A'', B'', C'' pont, ezt pedig kizárja az a feltevésünk, hogy A', B', C' egymástól és O-tól különböző pontok. A P, Q, R pontok meghatároznak tehát egy síkot; ennek a síknak az (a_1, b_1) síkkal való metszésvonalán, azaz egy egyenesen feküsznek az A'', B'', C'' pontok; ez a Pappus-féle tétel állítása.

b) Tegyük fel a Pappus-féle tételt; bebizonyítjuk a **6**.2 tételt. Legyen a_1, a_2, a_3 három, páronkint torz egyenes, b_1, b_2, b_3, b_4 ezeknek négy (egymástól különböző) közös metszője, továbbá a_4 a b_1, b_2, b_3

egyenesek valamely közös metszője. Jelöljük O, A, B, C-vel az a_1 egyenesnek a b_1, b_2, b_3, b_4 egyenessel való metszéspontját ; A', B', C'-vel a b_1 egyenesnek a_2, a_3, a_4-gyel való metszéspontját ; legyen továbbá $P=a_2b_2$ és $Q=a_3b_3$. Az $(AB', A'B)$, $(BC', B'C)$ és $(AC', A'C)$ egyenespárok C'', A'', B'' metszéspontja a PAPPUS-féle tétel szerint egy egyenesen fekszik ; ennek az egyenesnek van a PQ egyenessel egy közös pontja, t. i. C'' (l. az *a)* alatti meggondolást). Az egymást metsző $A''B''C''$ és PQ egyenesek meghatároznak egy π síkot. Az $A''Q$ és $B''P$ egyenesek ehhez a síkhoz tartoznak, s mindkettő metszi a π síkhoz nem tartozó a_4 és b_4 egyenest ; például : $A''Q$ az (a_4, b_3) síkban fekszik, mivel $Q=a_3b_3$ és mert az A'' pont a $B=a_1b_3$, $C'=a_4b_1$ pontokat összekötő (s ezért az (a_4, b_3) síkban fekvő) BC' egyeneshez tartozik. Az $A''Q$ és a $B''P$ egyenesek metszéspontja tehát közös pontja az a_4 és a b_4 egyenesnek.

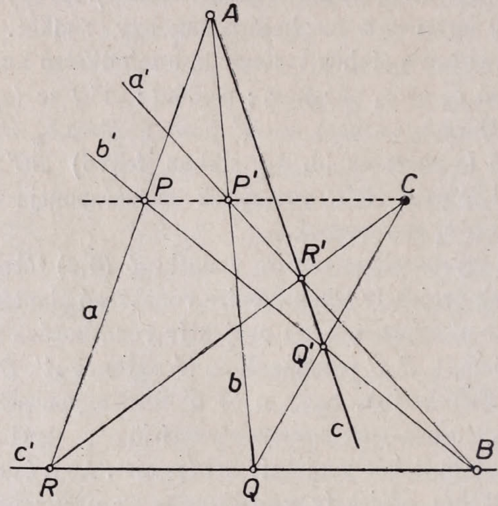
c) A torz egyenesek metszőire vonatkozó (**6**.2) tételből levezetjük az egyenesek projektív leképezéseire vonatkozó alaptételt. Tegyük fel, hogy az a és a' egyenesek két projektív vonatkozása az a egyenes három különböző A, B, C pontjának az a' egyenes A', B', C' pontját felelteti meg. Feltehetjük, hogy a és a' torz egyenesek ; ellenkező esetben a'-t egy a-hoz torz egyenesre vetítjük s ezzel a vetítéssel szorozzuk a megadott két projektív leképezést. Az a és a' torz egyenesek megadott két projektív vonatkozása az a egyenesnek egy b, illetve b' egyenesről az a' egyenesre való vetítésével származtatható (**107**.3). Feltesszük, hogy b és b' különbözik egymástól ; ellenkező esetben a bebizonyítandó állítás nyilvánvaló volna. Az AA', BB', CC' torz egyeneseknek négy közös metszője a, a', b, b'. Ha D az a egyenes tetszőleges pontja, s D' ennek a b egyenesről a'-re való vetülete, akkor a DD' egyenes közös metszője az a, a', b egyeneseknek. A **6**.2 tételből következik, hogy DD' metszi a b' egyenest is ; más szóval a b' egyenesről való vetítés is a D pontnak a D' pontot felelteti meg, tehát a két projektív vonatkozás azonos egymással.

Az **5**.5 tételnek a PAPPUS-féle tétellel való aequivalenciáját illetően l. **107**.11.

A PAPPUS-féle tételnek a síkbeli dualitás elve szerint a következő tétel felel meg, amely a sík összetartozási axiómái alapján levezethető a PAPPUS-féle tételből :

107.6. Tétel. *Ha A és B két különböző pont, s ha a, b, c az A ponton, a', b', c' a B ponton átmenő, egymástól s AB-től különböző* *egyenesek (valamennyi egy a síkban), akkor az ab' és $a'b$ pontokat, a bc' és $b'c$ pontokat s az ac' és $a'c$ pontokat összekötő egyenesek egy C ponton mennek át.*

Bizonyítás. (165. ábra). Jelöljük az ab', $a'b$, bc', $b'c$, ac', $a'c$ pontokat rendre P, P', Q, Q', R, R'-vel. Alkalmazzuk a Pappus-féle tételt a c egyenes A, Q', R', s a c' egyenes B, R, Q pontjaira ; e szerint



165. ábra.

az $AR=a$ és $BQ'=b'$ egyenesek P metszéspontja, az $AQ=b$ és $BR'=a'$ egyenesek P' metszéspontja, s a $Q'Q$ és RR' egyenesek C metszéspontja egy egyenesen fekszik ; más szóval a PP', QQ', RR' egyenesek egy C ponton mennek át.

A Pappus-féle tételnek a térbeli dualitás elve szerint a következő tétel felel meg, amely levezethető a Pappus-féle tételből a tér összetartozási axiómái alapján :

107.7. Tétel. *Ha a és b két különböző egyenes, amely egy o síkhoz tartozik, s ha α, β, γ az a egyenesen, α', β', γ' a b egyenesen átmenő, egymástól és o-tól különböző síkok, akkor az α'', β'', γ'' síkoknak, melyeket rendre a (β, γ') és (β', γ), az (α, γ') és (α', γ), s az (α, β') és (α', β) egyenespárok határoznak meg, van egy közös c egyenese.*

Bizonyítás. Messük a tételben leírt alakzatot tetszőleges olyan síkkal, amely nem megy át a és b közös pontján s alkalmazzuk a metszésidomra a **107.**6 tételt ; így adódik a **107.**7 tétel állítása.

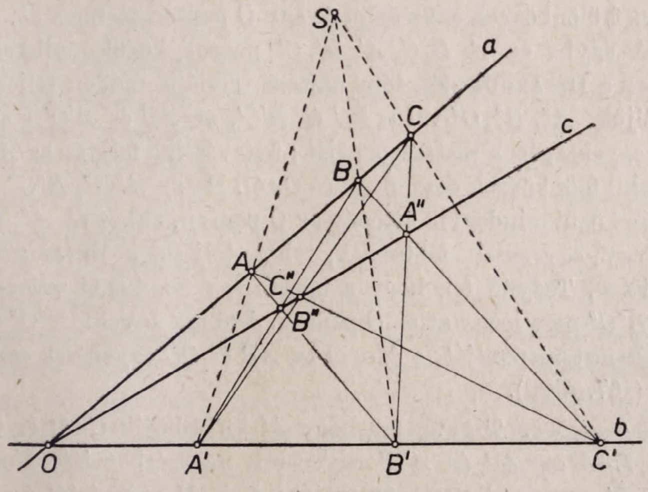
Megjegyzés. Fenti eredményeink szerint *a projektív tér-geometria dualitási elve érvényes marad, ha a* **P I** *axiómákhoz további alaptételként hozzávesszük a* PAPPUS-*féle tételt.*

A PAPPUS- és a DESARGUES-féle tétel.

Miként már fent megjegyeztük (**106**.27), nem vezethető le a PAPPUS-féle tétel a projektív térgeometria összetartozási axiómáiból, tehát a DESARGUES-féle tételből sem. De levezethető a DESARGUES-féle tételből a PAPPUS-*féle tétel perspektív esete:*

107.8. Tétel. *Ha az O ponton átmenő a és b egyenesnek három-három, egymástól és O-tól különböző pontja A, B, C és A', B', C', s ha az AA', BB', CC' egyenesek egy S ponton mennek át, akkor a BC' és $B'C$, az AC' és $A'C$ s az AB' és $A'B$ egyenespárok A'', B'', C'' metszéspontjai egy egyeneshez tartoznak.*

Bizonyítás. (166. ábra). Az $AB'C$ és $A'BC'$ háromszögek perspektívek az S középpontra, s ezért a DESARGUES-féle tétel



166. ábra.

szerint egy c egyenesre vonatkozóan is. Tehát a c egyenesen feküsznek az AB' és $A'B$, a BC' és $B'C$ s az AC és $A'C'$ egyenespárok metszéspontjai, vagyis a C'', A'', O pontok. Hasonlóképpen perspektívek az ABC' és $A'B'C$ háromszögek az S középpontra vonatkozóan, s ezért a B'', A'', O pontok egy egyenesen feküsznek. Ebből következik, hogy az A'', B'', C'' pontok a c egyenesen feküsznek.

Hasonló meggondolással adódik a következő tétel is :

107.9. Tétel. *Ha az O ponton átmenő a és b egyeneseknek három-három, egymástól és O-tól különböző pontja A, B, C* és *A', B', C', s ha az AB' és $A'B$ s a BC' és $B'C$ egyenespárok metszéspontját összekötő egyenes átmegy az O ponton, akkor ezen az egyenesen fekszik az AC' és $A'C$ egyenespár metszéspontja is.*

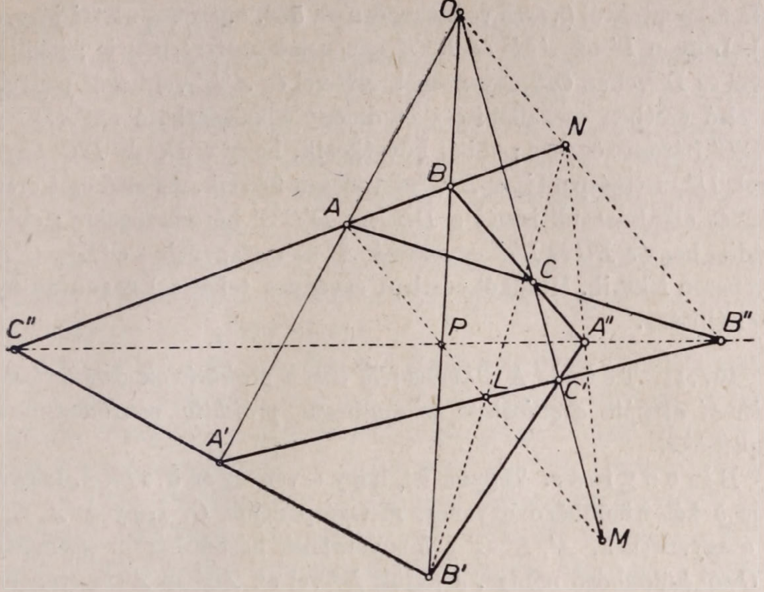
Bebizonyítjuk a következő tételt (speciális esetét l. első kötet, 238. o.) :

107.10. Hessenberg-féle tétel. *A* Desargues-*féle tétel levezethető a* Pappus-*féle tételből a sík összetartozási axiómái alapján.*

Bizonyítás. Feltesszük, hogy az összes pontok és egyenesek egy síkban feküsznek. Legyen A, B, C nem egy egyenesen fekvő három pont, A', B', C' az előbbi három ponttól különböző, s nem egy egyenesen fekvő három pont. Tegyük fel, hogy az AA', BB', CC' egyenesek különböznek egymástól és egy O ponton mennek át, amely nem esik egybe az A, B, C, A', B', C' pontok közül egyikkel sem. (Különben a Desargues-féle tétel állítása triviális módon teljesülne.)

Jelöljük A'', B'', C''-vel a BC és $B'C'$, az AC és $A'C'$ s az AB és $A'B'$ egyenespárok metszéspontját ; feltevéseink folytán az A'', B'', C'' pontok különböznek egymástól és O-tól. Ha az $A''B''$, $B''C''$, $A''C''$ egyenesek közül mindegyik átmegy az O ponton, akkor az A'', B'', C'' pontok egy egyenesen feküsznek, tehát teljesül a Desargues-féle tétel állítása. Tegyük fel, hogy a három egyenes közül valamelyik, például $B''C''$ nem megy át az O ponton. Jelöljük P-vel a $B''C''$ és OB egyenesek metszéspontját, s M-mel az AP és OC egyenesek metszéspontját (167. ábra).

Első eset. Tegyük fel, hogy M különbözik C-től és C'-től. Jelöljük L-lel az AP és $A'C'$ egyenesek metszéspontját, N-nel az AB és LB' egyenesek metszéspontját ; L és N egymástól és B'-től különböző pontok. Alkalmazzuk a Pappus-féle tételt az $AA'O$ és $B'NL$ ponthármasokra ; adódik, hogy az $AN=AB$ és $B'A'$ egyenesek C'' metszéspontja, az AL és $B'O$ egyenesek P metszéspontja s az $A'L=A'C'$ és ON egyenesek metszéspontja egy egyenesen fekszik ; más szóval a $C''P=C''B''$, az $A'C'$ és ON egyenesek egy ponton men-



167. ábra.

nek át. Mivel $C''B''$ és $A'C'$ metszéspontja B'', ez azt jelenti, hogy *az* O, N, B'' *pontok egy egyenesen feküsznek.*

Alkalmazzuk ismét a PAPPUS-féle tételt az ABN és OMCponthármasokra ; ebből adódik, hogy az AM és OB egyenesek P metszéspontja, az AC és ON egyenesek metszéspontja, mely az előbbi bekezdés szerint a B'' pont, s a BC és MN egyenesek metszéspontja egy egyenesen fekszik. Ez azt jelenti, hogy a $PB''=C''B''$ *egyenes átmegy a* BC *és* MN *egyenesek metszéspontján.*

Alkalmazzuk végül a PAPPUS-féle tételt az OMC' és $LB'N$ ponthármasokra. Ebből következik, hogy az OB' és LM egyenesek P metszéspontja, az ON és $LC'=A'C'$ egyenesek B'' metszéspontja s az MN és $B'C'$ egyenesek metszéspontja egy egyenesen fekszik, vagyis, hogy *a* $PB''=C''B''$ *egyenes átmegy az* MN *és* $B'C'$ *egyenesek metszéspontján.*

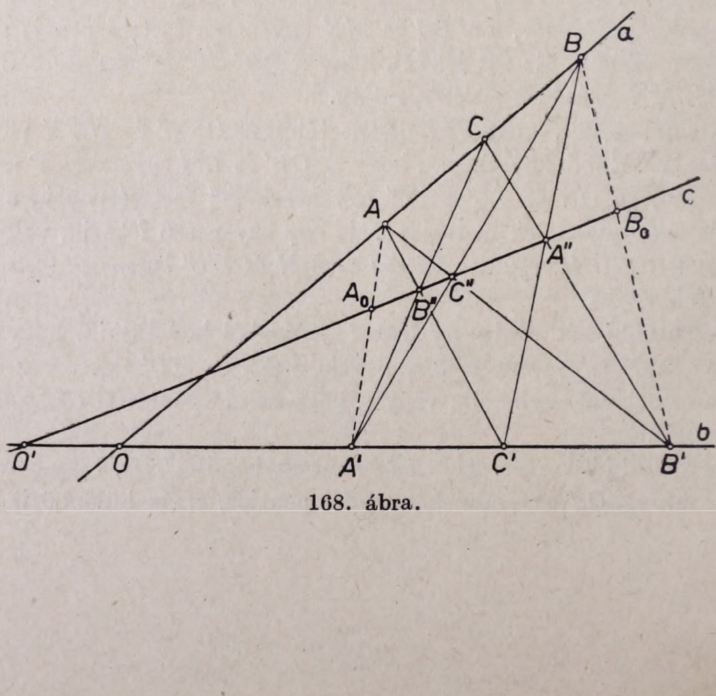
Az utóbbi két eredmény összefoglalásából következik, hogy az MN és $B''C''$ egyenesek metszéspontja a BC és $B'C'$ egyenesek A'' metszéspontjával egybeesik, vagyis, hogy *az* A'' *pont a* $B''C''$ *egyenesen fekszik.*

Második eset. Ha az M pont egybeesik C-vel, vagy C'-vel, felvesszük az OC egyenesnek egy M' pontját, mely különbözik az

O, C, C' pontoktól (l. erre vonatkozóan az 563. o. szöveg alatti jegyzetét). Legyen P' az AM' és $B''C''$ egyenesek metszéspontja; jelöljük D-vel és D'-vel az OP' egyenesnek AB-vel és $A'B'$-vel közös pontját. Az első esetben megállapított eredmény alkalmazható az ADC és $A'D'C'$ háromszögekre; ebből következik, hogy a DC és $D'C'$ egyenesek D'' metszéspontja a $B''C''$ egyenesen fekszik. Az első eset eredményét alkalmazzuk ismét a DBC és $D'B'C'$ háromszögekre; ebből adódik, hogy a BC és $B'C'$ egyenesek A'' metszéspontja a $C''D''=C''B''$ egyenesen fekszik. Mindkét esetben érvényes tehát a DESARGUES-féle tétel állítása.

107.11. T é t e l. *A* PAPPUS-*féle tétel a projektív sík összetartozási axiómái alapján aequivalens az egyenesek projektív vonatkozásainak alaptételével.*

B i z o n y í t á s. Tegyük fel, hogy érvényes az **5.**5 tétel. Legyen a és b két különböző egyenes, metszéspontjuk O. Legyen A, B, C az a egyenesnek, A', B', C' a b egyenesnek három-három egymástól és O-tól különböző pontja. Jelöljük B''-vel az AC' és $A'C$ egyenesek metszéspontját, C''-vel az AB' és $A'B$ egyenesek metszéspontját és c-vel a $B''C''$ egyenest. Legyen O' a b és c egyenes metszéspontja, továbbá A_0 és B_0 az AA', illetve a BB' egyenesnek c-vel közös pontja (168. ábra). Vetítsük az a egyenest A'-ből c-re s ezt A-ból b-re; az a egyenes O, A, B, C pontjának a c egyenes O', A_0, C'', B'' pontja, s ezeknek a b egyenes O', A', B', C' pontja felel meg. Vetítsük a-t



168. ábra.

B'-ből c-re ; jelöljük A''-vel a $B'C$ és c egyenesek metszéspontját ; az O, A, B, C pontnak a c egyenesen az O', C'', B_0, A'' pont felel meg. Az első három pontnak a B pontból való vetítésnél a b egyenesen O', A', B' pont felel meg. Az **5**.5 tételből következik tehát, hogy a-nak b-re való két projektív leképezése, melyet az A'-ből és A-ból, illetve a B'-ből és B-ből való vetítések származtatnak, azonos egymással ; ezért a második leképezésnél is C-nek a C' pont felel meg, vagyis a BC' egyenes átmegy a $B'C$ és $c=B''C''$ egyenesek A'' metszéspontján. A Pappus-féle tételnek ez a bizonyítása lényegében ugyanaz, mint amelyet a 6. §-ban adtunk.

Tegyük fel, hogy érvényes a Pappus-féle tétel, levezetjük ebből az **5**.5 tételt. Legyen a és b két egymást metsző egyenes, s legyen megadva a-nak b-re való **T** projektív leképezése, amely az a egyenes A, B, C pontjainak rendre a b egyenes A', B', C' pontjait felelteti meg. A **107**.10 tétel szerint érvényes a Desargues-féle tétel, tehát alkalmazhatjuk az ennek alapján levezetett **107**.4 tételt. A **T** leképezést a **107**.4 tétel szerint úgy állíthatjuk elő, hogy az a egyenest b nek valamely P' pontjából egy e egyenesre, s ezt az a egyenes $P=\mathbf{T}^{-1}(P')$ pontjából a b egyenesre vetítjük. Jelöljük A_0, B_0, C_0-val a PA' és $P'A$, a PB' és $P'B$ s a PC' és $P'C$ egyenespárok metszéspontjait ; ez a három pont az e egyenesen fekszik. A Pappus-féle tétel szerint az AB' és $A'B$, a BC' és $B'C$ s az AC' és $A'C$ egyenespárok C'', A'', B'' metszéspontjai is egy egyeneshez tartoznak ; *az* $A''B''C''$ *egyenes azonos* e*-vel.* Alkalmazzuk ugyanis a Pappus-féle tételt a $PAB, P'A'B'$ ponthármasokra ; e szerint a PA' és $P'A$, a PB' és $P'B$ s az AB' és $A'B$ egyenespárok metszéspontjai, vagyis az A_0, B_0, C'' pontok egy egyenesen feküsznek, azaz a C'' pont az $e=A_0B_0$ egyenesen fekszik ; hasonlóan A'' és B'' is. Ebből viszont az következik, hogy ha P az a egyenes tetszőleges pontja, s P' a P pontnak a **T** leképezésnél származó képe, akkor a PA' és $P'A$ egyenesek metszéspontja az $e=A''B''C''$ egyeneshez tartozik. E szerint a P' pontot egyértelműen meghatározza az A, B, C és az A', B', C' ponthármas és a P pont ; ez az **5**.5 tétel állítása.

107.12. A projektív síkgeometria megalapozása szempontjából érdekes Bottema következő megjegyzése (l. Mathem. Annalen, 111. k., 1936, 68—70. o.).

A projektív síkgeometria összetartozási axiómái és a Desargues-*féle tétel alapján a* Pappus-*féle tétel helyettesíthető ennek következő, korlátozott alakjával:*

Van két olyan a és b egyenes s ezeken két-két olyan P, Q és R, S pont, hogy a-nak tetszőleges X, és b-nek tetszőleges Y pontjával a QXP és YSR ponthármasokra teljesül a Pappus*-féle tétel állítása.*

Ebből a tételből nem vezethető le a Desargues-féle tétel; például a Moulton-féle modellben (l. **105**.1) érvényes a fenti tétel az alsó félsíkhoz tartozó két tetszőleges a és b egyenesre, de nem érvényes a Desargues-féle tétel. Viszont ha feltesszük a Desargues-féle tételt, továbbá a Pappus-féle tételt a fenti korlátozott alakban, akkor a Desargues-féle tétel alapján értelmezhetjük az egyenesen a pontok összeadását és szorzását, s *a korlátozott érvényességű* Pappus*-féle tétel alapján igazolhatjuk a szorzás kommutativitását, amiből a* Pappus*-féle tétel általános érvényessége következik* (l. **106**.9).

Ezt az állítást Bottema a következő eljárással igazolja. A Desargues-féle tételből levezetett pontszámolás alapján vezessünk be a síkban egy homogén (x_1, x_2, x_3) pontkoordinátarendszert olyan módon, hogy a P, Q, R, S pontok koordinátái a következők legyenek:

$$P(1, 0, 1), \quad Q(1, 0, 0), \quad R(0, 1, 1), \quad S(0, 1, 0);$$

a b egyenes egyenlete: $x_1=0$, az a egyenesé: $x_2=0$; e két egyenes O metszéspontjának koordinátái: $(0, 0, 1)$. Az X és az Y pont koordinátái legyenek $(\xi, 0, 1)$ és $(0, \eta, 1)$. Jelöljük az XR és PS, a PY és QR s az XY és QS egyenespárok metszéspontját A, B, C-vel; ezeknek a pontoknak koordinátái:

$$A(\xi, \xi-1, \xi), \quad B(\eta-1, \eta, \eta), \quad C(\xi, -\eta, 0).$$

Az AB egyenes egyenlete:

$$x_1\eta + x_2\xi - x_3(\xi + \eta - 1) = 0.$$

Mivel feltevésünk szerint a $C(\xi, -\eta, 0)$ pont ezen az egyenesen fekszik, ezért:

$$\xi\eta - \eta\xi = 0, \quad \text{azaz:} \quad \xi\eta = \eta\xi.$$

E szerint a számtest kommutatív s ezért általánosan érvényes a Pappus-féle tétel.

108. §. Az Archimedes-féle axióma.

Az egyenes projektív vonatkozásainak alaptétele.

A 12. §-ban a projektív geometria összetartozási és rendezési axiómái, valamint a Dedekind-féle folytonossági axióma alapján bebizonyítottuk az egyenes projektív vonatkozásainak Staudt—

DARBOUX-féle alaptételét, mely szerint az egyenesnek minden önmagára való, a harmonikus elválasztásokat megtartó, egyértelmű leképezése, amelynek három különböző fixpontja van, az azonosság. NEWMAN az összetartozási és rendezési axiómákból s az ARCHIMEDES-féle axiómából (**11**.4) levezette a következő tételt:

108.1. Tétel. *Ha az egyenes önmagára való kölcsönösen egyértelmű* **T** *leképezése megtartja a rendezést s a harmonikus elválasztásokat, s ha* **T**-*nek három különböző fixpontja van, akkor* **T** *az azonos leképezés.*

Ez a tétel korolláriumként adódik a következő, ugyancsak a **P I, II** axiómák és az ARCHIMEDES-féle axióma alapján bebizonyítandó tételből (l. a **15**.5 tételt, amelyet a DEDEKIND-féle axióma alapján bizonyítottunk be):

108.2. Tétel. *Ha az egyenes önmagára való kölcsönösen egyértelmű* **T** *leképezése különbözik az azonosságtól s megtartja a rendezést, valamint a harmonikus elválasztásokat, s ha* **T**-*nek van két különböző fixpontja, akkor bármely, ezektől különböző pontnak* **T** *hatványainál származó képei az egyik fixponthoz,* **T** *inverzének hatványainál származó képei a másik fixponthoz konvergálnak.*

Bizonyítás.[1] Legyen O és U a **T** leképezés két fixpontja, s P^0 olyan pont, mely különbözik képétől, P^1-től. Jelöljük P^n-nel P^0-nak $\mathbf{T}^n$-nél származó képét ($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Mivel **T** megtartja az egyenes pontjainak ciklikus rendezését, ezért, ha a P^0, P^1 pontok elválasztják az O, U pontokat, akkor a P^1, P^2 pontok is; ebben az esetben P^0 és P^2 nem választja el O-t és U-t. Feltesszük, hogy a P^0, P^1 pontok nem választják el O-t és U-t; ellenkező esetben **T** helyett a $\mathbf{T}^2$ leképezést tekintenők, melyre nézve teljesül ez a feltétel. Az O, U és P^0, P^1 pontok elrendezése legyen például (OP^0P^1U).

Az egyenes pontjainak ciklikus rendezése alapján bevezetünk az egyenes U-tól különböző pontjaira egy lineáris rendezést s ennek alapján értelmezünk egy lineáris irányítást úgy, hogy

$$O < P^0 < P^1$$

[1] A következő bizonyításban, s ugyancsak a **108**.3 tétel bizonyításában felhasználjuk NEWMAN módszerét, amellyel a tétele bizonyításához szükséges két első segédtételt vezette le.

legyen (l. első kötet, 79. o.). Mivel **T** megtartja a rendezést, ebből következik :

$$O<\ldots<P^{-n}<\ldots<P^{-1}<P^0<P^1<\ldots<P^n<\ldots$$

A tétel állítása szerint bármely X ponthoz megadható olyan n index, hogy $X<P^n$. Tegyük fel, hogy állításunkkal ellenkezően van olyan X pont, melyre minden n indexnél

$$P^n<X.$$

Jelöljük a P^0 pontot Q_0-val, legyen Q_1 a P^0P^1 szakasz valamely pontja, azaz : $P^0<Q_1<P^1$. Az Archimedes-féle axióma szerint van a Q_0, Q_1, U pontok által származtatott harmonikus sorozatnak olyan Q_r eleme, amelyre $X<Q_r$. Ebből és a $P^n<X$ vonatkozásból következik, hogy minden n-re : $P^n<Q_r$; legyen r a legkisebb olyan index, amelyre minden n-nél fennáll a

$$P^n<Q_r \tag{1}$$

vonatkozás ; nyilván : $r\geqq 2$. Az r index meghatározása folytán a Q_{r-1} pontra és elegendő nagy σ indexű P^σ pontra : $Q_{r-1}<P^\sigma$; legyen σ a legkisebb olyan index, melyre fennáll ez a vonatkozás ($\sigma>0$), s legyen C a $Q_{r-1}P^\sigma$ szakasz valamely pontja :

$$Q_{r-1}<C<P^\sigma. \tag{2}$$

Jelöljük B-vel a Q_0 pontnak az (U, C) pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltját :

$$B=(U, C)/Q_0. \tag{3}$$

Mivel $r\geqq 2$ és

$$Q_r=(U, Q_{r-1})/Q_{r-2},$$

a **9.7** tétel szerint (melyet a **P I** és **II** axiómákból vezettünk le) a $Q_{r-1}<C$ vonatkozásból következik, hogy

$$Q_r<(U, C)/Q_{r-2}, \tag{4}$$

s a **9.6** tétel szerint (mely ugyancsak a **P I** és **II** axiómák következménye) a $Q_0\leqq Q_{r-2}$ vonatkozásból [1] adódik :

$$(U, C)/Q_{r-2}\leqq (U, C)/Q_0=B. \tag{5}$$

[1] $A\leqq B$ azt jelenti, hogy A egybeesik B-vel, vagy $A<B$.

Az (1), (4) és (5) vonatkozások folytán, minden n-re

$$P^n < B; \tag{6}$$

(3)-ból és (2)-ből adódik (tekintve, hogy $P^0 = Q_0$):

$$(P^0, B)/U = C < P^\sigma. \tag{7}$$

Legyen m és n két tetszőleges pozitív egész szám; a $P^n < B$ vonatkozásból **9**.7 szerint következik:

$$(P^0, P^n)/U < (P^0, B)/U, \tag{8}$$

s a $P^{-m} < P^0$ vonatkozásból

$$(P^{-m}, P^n)/U < (P^0, P^n)/U; \tag{9}$$

(7), (8) és (9) összefoglalásából:

$$(P^{-m}, P^n)/U < P^\sigma. \tag{10}$$

Hasonló eljárást alkalmazunk a $P^{-1}, P^{-2}, \ldots$ csökkenő sorozatra, az X pontot O-val helyettesítve; meghatározunk egy olyan $P^{-\varrho}$ pontot ($\varrho > 0$), hogy minden m és n pozitív egész számra fennálljon:

$$(P^{-m}, P^n)/U > P^{-\varrho}. \tag{11}$$

Megadható tehát két olyan ϱ és σ pozitív egész szám, hogy bármely m és n pozitív egész számra fennáll a következő vonatkozás:

$$P^{-\varrho} < (P^{-m}, P^n)/U < P^\sigma. \tag{12}$$

Jelöljük Q^0-val az U pontnak a $(P^{-2\varrho-\sigma}, P^\sigma)$ pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltját:

$$Q^0 = (P^{-2\varrho-\sigma}, P^\sigma)/U. \tag{13}$$

A (12) vonatkozás szerint:

$$P^{-\varrho} < Q^0 < P^\sigma.$$

A $\mathbf{T}^{\sigma+\varrho}$ leképezés megtartja a rendezést, s mert a $P^{-\varrho}, Q^0, P^\sigma$ pontokat a $P^\sigma, Q^{\sigma+\varrho} = \mathbf{T}^{\sigma+\varrho}(Q^0), P^{2\sigma+\varrho}$ pontokba viszi át, ezért:

$$P^\sigma < Q^{\sigma+\varrho} < P^{2\sigma+\varrho}. \tag{14}$$

$\mathbf{T}^{\sigma+\varrho}$ megtartja a harmonikus elválasztásokat is, s ezért a $P^{-2\varrho-\sigma}$, P^σ, Q^0, U pontoknak $\mathbf{T}^{\sigma+\varrho}$-nál megfelelő $P^{-\varrho}, P^{2\sigma+\varrho}, Q^{\sigma+\varrho}, U$ pontok is harmonikus négyest alkotnak, azaz

$$Q^{\sigma+\varrho} = (P^{-\varrho}, P^{2\sigma+\varrho})/U.$$

A (12) vonatkozás szerint ebből következik, hogy

$$P^{-\varrho} < Q^{\sigma+\varrho} < P^{\sigma}, \tag{15}$$

ellentétben a (14) vonatkozással.

Az a feltevésünk, hogy van olyan X pont, melyre minden n-nél $P^n < X$, ellenmondáshoz vezetett. A $P^1, P^2, \ldots$ pontsorozat tehát az U fixponthoz konvergál. A fenti meggondolásban O és U szerepének felcserélése s **T**-nek $\mathbf{T}^{-1}$-gyel való helyettesítése arra az eredményre vezet, hogy *a $P^{-1}, P^{-2}, \ldots$ sorozat az O ponthoz konvergál.*

Az OP^0U szakasz bármely Q^0 pontja, mely különbözik a P^n pontoktól, valamely (P^k, P^{k+1}) szakasznak pontja; a $Q^n = \mathbf{T}^n(Q^0)$ pont a (P^{k+n}, P^{k+n+1}) szakaszhoz tartozik; ezért a $Q^1, Q^2, \ldots$ sorozat is az U ponthoz, s a $Q^{-1}, Q^{-2}, \ldots$ sorozat az O ponthoz konvergál. Ha pedig R^0 a másik OU szakasznak pontja, akkor a $Q^0 = (O, U)/R^0$ pont az OP^0U szakaszhoz tartozik s különbözik képétől, Q^1-től; e szerint $R^1 = (O, U)/Q^1$ is különbözik R^0-tól. Előbbi eredményünk értelmében az $R^1, R^2, \ldots$ sorozat vagy U-hoz vagy O-hoz konvergál; mivel $Q^0 < Q^1$, a **9**.6 tétel szerint $R^0 > R^1$, s ennek folytán $R^1 > R^2 > R^3 > \ldots$, tehát az $R^1, R^2, \ldots$ sorozat U-hoz s az $R^{-1}, R^{-2}, \ldots$ sorozat O-hoz konvergál. Ezzel bebizonyítottuk a **108**.2 tételt.

A most bebizonyított tételből közvetlenül következik a NEWMAN-féle tétel (**108**.1). Minthogy a **P I** és **II** axiómák alapján az egyenes projektív vonatkozásainak alaptétele aequivalens a PAPPUS-féle tétellel, s ez a szorzás kommutativitásával (l. **106**.9 és **107**.5), ezért *a* **P I** *és* **II** *axiómák alapján az* ARCHIMEDES-*féle axiómából következik a geometria számtestének kommutativitása.* Ezt a tételt először HILBERT bizonyította be algebrai módszerrel.

A LÜROTH—ZEUTHEN-féle tétel.

A 11. §-ban a **P I**, **II** axiómák és a DEDEKIND-féle folytonossági axióma alapján bebizonyítottuk a LÜROTH—ZEUTHEN-féle tételt; most a DEDEKIND-féle axióma helyett az ARCHIMEDES-féle axióma alapján fogjuk bebizonyítani a tételt.

108.3. Tétel. *Ha érvényesek a* **P I**, **II** *axiómák és az* ARCHIMEDES-*féle axióma, akkor az egyenes bármely három különböző pontja által származtatott harmonikus pontrendszer az egyenesen mindenütt sűrű.*

Bizonyítás. Legyen P_0, P_1, U az egyenes három különböző pontja; az általuk származtatott harmonikus pontrendszer *megszám-*

lálható (értelmezést l. első kötet, 263. o.); jelöljük ennek U-tól különböző pontjait $P^1, P^2, \ldots$-vel, s a rendszert $[P^n]$-nel.

Vezessünk be az egyenes pontjainak ciklikus rendezése alapján az U-tól különböző pontokra egy lineáris rendezést s ennek alapján egy lineáris irányítást (úgy, mint a **108.**2 tétel bizonyításában).

A $[P^n]$ pontrendszer minden P^r pontja *kétoldali határpontja* a rendszernek; ez azt jelenti, hogy ha A és B két tetszőleges olyan pont, amelyre $A < P^r < B$, akkor az AP^r szakaszon is, a P^rB szakaszon is van a rendszernek legalább egy-egy pontja. Legyen ugyanis P^s a rendszer tetszőleges olyan pontja, amelyre $P^s < P^r$; ha $A < P^s < P^r$, akkor állításunk első (A-ra vonatkozó) része nyilvánvaló. Ha pedig $P^s < A$, akkor az U, P^s, P^r pontok által származtatott harmonikus sorozatban, mely a $[P^n]$ harmonikus rendszernek része, az Archimedes-féle axióma szerint van olyan P^t pont, amelyre $A < P^t < P^r$. Hasonló módon adódik állításunk második (B-re vonatkozó) része.

Legyen F és G az egyenes két tetszőleges pontja, melyre $F < G$: meg kell mutatnunk, hogy a $[P^n]$ harmonikus pontrendszernek legalább egy pontja az FG szakaszhoz tartozik. Ha az F, G pontok közül valamelyik a $[P^n]$ rendszernek pontja, akkor állításunk az előbbi bekezdés eredményéből közvetlenül következik. Feltesszük tehát, hogy sem F, sem G nem tartozik $[P^n]$-hez.

Meghatározzuk a $[P^n]$ rendszerhez tartozó pontoknak olyan $Q^1, Q^2, \ldots$ sorozatát, melyre teljesül a következő két feltétel:

1. $Q^1 < Q^2 < \cdots < F$;

2. ha a $[P^n]$ rendszer valamely P^r pontjára $P^r < F$, akkor elegendő nagy ν indexre $P^r < Q^\nu$.

A (Q^ν) sorozat meghatározása céljából vegyük fel a $[P^n]$ rendszernek azt a legkisebb indexű P^r elemét, amelyre $P^r < F$; a P^r pontot jelöljük Q^1-gyel. Legyen $\overline{Q}^1$ a $[P^n]$ rendszernek az a legkisebb indexű eleme, amelyre $Q^1 < \overline{Q}^1 < F$; jelöljük Q^2-vel a $Q^1, \overline{Q}^1, U$ pontok által származtatott harmonikus sorozat utolsó olyan elemét, amelyre $Q^2 < F$. Legyen $\overline{Q}^2$ a $[P^n]$ rendszernek az a legkisebb indexű eleme, amelyre $Q^2 < \overline{Q}^2 < F$; jelöljük Q^3-mal a $Q^2, \overline{Q}^2, U$ pontok által származtatott harmonikus sorozat utolsó olyan elemét, amelyre $Q^3 < F$; s. í. t. A (Q^ν) sorozat meghatározásából nyilvánvaló, hogy eleget tesz a fenti két feltételnek.

Hasonló eljárással meghatározzuk a $[P^n]$ rendszerhez tartozó pontoknak olyan $R^1, R^2, \ldots$ sorozatát, melyre teljesül a következő két feltétel:

1. $R^1 > R^2 > \dots > G$;

2. ha a $[P^n]$ rendszer valamely P^r pontjára $P^r > G$, akkor elegendő nagy ν indexre $P^r > R^\nu$.

A $Q^1, Q^2, \dots$ *növekvő sorozat felső korlátjának* nevezünk minden olyan K pontot, melyre teljesül a következő feltétel: van olyan K' pont, $K' < K$, hogy minden ν-re $Q^\nu < K'$. Hasonlóan értelmezzük az $R^1, R^2, \dots$ *csökkenő sorozat alsó korlátját.*

Jelöljük H-val az FG szakasz valamely pontját: $F < H < G$; legyen S_1 az FH szakasz tetszőleges pontja. Az $S_0 = H$, S_1, U pontok által származtatott (csökkenő) harmonikus sorozatban legyen S_r az első olyan elem, hogy valamely ν-re $S_r < Q^\nu$. Legyen A olyan pont, hogy valamely ν-re $S_r < A < Q^\nu$. Mivel $r \geqq 2$, ezért $S_{r-2} \leqq H$, és mert $S_r < A$, a **9**.7 tétel szerint:

$$(A, H)/U \geqq (A, S_{r-2})/U > (S_r, S_{r-2})/U = S_{r-1} > Q^\nu;$$

az utóbbi $S_{r-1} > Q^\nu$ vonatkozás az r index meghatározásának következménye. E szerint az

$$A_0 = (A, H)/U$$

pont felső korlátja a (Q^ν) sorozatnak.

Hasonló eljárással meghatározunk egy B pontot úgy, hogy elegendő nagy ν-re $R^\nu < B$ legyen, s hogy a

$$B_0 = (H, B)/U$$

pont alsó korlátja legyen az (R^ν) sorozatnak.

Ha ν elegendő nagy index, akkor $A < Q^\nu$ és $B > R^\nu$. A **9**.7 tétel szerint az $A < Q^\nu$, $H < R^\nu$ vonatkozásokból következik, hogy

$$A_0 = (A, H)/U < (Q^\nu, H)/U < (Q^\nu, R^\nu)/U;$$

ugyanúgy a $B > R^\nu$, $H > Q^\nu$ vonatkozások folytán:

$$B_0 = (H, B)/U > (Q^\nu, B)/U > (Q^\nu, R^\nu)/U;$$

a két utóbbi vonatkozásból

$$A_0 < (Q^\nu, R^\nu)/U < B_0.$$

Mivel Q^ν, R^ν és U a $[P^n]$ harmonikus rendszer pontjai, ezért a

$$P^* = (Q^\nu, R^\nu)/U$$

pont is a rendszerhez tartozik; erre a pontra a fentiek szerint:

$$A_0 < P^* < B_0.$$

A P^* pont az FG szakaszhoz tartozik. Ha ugyanis $P^* < F$ volna, akkor a (Q^ν) sorozat meghatározása szerint valamely ν-re $P^* < Q^\nu$, s mivel minden ν-re $Q^\nu < A_0$, következnék, hogy $P^* < A_0$, ellentétben előbbi eredményünkkel; ezért $P^* > F$ s ugyanúgy $P^* < G$. A $[P'']$ harmonikus pontrendszernek van tehát az FG szakaszon legalább egy P^* pontja; ezzel a **108.**3 tételt bebizonyítottuk.

Ugyanúgy adódik, hogy a diadikus racionális pontok összessége is mindenütt sűrű az egyenesen.

A LÜROTH—ZEUTHEN-féle tétel alapján (miként **11.**7-ben) bevezethetünk az egyenesen egy x valós projektív koordinátát. Az egyenes U-tól különböző pontjainak megfelelő koordináta-értékek olyan számtestet alkotnak, mely a valós számok összességével megegyezik, vagy annak része. E szerint, *ha teljesülnek a* **P I** *és* **II** *axiómák s az* ARCHIMEDES-*féle axióma, akkor a geometria számteste a valós számok testével vagy annak egy részével izomorf.*

Rendezett számtest.

Értelmezés. A **K** számtestet (lineárisan) rendezettnek nevezzük, ha bármely két különböző a és b elemére fennáll az $a < b$, vagy a $b < a$ vonatkozás, s teljesülnek a következő feltételek:

1. ha $a < b$ és $b < c$, akkor $a < c$;
2. ha $a < b$, akkor $a+c < b+c$, minden c-re;
3. ha $a > 0$ (azaz $0 < a$) és $b > 0$, akkor $a.b > 0$.

108.4. *Ha teljesülnek a projektív geometria összetartozási és rendezési axiómái, akkor az egyenesnek az U végtelen távoli ponttól különböző pontjai rendezett számtestet alkotnak az egyenes pontjaira értelmezett műveletek, valamint az egyenes pontjainak rendezése alapján.*

Bizonyítás. Legyenek O, E, U az egyenesen értelmezett műveletek alappontjai; ha X és Y az egyenes két tetszőleges, U-tól különböző pontja, akkor az $X < Y$, illetve az $Y < X$ rendezést írjuk elő a szerint, hogy az egyenesnek az (OEU) és az (XYU) sorrend által meghatározott ciklikus irányításai megegyeznek, vagy nem. A ciklikus rendezés **A 3** axiómája folytán (l. 11. o.) teljesül a rendezett számtestre vonatkozó 1. feltétel. Ha X, Y és Z az egyenesnek U-tól különböző pontjai, akkor az X és az Y pontból az $X+Z$ és az $Y+Z$ pontot két vetítés alkalmazásával kapjuk (l. **106.**2); mivel ennél változatlan marad a ciklikus rendezés (l. **4.**1), és az U pont önmagának felel meg, ezért az $X < Y$ vonatkozásból következik az $X+Z < Y+Z$ vonatkozás ; e szerint a 2. feltétel is teljesül. Az OU egyenes változó X pontjának az Y ponttal való $X.Y$ szorzatát úgy képezzük (l. például 159. ábra, 541. o.), hogy az X pontot B-ből az o egyenesre, s a vetületet az u egyenes C pontjából az OU egyenesre vetítjük. Tegyük fel, hogy $X>O$; legyen $X \neq E$, akkor fennáll az $(OEXU)$, vagy az $(OXEU)$ ciklikus elrendezés ; az o egyenesre való vetületekre fennáll tehát az $(OADU')$, illetve az $(ODAU')$ elrendezés, hol U'-vel jelöljük u és o metszéspontját. Az O, A, D, U' pontnak C-ből az OU egyenesre való vetülete O, Y, XY, U ; ezekre fennáll tehát az (O, Y, XY, U), vagy az (O, XY, Y, U) ciklikus elrendezés. Ebből következik, hogy ha $Y>O$, akkor $X.Y>O$: tehát teljesül a 3. feltétel is.

108.5. Hilbert algebrai módszerrel igazolta, hogy *ha egy rendezett számtestben érvényes az* Archimedes*-féle axióma, azaz ha két tetszőleges a és b számhoz, melyekre $0<a<b$, megadható olyan pozitív egész n szám, melyre $n.a>b$, akkor a számtest kommutatív.* Bizonyítását l. Hilbert : Grundlagen der Geometrie, 7. kiadás, 105. o. Miként már említettük, ez a tétel tartalmilag aequivalens a Newman-féle tétellel.

Nem-archimedesi számtest példája.

108.6. Olyan rendezett számtestnek, amelyben nem teljesül az Archimedes-féle axióma, egyszerű példáját adja az a számtest, amelynek elemei az x valós változó valós együtthatójú $R(x)$ racionális (egész és tört) függvényei ; ehhez hozzátartoznak a konstans függvények, vagyis a valós számok. A számtest két elemének összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát (feltéve, hogy az osztó nem az $R(x)\equiv 0$ függvény) az ezeket előállító két racionális függvény összege, különbsége, szorzata, illetve hányadosa állítja elő. Ebből következik hogy a számtest *kommutatív*.

A számtest rendezésére vonatkozó előírás a következő (l. Hessenberg : Grundlagen der Geometrie, 133. o.). Ha $R(x)$ tetszőleges, valós együtthatójú racionális függvény, akkor az x valós változó elegendő nagy pozitív értékeire $R(x)$ előjele változatlan. Ha x nagy értékeire $R(x)$ pozitív, akkor a számtest $R(x)$ és 0 elemeire az $R(x)>0$ rendezést írjuk elő. Ha $R(x)$ és $R_1(x)$ a számtest két tetszőleges eleme, s ha x-nek nagy értékeire $R(x)-R_1(x)$ pozitív, akkor a két elemre az $R(x)>R_1(x)$ rendezést írjuk elő. Nyilvánvaló, hogy a rendezett számtestekre vonatkozó 1., 2., 3. feltételek teljesülnek.

Ebben a rendezett számtestben nem érvényes az ARCHIMEDES-féle axióma. Például, ha k és l pozitív egész számok és $k > l$, akkor az x valós változó nagy értékeire $x^k - x^l$ pozitív, tehát fennáll az $x^k > x^l$ rendezés. Bármily nagy pozitív egész szám is n, elegendő nagy x értékekre az $x^k - n.x^l$ különbség pozitív, tehát a számtest x^k és $n.x^l$ elemeire minden n-nél fennáll az

$$n.x^l < x^k$$

rendezés.

A fenti számtest alapján értelmezhetünk egy projektív térgeometriát a **106**.25-ben tárgyalt módszerrel; ebben a geometriában nem érvényes az ARCHIMEDES-féle axióma, de a szorzás kommutativitása folytán érvényes a PAPPUS-féle tétel.

A HILBERT-féle tételből (**108**.5) következik, hogy *ha egy rendezett számtest nem kommutatív, akkor abban nem érvényes az* ARCHIMEDES *féle axióma*. Rendezett, nem kommutatív számtest példáját l. HILBERT: Grundlagen der Geometrie, 7. kiadás, 107. o.. és HESSENBERG: Grundlagen der Geometrie, 137. o.

109. §. Topologikus terek és csoportok.

A valós és a komplex projektív geometria alapjaival fogunk foglalkozni a 111. §-ban. Tárgyalásunk előkészítésére, ebben és a következő szakaszban ismertetjük a topologikus terekre és csoportokra s a hiperkomplex számrendszerekre vonatkozó alapfogalmakat és tételeket.

Topologikus terek.

Értelmezés. *Általános topologikus tér*nek nevezzük elemeknek olyan S összességét (vagy halmazát), melyben bármely P elemhez hozzá vannak rendelve S-nek bizonyos, a P elemet tartalmazó részhalmazai. Az S halmaz elemeit a topologikus *tér pontjai*nak, s a P ponthoz rendelt, azt tartalmazó részhalmazokat a *P pont S-re vonatkozó környezetei*nek nevezzük.

Az S halmazt *(speciális) topologikus tér*nek nevezzük, ha a pontok környezeteire teljesülnek a következő, HAUSDORFF-*féle környezet-axiómák:*

1. Ha U_P és V_P a P pont két tetszőleges környezete, akkor van P-nek olyan W_P környezete, amely U_P-nek is, V_P-nek is része.

2. Ha U_P a P pont tetszőleges környezete, és Q ennek bármely pontja, akkor van Q-nak olyan U_Q környezete, amely U_P-nek része.

3. Ha P és Q két különböző pont, akkor van ezeknek olyan U_P és U_Q környezete, amelyeknek nincs közös pontjuk.

Értelmezés. Az S topologikus tér bármely M részhalmazáról azt mondjuk, hogy *az S térben fekszik.* Az S térben fekvő M ponthalmazt *nyílt*nak nevezzük, ha minden pontja *belső pont,* azaz, ha M bármely P pontjának valamely, S-re vonatkozó környezete az M halmazhoz tartozik.

A HAUSDORFF-féle 2. feltétel szerint *az S speciális topologikus tér bármely P pontjának U_P környezetei nyílt halmazok.*

Értelmezés. Legyen M az S topologikus térben fekvő ponthalmaz. Az S tér P pontját az M halmaz *sűrűsödési pont*jának nevezzük, ha P-nek minden U_P környezete tartalmazza M-nek legalább egy, P-től különböző pontját. (P-ről nem tesszük fel, hogy az M halmaz pontja.)

A HAUSDORFF-féle 1. és 3. környezet-axiómából következik, hogy *az M halmaz bármely P sűrűsödési pontjának tetszőleges környezete az M halmaznak végtelen sok pontját tartalmazza.* Legyen ugyanis U_P a P pont tetszőleges környezete, P_1 az M halmaznak U_P-hez tartozó, P-től különböző pontja. A 3. feltétel szerint van P-nek és P_1-nek egy-egy közös pont nélküli V_P, V_{P_1} környezete ; 1. szerint van P-nek olyan $U_P^{(1)}$ környezete, mely U_P-nek is, V_P-nek is része ; $U_P^{(1)}$ tehát része U_P-nek s nem tartalmazza a P_1 pontot. Legyen P_2 az M halmaznak $U_P^{(1)}$-hez tartozó, P-től különböző pontja ; meghatározzuk P-nek olyan $U_P^{(2)}$ környezetét, amely része $U_P^{(1)}$-nek s nem tartalmazza P_2-t, s. í. t. A $P_1, P_2, \ldots$ pontok az M halmaz egymástól különböző pontjai s valamennyi a megadott U_P környezethez tartozik.

Értelmezés. Az M halmazt *zárt*nak nevezzük, ha minden sűrűsödési pontja az M halmazhoz tartozik.

Például az euklidesi síkban egy körvonal, vagy egy kör belseje és kerülete zárt ponthalmaz ; a kör belseje nyílt, de nem zárt ponthalmaz ; az egész euklidesi sík zárt és nyílt ponthalmaz.

Értelmezés. Az M halmaz *zárt burkoló*jának nevezzük s $\overline{M}$-mel jelöljük az M halmaz pontjaiból és sűrűsödési pontjaiból álló halmazt. Ha M nyílt halmaz, akkor *M határán* értjük azoknak a sűrűsödési pontjainak összességét, amelyek nem tartoznak M-hez ; ezeket a pontokat *M határpontjai*nak nevezzük.

Értelmezés. Az S térben fekvő M halmaz maradékhalmazának nevezzük S ama pontjainak összességét, amelyek nem tartoznak M-hez.

Az értelmezésekből következik, hogy *minden zárt halmaz maradékhalmaza nyílt és megfordítva.*

Ugyanazt az S halmazt többféleképpen értelmezhetjük topologikus térként. Két ilyen értelmezésnek megfelelően legyenek (U_P) és (V_P) a P pont környezetei; ezeket a P pont *aequivalens környezeteinek* nevezzük, ha bármely U_P környezet tartalmazza valamelyik V_P környezetet és bármely V_P környezet tartalmazza valamelyik U_P-t. Ha az S halmazban a két különböző módon értelmezett környezetek S minden pontjára vonatkozóan aequivalensek, akkor a két értelmezés *ugyanazt a topologikus teret* hozza létre. Ebben az esetben bármely, az S térben fekvő M ponthalmaz sűrűsödési pontjait az (U_P) és a (V_P) környezetek megegyező módon értelmezik; azaz, ha M-nek sűrűsödési pontja P, az U_P környezeteket véve az értelmezés alapjául, akkor ugyanez érvényes a V_P környezetek alapján is, és megfordítva.

Például az euklidesi síkban egy P pont környezetein érthetjük azoknak a köröknek belsejét, amelyeknek középpontja P, vagy azoknak a négyzeteknek belsejét, amelyeknek belsejében fekszik a P pont. A két értelmezéssel bevezetett környezetek minden P pontra vonatkozóan aequivalensek; a két különböző módon értelmezett topologikus tér azonos egymással.

Megjegyzés. Az S topologikus térben bármely P pont környezetein érthetjük a P pontot tartalmazó összes nyílt halmazokat. Ezekre is teljesülnek a környezet-axiómák, s ezek a környezetek aequivalensek az eredetileg értelmezett környezetekkel.

Értelmezés. Az S topologikus térben fekvő M ponthalmazt *kompakt*nak nevezzük, ha M bármely végtelen részhalmazának van legalább egy sűrűsödési pontja. (Nem szükséges, hogy ez a sűrűsödési pont M-hez tartozzék.)

Például az euklidesi síkban minden korlátos ponthalmaz kompakt (BOLZANO-WEIERSTRASS-féle tétel, I. első kötet, 287. o.). Az euklidesi sík nem kompakt halmaz; például egy olyan $P_0, P_1, P_2, \ldots$ pontsorozatnak, melyre a P_0P_n távolság a P_0P_1 távolságnak n-szerese $(n=1, 2, \ldots)$, nincs sűrűsödési pontja. A projektív sík kompakt halmaz (**25**.5). *Kompakt halmaznak minden részhalmaza is kompakt;* ez közvetlenül következik az értelmezésből.

Értelmezés. Az S topologikus teret *kicsinyben kompakt*nak nevezzük, ha minden pontjának van egy kompakt környezete.

Például: az euklidesi sík kicsinyben kompakt.

Értelmezés. Az S topologikus teret *összefüggő*nek nevezzük, ha nem osztható fel két, közös pont nélküli, zárt M_1 és M_2 részhalmazra, melyek közül egyik sem üres (azaz mindegyik tartalmaz legalább egy-egy pontot).

Az S topologikus tér bármely M részhalmazát is értelmezhetjük topologikus térként olyan módon, hogy M tetszőleges P pontjának M-re vonatkozó környezetein értjük az S-re vonatkozó környezeteknek M-mel közös részét. Az M halmaznak s M részhalmazainak azokat a sűrűsödési pontjait, amelyek M-hez tartoznak, az új környezetek az eredetivel megegyező módon értelmezik.

Értelmezés. Az S topologikus térben fekvő M ponthalmazt *összefüggőnek* nevezzük, ha M mint önálló topologikus tér összefüggő. Ezzel az értelmezéssel aequivalens a következő, mely M-re mint S részhalmazára vonatkozik : M nem osztható fel két olyan, nem üres részhalmazra, melyek közül egyik sem tartalmazza a másik részhalmaz valamely pontját, vagy sűrűsödési pontját.

Például : egy euklidesi egyenes szakasz összefüggő ; az ebből egy (belső) pontjának kihagyásával származó halmaz nem összefüggő.

109.1. *Ha az M összefüggő halmaznak legalább két pontja van, akkor M minden pontja sűrűsödési pontja M-nek.* Ellenkező esetben, ha az M halmaz P pontja nem volna sűrűsödési pontja M-nek, akkor a P pont s ennek M-re vonatkozó maradékhalmaza M-nek két, nem üres részhalmazra való felosztását adná, melyek közül egyik sem tartalmazza a másik halmaznak valamely pontját, vagy sűrűsödési pontját.

109.2. *Ha S összefüggő tér, s az S térben fekvő M halmaz zárt és nyílt, akkor M az S térrel azonos.* Ellenkező esetben az M halmaz s maradékhalmaza S-nek két, nem üres, zárt és közös pont nélküli részhalmazra való felosztását adná.

109.3. A Hausdorff-*féle első megszámlálhatósági axiómán* azt a feltételt értjük, hogy az S topologikus tér bármely P pontjának U_P környezetei aequivalensek a P pont környezeteinek egy megszámlálható $V_P^1, V_P^2, \ldots$ halmazával. Ha ez a feltétel teljesül, akkor érvényes a következő tétel :

109.4. *Ha P az M halmaz sűrűsödési pontja, akkor megadható M pontjainak egy P-hez konvergáló $P_1, P_2 \ldots$ sorozata.*

A $P_1, P_2, \ldots$ pontsorozat értelmezés szerint akkor *konvergál a P ponthoz,* ha P bármely U környezete tartalmazza a sorozat valamennyi, n_0-nál nagyobb indexű elemét ; az n_0 pozitív egész szám az U_P környezet megválasztásától függ. A P pontot a *sorozat limeszének* nevezzük.

A tétel bizonyítása a következő. Legyen $V^1, V^2, \ldots$ a P pont környezeteinek olyan sorozata, mely aequivalens a P pont U_P környezeteinek rendszerével. Jelöljük W^n-nel a $V^1, V^2, \ldots, V^n$ környezetek közös pontjainak halmazát ($n=1, 2, \ldots$). W^n nyílt halmaz, a P pont s ennek egy környezete W^n-hez tartozik, ezért W^n tartalmazza az M halmaz végtelen sok pontját. Legyenek $P_1, P_2, \ldots$ az M halmaznak rendre $W^1, W^2, \ldots$-höz tartozó, egymástól különböző pontjai. A $P_1, P_2, \ldots$ sorozat P-hez konvergál, mivel a P pont tetszőleges V^n környezete tartalmazza a sorozatnak n-nél nagyobb indexű összes elemét.

Olyan topologikus tér példája, melyben nem érvényes az első megszámlálhatósági axióma, Riesz Frigyestől származik. A tér pontjai legyenek egy egyenes szakasz pontjai ; a P pont környezetén értünk minden olyan részszakaszt, melynek pontja P, továbbá e szakaszból egy tetszőleges megszámlálható ponthalmaz kihagyásával keletkező halmazt, feltéve, hogy a kihagyott pontok különböznek P-től. Ebben a topologikus térben nincs konvergens pontsorozat, s megszámlálható halmaznak nincs sűrűsödési pontja.

109.5. A Hausdorff *féle második megszámlálhatósági axióma* az S topologikus térre vonatkozóan az a feltétel, hogy létezik az S-ben fekvő nyílt halmazoknak olyan megszámlálható $V^1, V^2, \ldots$ összessége, amely a térben megadott összes környezetek halmazával aequivalens. Ez részletesen azt jelenti, hogy a tér tetszőleges P pontját tartalmazó V^i halmazok a P pontnak olyan környezeteit alkotják, melyek P-nek eredetileg értelmezett U_P környezeteivel aequivalensek ; azaz P bármely U_P környezete tartalmaz legalább egy olyan V^i halmazt, melynek pontja P.

Például az euklidesi síkban teljesül ez az axióma. Legyen ugyanis (x, y) egy derékszögű koordinátarendszer. A sík racionális pontjai, vagyis azok a pontok, amelyeknek mindkét koordinátája racionális, megszámlálható halmazt alkotnak (ezt hasonló módon igazolhatjuk, mint a racionális számok halmazának megszámlálhatóságát, l. első kötet, 263. o.). Azok a körök, amelyeknek középpontja racionális pont s sugara ugyancsak racionális, szintén megszámlálható halmazt alkotnak ; ezeknek a köröknek belseje olyan halmazt alkot, mely a síkban értelmezett környezetek összességével aequivalens.

Ha az S térre vonatkozóan teljesül a második megszámlálhatósági feltétel, akkor érvényes a következő:

109.6. Heine—Borel-féle tétel. *Ha M az S térben fekvő kompakt, zárt ponthalmaz, s ha (W) az S térben fekvő nyílt ponthalmazoknak olyan összessége, hogy M minden pontja valamelyik W-hez tartozik, akkor van a W halmazok között véges számú olyan $W^1, W^2, \ldots, W^n$ halmaz, hogy M minden pontja közülök legalább egyhez tartozik.* (Ezt röviden úgy mondjuk, hogy a *W^i halmazok befedik M-et.*)

Bizonyítás. Legyen (V^i) az S térben fekvő nyílt halmazoknak olyan megszámlálható összessége, amely az S-ben megadott környezetek rendszerével aequivalens; a V^i halmazokat *környezetek*nek nevezzük. Az M halmaz minden P pontjának megfeleltetünk egy olyan V^i környezetet, amelynek pontja P, s amely a P pontot tartalmazó valamelyik W nyílt halmaznak része. Legyen V^{i_1} az M halmaz pontjaihoz ilyen módon hozzárendelt környezetek közül az, melynek i_1 indexe a legkisebb; legyen $V^{i_2} (i_2 > i_1)$ az a legkisebb indexű környezet, amely tartalmazza M-nek egy, V^{i_1}-hez nem tartozó pontját; $V^{i_3} (i_3 > i_2)$ az a legkisebb indexű környezet, amely tartalmazza M-nek egy sem V^{i_1}-hez, sem V^{i_2}-höz nem tartozó pontját, s. í. t. A V^{i_ν} sorozat megválasztására adott eljárás véges számú lépés után megszakad. Ha ugyanis, állításunkkal ellenkezően, minden ν indexnek megfelelne M-nek egy olyan $P_{\nu+1}$ pontja, mely nem tartozik a $V^{i_1}, V^{i_2}, \ldots, V^{i_\nu}$ környezetek közül egyikhez sem, akkor a $P_2, P_3, \ldots$ pontsorozatnak volna legalább egy P sűrűsödési pontja, mivel M kompakt, s P az M halmazhoz tartoznék, mivel M zárt. A P ponthoz rendelt környezet legyen V^j: ez tartalmazza a $P_2, P_3, \ldots$ sorozatnak végtelen sok elemét. Ezek között van olyan $P_{\nu+1}$ pont, hogy a ν-nek megfelelő index: $i_\nu > j$, ellentétben i_ν megválasztásával. Az M halmaz befedhető tehát véges sok $V^{i_1}, V^{i_2}, \ldots, V^{i_\nu}$ környezettel; az ezeket rendre tartalmazó $W^1, W^2, \ldots, W^\nu$ nyílt halmazok is befedik M-et.

Értelmezés. Az S térben fekvő M halmazt S-ben *mindenütt sűrű*nek nevezzük, ha S minden pontja sűrűsödési pontja M-nek, azaz ha bármely, S-ben fekvő nyílt ponthalmaz tartalmazza M-nek legalább egy pontját.

Értelmezés. Az S topologikus térnek az S' topologikus térre való *egyértelmű leképezés*én olyan előírást értünk, amely S minden P pontjának megfelelteti S'-nek egy és csak egy P' pontját. A leképezést az S tér P pontjában *folytonos*nak nevezzük, ha P képének, P'-nek bármely $V_{P'}$ környezetéhez megadható P-nek olyan U_P környezete, amelynek képe $V_{P'}$-hez tartozik (ez azt jelenti, hogy U_P bármely Q pontjának Q' képe $V_{P'}$-hez tartozik). Az S topologikus térnek S'-re való egyértelmű leképezését folytonosnak nevezzük, ha az S tér minden pontjában folytonos. Ha az S térnek S'-re való egyértelmű és folytonos leképezésének inverze ugyancsak egyértelmű és folytonos leképezése az S' térnek S-re, akkor a megadott leképezést S-nek S'-re való *topologikus leképezés*ének nevezzük ; a két tér pontjainak megfelelését a két tér *topologikus vonatkozás*ának nevezzük.

Az értelmezésből következik, hogy az S térnek az S' térre való $\mathbf{T}$ topologikus leképezése bármely P pont környezeteit olyan halmazokba viszi át, melyeknek összessége a $P' = \mathbf{T}(P)$ pont környezeteinek rendszerével aequivalens. E szerint *az S térnek az S' térre való topologikus leképezése az S térben fekvő tetszőleges nyílt halmazt az S' térben fekvő nyílt halmazba visz át.*

109.7. Tétel. *Az S topologikus térnek az S' topologikus térre való egyértelmű és folytonos leképezése az S térben fekvő bármely összefüggő halmazt összefüggő halmazba visz át.*

Bizonyítás. Legyen M az S térben fekvő összefüggő halmaz, s legyen M' ennek az S' térre való egyértelmű, folytonos leképezésénél származó képe. Legyen A' és B' az M' halmaznak két, közös pont nélküli, nem üres részhalmaza, mely együttesen tartalmazza M'-nek valamennyi pontját. Jelöljük A-val és B-vel M ama pontjainak halmazát, melyeknek képe A'-höz, illetve B'-höz tartozik. A és B közös pont nélküli halmazok, mindegyiknek van legalább egy-egy pontja, s M minden pontja vagy A-hoz, vagy B-hez tartozik. Mivel feltevés szerint M összefüggő, ezért A és B közül egyiknek, például A-nak valamely P pontja sűrűsödési pontja a másik részhalmaznak, B-nek. P képe, P' az A' halmazhoz tartozik. P' bármely $V_{P'}$ környezete tartalmazza B'-nek legalább egy pontját. A leképezés folytonossága miatt megadható ugyanis P-nek olyan U_P környezete, hogy M bármely, ehhez tartozó pontjának képe $V_{P'}$-höz tartozik. A B halmaznak U_P-hez tartozó pontjai tehát B'-nek $V_{P'}$-höz tartozó pontjaiba mennek át. E szerint az A' halmaznak P' pontja sűrűsödési pontja B'-nek. Ebből következik, hogy az M' halmaz összefüggő.

Ha az S és az S' topologikus térre vonatkozóan érvényes az *első megszámlálhatósági axióma*, akkor egy egyértelmű leképezésnek a P pontban való *folytonosság*át azzal a tulajdonsággal jellemezhetjük, hogy *bármely, P-hez konvergáló pontsorozat pontjainak képei P képéhez, P'-höz konvergálnak.*

109.8. Tétel. *Ha az S és az S' topologikus térre vonatkozóan érvényes az első megszámlálhatósági axióma, akkor S-nek S'-re való egyértelmű és folytonos leképezése az S térben fekvő bármely kompakt, zárt halmazt az S' térben fekvő kompakt, zárt halmazba visz át.*

Bizonyítás. Legyen M az S térben fekvő kompakt, zárt halmaz, M' ennek egy egyértelmű és folytonos leképezésnél származó képe. Legyen $P'_1, P'_2, \ldots$ M'-höz tartozó pontok tetszőleges végtelen sorozata. Minden i-re jelöljük P_i-vel M-nek egy olyan pontját, melynek képe P'_i. Mivel M kompakt, a $P_1, P_2, \ldots$ végtelen pontsorozatnak van legalább egy P sűrűsödési pontja, s mivel M zárt, a P pont M-hez tartozik. Van a $P_1, P_2, \ldots$ sorozatnak olyan $P_{n_1}, P_{n_2}, \ldots$ részsorozata, mely P-hez konvergál (**109**.4). A P pont képe, P' a leképezés folytonossága miatt a $P'_{n_1}, P'_{n_2}, \ldots$ sorozat limesze ; e szerint *M' kompakt.* Ha az S' tér Q_1 pontja az M' halmaz sűrűsödési pontja, legyen $P'_1, P'_2, \ldots$ M' pontjainak Q_1-hez konvergáló sorozata. Az M-ben megfelelő P_i pontok sorozatából kiválasztunk egy konvergens részsorozatot ; a sorozat limeszének képe, mely az M' halmazhoz tartozik, azonos Q_1-gyel, tehát M' *zárt* halmaz.

Topologikus csoportok.

A további alkalmazások céljára alkalmas, ha a csoport elemeire értelmezett műveletet nem szorzásnak, hanem *összeadás*nak nevezzük ; erre vonatkozik a következő

Értelmezés. *Additív csoport*on elemek olyan összességét értjük, melyben bármely két a és b elemhez hozzá van rendelve az összességnek egy meghatározott $a+b$ eleme (a és b *összege*), olyan módon, hogy teljesülnek a következő feltételek :[1]

1. Van egy és csak egy olyan 0 elem, hogy a csoport minden a elemére : $a+0=0+a=a$.

2. Minden a elemnek megfelel egy és csak egy, a csoporthoz tartozó $-a$ *inverz elem,* amelyre : $a+(-a)=(-a)+a=0$.

3. Bármely három a, b, c elemre : $(a+b)+c=a+(b+c)$.

Nem tesszük fel, hogy az összeadás kommutatív.

Ebben a szakaszban csoporton mindig additív csoportot értünk.

[1] Elegendő lenne 1. és 2.-ben feltenni, hogy $a+0=a$, és $a+(-a)=0$ l. multiplikatív csoportokra vonatkozó jelöléssel, **106**.15—17.

Értelmezés. *Topologikus csoporton* olyan csoportot értünk, amelynek elemei (speciális) topologikus teret alkotnak, s amelyben az $a+b$ összeg s a $-a$ inverz elem az a és b elemmel folytonos módon változik.

Az utóbbi feltevés részletezése: Megadható az $a+b$ elem tetszőleges V_{a+b} környezetéhez a-nak és b-nek egy-egy olyan V_a és V_b környezete, hogy ha ezeknek egy-egy tetszőleges eleme a' és b', akkor $a'+b'$ a V_{a+b} környezethez tartozik. Megadható a $-a$ elem tetszőleges V_{-a} környezetéhez a-nak olyan V_a környezete, hogy bármely ehhez tartozó a' elem inverze, $-a'$ a V_{-a} környezethez tartozik.

A csoport elemeinek összességét mint topologikus teret *csoporttérnek* (vagy paramétertérnek) nevezzük. A csoportot összefüggőnek nevezzük, ha a csoporttér összefüggő stb.

A csoport minden a eleme meghatározza a csoporttérnek önmagára való topologikus leképezését, amelynél a csoporttér változó x pontjának az $x'=x+a$ pont felel meg. Ha $a=0$, a megfelelő leképezés az azonosság; ha $a\neq 0$, akkor a leképezésnek nincs fixpontja, mivel bármely x-re $x+a\neq x$. Bármely a pontot bármely b pontba a csoportnak egy és csak egy eleme által meghatározott leképezés visz át, t. i. az $x'=x-a+b$ leképezés. Ezeket a megállapításokat a következő tételben foglaljuk össze:

A csoport elemei által a csoporttérben származtatott topologikus leképezések egyszeresen tranzitív csoportot alkotnak.

109.9. Cartan—Schreier-féle tétel. *Ha* **G** *összefüggő csoport, s ha V_0 a 0 elem tetszőleges környezete, akkor* **G** *minden x eleme előállítható véges sok, V_0-hoz tartozó elem összegeként.*

(Ez a tétel annak az eredménynek általánosítása, mely szerint az egyenesre vonatkozó egybevágósági axiómák alapján az egyenes összefüggő voltából, vagy az ezzel aequivalens Dedekind-féle axiómából következik az Archimedes-féle axióma; l. első kötet, 276. o.).

Bizonyítás. Jelöljük $V_0=V$-vel a 0 pont megadott környezetét, s minden $p\geq 1$ egész számra V^p-vel azoknak a pontoknak összességét, amelyek előállíthatók p számú, V-hez tartozó $x_1, x_2, \ldots, x_p$ elem összegeként. $V^1=V$ nyilván részhalmaza V^2-nek, ez V^3-nak stb.; ezt a következő módon jelöljük:

$$V^1 \subset V^2 \subset V^3 \subset \ldots.$$

Jelöljük W-vel azoknak a pontoknak összességét, amelyek valamely p-re V^p-hez tartoznak.

W nyílt halmaz. Legyen ugyanis a a W halmaz tetszőleges pontja, akkor

$$a = x_1 + x_2 + \ldots + x_p \qquad (x_n \subset V).$$

Az

$$x' = x + (x_2 + x_3 + \ldots + x_p)$$

képlet a csoporttér önmagára való topologikus leképezését fejezi ki, amely az $x = x_1$ pontot az $x' = a$ pontba viszi át, s ezért x_1-nek egy, V-hez tartozó V_{x_1} környezetét a-nak egy V_a környezetébe (azaz egy a-t tartalmazó *nyílt* halmazba) viszi át. A V_a környezet pontjai V^p-hez s ezért W-hez tartoznak.

W zárt halmaz. Legyen ugyanis z a W halmaz valamely sűrűsödési pontja. Felvesszük a 0 pontnak olyan V^* környezetét, hogy bármely ehhez tartozó elem inverze V-hez tartozzék. A V^* környezetnek az $x' = x + z$ topologikus leképezésnél származó képe, amelyet $V^* + z$-vel jelölünk, a z pontnak egy környezete ; ez tartalmazza feltevés szerint W-nek legalább egy y pontját. Legyen :

$$y = x_1 + x_2 + \ldots + x_p \quad (x_n \subset V).$$

Az $y - z (= y + (-z))$ pont V^*-hoz, s ezért az $x_0 = z - y$ pont V-hez tartozik. E szerint

$$z = x_0 + y = x_0 + x_1 + \ldots + x_p \quad (x_n \subset V),$$

tehát z a V^{p+1} halmazhoz s ezért W-hez tartozik. Mivel a csoporttér összefüggő, a fenti két tulajdonságból következik, hogy *W a teljes csoporttérrel azonos* (**109**.2).

A V^p halmazok értelmezéséből adódnak a következő állítások (ahol $\overline{V^p}$ jelenti V^p zárt burkolóját) :

109.10. *Ha $x \subset \overline{V^p}$, $y \subset \overline{V^q}$, akkor $x + y \subset \overline{V^{p+q}}$. Továbbá, ha $x \subset V^p$ és $y \subset \overline{V^q}$ (vagy ha $x \subset \overline{V^p}$ és $y \subset V^q$), akkor $x + y \subset V^{p+q}$.*

Az első állítás nyilvánvaló. A második állítás igazolása a következő. Legyen W a 0 pontnak olyan kicsiny környezete, hogy $x + W \subset V^p$. ($x + W$ jelenti azoknak a pontoknak összességét, melyek x-nek és a W-hez tartozó z elemeknek $x + z$ összegeként állíthatók elő). A W környezethez tartozó z elemek inverzeinek összessége ugyancsak egy környezetét adja a 0 pontnak ; jelöljük ezt $-W$-vel. Az y pont $-W + y$ környezete tartalmazza V^q-nak legalább egy pontját, azaz van a

W környezetnek olyan z pontja, melyre $-z+y \subset V^q$. Ebből és az $x+z \subset V^p$ vonatkozásból következik:

$$x+y=(x+z)+(-z+y) \subset V^{p+q}.$$

Értelmezés. A csoporttér két M és M_1 részhalmazát *egyenlőnek* nevezzük, ha a csoport valamely $x'=x+z$ leképezése az egyiket a másikba viszi át, azaz: $M_1=M+z$, és $M=M_1-z$. Ha két halmaz egy harmadikkal egyenlő, akkor egymással is egyenlő; ez közvetlenül következik a csoport-tulajdonságból.

109.11. *Ha M a csoporttérben fekvő kompakt halmaz, és V a* 0 *pont tetszőleges környezete, akkor megadható véges sok, V-vel egyenlő halmaz, amely befedi M-et.*

Bizonyítás. Legyen a_1 az M halmaz tetszőleges pontja, a_2 az M halmaznak olyan pontja, mely nem tartozik $V+a_1$-hez, a_3 M-nek olyan pontja, mely nem tartozik sem $V+a_1$-hez, sem $V+a_2$-höz, s. í. t. Ez az eljárás véges számú lépés után megszakad. Ellenkező esetben ugyanis az $a_1, a_2, \ldots$ végtelen sorozatnak volna legalább egy a sűrűsödési pontja, mivel M kompakt. Legyen W a 0 pontnak olyan környezete, amelyre $W^2 \subset V$, továbbá W^* a 0 pontnak olyan környezete, amely része W-nek, s amelyhez tartozó bármely elem inverze W-hez tartozik. Az a pontnak W^*+a környezete tartalmazza az $a_1, a_2, \ldots$ sorozatnak legalább két különböző a_i és a_j elemét; legyen $i<j$; e szerint:

$$a_j-a \subset W^* \subset W, \quad a_i-a \subset W^*, \quad a-a_i \subset -W^* \subset W,$$

s ezért

$$a_j-a_i=(a_j-a)+(a-a_i) \subset W^2 \subset V, \quad \text{azaz} \quad a_j \subset V+a_i,$$

ellentétben az a_j pontok választásával.

110. §. Hiperkomplex számrendszerek.

Legyen **C** egy kommutatív számtest, s legyen **K** bizonyos elemeknek olyan összessége, amelyekre összeadás, szorzás, továbbá a **C** számtest elemeivel való (skaláris) szorzás értelmezve van a következő feltételek szerint.

K bármely két x és y elemének megfelel egy és csak egy, ugyancsak **K**-hoz tartozó $x+y$, s egy és csak egy **K**-hoz tartozó $x.y$ elem; továbbá **K** tetszőleges x elemének és **C** tetszőleges a elemének megfelel egy és csak egy, **K**-hoz tartozó $a.x=x.a$ elem.

K-ra vonatkozó további feltételeink a következők (x, y, z a **K** rendszerhez, a, b a **C** számtesthez tartozó elemek jelei):

I. A **K** rendszerben az összeadás kommutatív és asszociatív:

$$x + y = y + x, \qquad (x + y) + z = x + (y + z).$$

II. A skaláris szorzás kommutatív és asszociatív:

$$a.x = x.a, \qquad a(bx) = (ab)x, \qquad (ax)(by) = (ab)(xy).$$

III. A skaláris szorzás disztributív:

$$(a + b)x = ax + bx, \qquad a(x + y) = ax + ay.$$

IV. A **K** rendszerben való szorzás disztributív:

$$(x + y)z = xz + yz, \qquad z(x + y) = zx + zy.$$

V. **K**-nak **C**-re vonatkozóan *véges bázisa* van, azaz létezik **K**-ban véges sok olyan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ elem, hogy **K** bármely eleme ezekkel s a **C** számtesthez tartozó $a_1, a_2, \ldots, a_n$ együtthatókkal

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \ldots + a_n \xi_n$$

alakban fejezhető ki.

Ha a fenti feltételek teljesülnek, akkor azt mondjuk, hogy **K** *hiperkomplex számrendszer (vagy algebra) a* **C** *kommutatív számtestre vonatkozóan.* Ez az értelmezés Dicksontól származik.

Ha a **K** számrendszerben való szorzás asszociatív, akkor az algebrát *asszociatív*nak nevezzük. Ha a **K** számrendszernek van egység-eleme, s ha **K** bármely, 0-tól különböző elemének van inverze, akkor **K**-t *diviziós algebrá*nak nevezzük; ebben az esetben **K** maga is számtest.

Tegyük fel, hogy **C** a valós számok testével azonos, s hogy **K** is számtest. Erre az esetre vonatkozik a következő:

110.1. Frobenius-féle tétel. *Ha a* **K** *számtest a valós számok* **C** *testére vonatkozó hiperkomplex számrendszer, akkor* **K** *vagy a valós vagy a komplex számok, vagy a valós quaterniók összessége.*

Bizonyítás. A következő bizonyítás Dicksontól származik. Tegyük fel, hogy **K** nem azonos **C**-vel. Jegyezzük meg, hogy ha **K**-nak van **C**-re vonatkozóan egy n elemből álló bázisa (l. V. feltételt), akkor **K**-*nak bármely* $n+1$ *eleme,* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *lineárisan függ egymástól,* azaz fennáll egy

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0 \tag{1}$$

alakú egyenlet, amelynek $a_0, a_1, \ldots, a_n$ együtthatói valós számok s nem valamennyi 0. Fejezzük ki ugyanis az x_i elemeket a ξ_k báziselemek segítségével, valós c_{ik} együtthatókkal:

$$x_i = c_{i1}\xi_1 + c_{i2}\xi_2 + \ldots + c_{in}\xi_n \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n);$$

képezzük a következő egyenletrendszert:

$$c_{0k}y_0 + c_{1k}y_1 + \ldots + c_{nk}y_n = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

ennek van legalább egy, nem triviális $(y_0, y_1, \ldots, y_n) = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ valós megoldása. Az a_i együtthatókkal fennáll az (1) egyenlet.

Alkalmazzuk ezt az eredményt a **K** számtest $1, x, x^2, \ldots, x^n$ számaira; adódik, hogy fennáll közöttük egy

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$$

alakú kapcsolat, vagyis hogy x *eleget tesz egy valós együtthatójú, algebrai egyenletnek.* Az egyenlet baloldalán álló $f(x)$ polinom felbontható az algebra alaptétele szerint valós együtthatójú, irreducibilis, első- és másodfokú tényezőkre. Mivel ezeknek szorzata 0, ezért legalább az egyik tényező 0 (l. **106**.20). E szerint *x gyöke egy első- vagy másodfokú irreducibilis, valós együtthatójú algebrai egyenletnek:*

$$x - p = 0, \qquad \text{vagy} \qquad x^2 - 2px + r = 0.$$

Az első esetben $x = p$ valós szám. A második esetben:

$$(x - p)^2 = p^2 - r;$$

a jobboldalon álló valós szám nem lehet pozitív, különben $\sqrt{p^2 - r}$ valós és

$$x^2 - 2px + r = (x - p - \sqrt{p^2 - r})(x - p + \sqrt{p^2 - r})$$

két valós együtthatójú, elsőfokú tényező szorzata, feltevésünkkel ellentétben. Ezért $p^2 - r < 0$; jelöljük q-val a $\sqrt{r - p^2}$ valós számot s legyen

$$\xi = \frac{x - p}{q};$$

ennek a számnak a négyzete:

$$\xi^2 = -1.$$

Ezzel igazoltuk, hogy *a* **K** *számtest minden x elemét előállíthatjuk*

$$x = p + q\xi \qquad (2)$$

alakban, ahol p, q valós számok, ξ pedig **K**-*nak olyan száma, melynek négyzete:* $\xi^2 = -1$.

Ha az 1, ξ bázis-elemekkel a **K** számtest minden száma előállítható a (2) alakban, akkor **K** *a komplex számok teste;* ebben az esetben ξ-t i-vel jelöljük.

Tegyük fel, hogy **K** nem azonos a valós vagy a komplex számok testével; ekkor van **K**-nak legalább három lineárisan független eleme. A fenti eljárással meghatározunk két olyan ξ és η számot, melyre

$$\xi \neq \pm \eta, \quad \text{és} \quad \xi^2 = \eta^2 = -1.$$

Az $1, \xi, \eta$ *számok lineárisan függetlenek,* mivel az $a=0$, $b=\pm 1$ számpárokon kívül nincs más olyan valós a, b számpár, melyre

$$(a + b\xi)^2 = a^2 - b^2 + 2ab\xi = -1;$$

ezért minden valós a, b számpárra: $a+b\xi \neq \eta$.

A $\xi\eta+\eta\xi$ *szám valós.* A $(\xi+\eta)$ és $(\xi-\eta)$ számok ugyanis valós együtthatójú másodfokú egyenletek gyökei, s ezért

$$(\xi + \eta)^2 = a(\xi + \eta) + b = \xi^2 + \eta^2 + \xi\eta + \eta\xi = -2 + (\xi\eta + \eta\xi),$$
$$(\xi - \eta)^2 = c(\xi - \eta) + d = \xi^2 + \eta^2 - \xi\eta - \eta\xi = -2 - (\xi\eta + \eta\xi),$$

ahol a, b, c, d valós számokat jelentenek. A két egyenletből összeadással kapjuk, hogy

$$(a + c)\xi + (a - c)\eta + b + d = -4,$$

s mivel 1, ξ, η lineárisan függetlenek, ezért

$$a + c = a - c = 0, \quad \text{azaz} \quad a = c = 0.$$

E szerint

$$\xi\eta + \eta\xi = b + 2 = 2r \qquad (r = \text{valós}).$$

Továbbá

$$(\xi + \eta)^2 = -2 + 2r, \quad (\xi - \eta)^2 = -2 - 2r.$$

Mivel a $(\xi+\eta)^2$, $(\xi-\eta)^2$ valós számok negatívak, ezért $1-r^2 > 0$.

Vezessük be a következő jelölést:

$$i = \xi, \quad j = \frac{\eta + r\xi}{\sqrt{1 - r^2}}.$$

Ezekre a számokra a következő vonatkozások érvényesek:

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1; \quad ij + ji = 0.$$

Az $ij=k$ *szám független* $1, i, j$*-től.* Ha ugyanis

$$k = ij = a + bi + cj \quad (a, b, c \text{ valós számok}),$$

akkor balról i-vel való szorzással adódnék:

$$-j = ai - b + c(a + bi + cj)\,;$$

mivel pedig $1, i, j$ lineárisan függetlenek, a bal- és a jobboldalon j együtthatója megegyeznék egymással, azaz $c^2=-1$, ellentétben azzal, hogy c valós szám.

A k számra fennállanak a következő vonatkozások:

$$k^2 = (ij)(ij) = (ij)(-ji) = -1,$$
$$jk = j(ij) = j(-ji) = i, \qquad ik = i(ij) = -j,$$
$$ki = (ij)i = (-ji)i = j, \qquad kj = (ij)j = -i.$$

Ezekből a vonatkozásokból nyilvánvaló, hogy $1, i, j, k$ *a valós quaterniók egységei* (l. **91**.8).

Ha a **K** számtest valamely z száma az $1, i, j, k$ elemektől lineárisan független volna, állítsuk elő $z=p+q\zeta$ alakban, ahol $\zeta^2=-1$. A $\zeta i+i\zeta=2s$ szám valós és $1-s^2>0$; legyen

$$l = \frac{\zeta + si}{\sqrt{1-s^2}}.$$

A fentiek szerint

$$l^2 = -1, \quad il + li = 0, \quad jl + lj = a, \quad kl + lk = b,$$

ahol a, b valós számok. Az $il+li=0$ egyenletet szorozzuk meg jobbról j-vel, adódik:

$$(il)j + (li)j = i(lj) + l(ij) = i(a - jl) + lk = ai - kl + lk =$$
$$= ai - kl + (b - kl) = ai + b - 2kl = 0,$$

azaz:

$$2kl = ai + b\,;$$

ebből, balról k-val való szorzással következik:

$$-2l = aj + bk,$$

ellentétben azzal a feltevésünkkel, hogy z, s ezért l is lineárisan független $1, i, j, k$-tól. Ezzel a Frobenius-féle tételt bebizonyítottuk.

111. §. A valós és a komplex projektív geometria alapjai.

111.1. Legyen adva pontok, egyenesek és síkok olyan összessége, amelyre vonatkozóan teljesülnek a *projektív geometria összetartozási axiómái* (**P I**), továbbá a következő feltételek:

α) Bármely egyenes pontjai összefüggő és kompakt topologikus teret alkotnak, melyben teljesül az első megszámlálhatósági axióma (l. **109**.3).

β) Ha a, b, c egy síkban fekvő három különböző egyenes, s A, B az a és b egyenes két különböző pontja, akkor az AB és c egyenesek C metszéspontja folytonos módon változik az A és B pontok folytonos változásával.

Az utóbbi feltétel részletesen azt jelenti, hogy a C pontnak a c egyenesre vonatkozó bármely környezetéhez megadható A-nak a-ra és B-nek b-re vonatkozó olyan környezete, hogy ha A' és B' ezeknek egy-egy tetszőleges pontja, akkor az $A'B'$ és c egyenesek C' metszéspontja a C pont felvett környezetéhez tartozik.

Ebből a feltételből közvetlenül következik, hogy *egy síkban fekvő két egyenes bármely perspektív vonatkozása topologikus.*

111.2. Vegyünk fel egy a egyenest s ezen három különböző O, E, U pontot; ezekre mint alappontokra vonatkozóan értelmezzük az egyenes pontjainak összeadását és szorzását A **106**.2-ben alkalmazott jelöléseket megtartva (l. 158. ábra, 540. o.), az X pontnak C-ből az u egyenesre való B vetülete, s Y-nak A-ból u'-re való D vetülete folytonosan változik X-szel és Y-nal; a BD egyenesnek a-val való metszéspontja, vagyis az $X+Y$ pont folytonosan változik B-vel és D-vel; ebből következik, hogy *az $X+Y$ összeg folytonosan változik X-szel és Y-nal.* Ugyanúgy látjuk be, hogy *az $X.Y$ szorzat folytonosan változik X-szel és Y-nal.*

Az X pontból a $-X$ pontot, azaz X-nek az O, U pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltját, s az X^{-1} pontot (feltéve, hogy $X \neq O$) három perspektív leképezés alkalmazásával kapjuk, tehát $-X$ és X^{-1} ($X \neq O$) is folytonosan változik X-szel. Ebből s az előbbi eredményből következik, hogy *$X-Y$, valamint X/Y és $\frac{X}{Y}$ (ha $Y \neq O$) folytonosan változik X-szel és Y-nal.*

Értelmezés. *Folytonos számtest*en olyan számtestet értünk, melynek elemei topologikus teret alkotnak, s amelyben bármely két szám összege, különbsége, szorzata és hányadosa (feltéve, hogy az osztó nem 0) folytonosan változik a két számmal.

A fentiek szerint a **111**.1 feltételekből következik, hogy az a egyenesnek U-tól különböző pontjai folytonos számtestet alkotnak. (Az α feltételnek eddig még csak azt a részét használtuk fel, mely szerint az egyenes pontjai topologikus teret alkotnak.)

Az O pont bármely V_O környezetének megfelel U-nak olyan V_U környezete, hogy ha $X \subset V_U$, akkor $X^{-1} \subset V_O$, és megfordítva. E helyett rövidebben azt fogjuk mondani, hogy *ha az a egyenes változó X pontja U-hoz, akkor X^{-1} az O ponthoz tart.* (A következő meggondoláshoz l. a **21**.13 jelöléseit s a 33. ábrát, 98. o.) Ha az $X = P_x$ pont U-hoz tart, X-nek A-ból az u egyenesre való C vetülete is U-hoz tart; a C pontot az $E = P_1$ ponttal összekötő egyenesnek az o egyenessel való D metszéspontja az $O = P_0$ ponthoz, s ezért a BD egyenesnek a-val való $X^{-1} = P_{1/x}$ metszéspontja O-hoz tart.

Az a egyenes U-tól különböző pontjaiból álló számtestet **K**-val s **K** elemeit (általában) latin kisbetűkkel jelöljük, a nulla-elemet 0-val, az egység-elemet e-vel stb. Az egyenes pontjainak van olyan sorozata, mely U-hoz konvergál (l. **109**.1 és 4); ez a **K** számtestben *divergens* sorozat, azaz nincs sűrűsödési pontja. A **K** számtestben *kompakt* minden olyan halmaz, melynek az egyenesen U nem sűrűsödési pontja. *A* **K** *számtest nem kompakt, de kicsinyben kompakt.* Ezt a kifejezésmódot alkalmazva, előbbi eredményünket így fogalmazzuk meg:

111.3. *Ha az $x_1, x_2, \ldots$ számok sorozata* 0*-hoz konvergál, akkor a reciprok értékekből álló $x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots$ sorozat divergens és megfordítva.*

Be fogjuk bizonyítani a következő tételt:

111.4. PONTRJAGIN-féle tétel. *Ha a* **K** *folytonos számtest mint topologikus tér összefüggő és kicsinyben kompakt, s eleget tesz az első megszámlálhatósági axiómának, akkor* **K** *vagy a valós, vagy a komplex számok, vagy a valós quaterniók testével izomorf.*

A tétel következő bizonyítása PONTRJAGIN-tól származik. A tételnek **K**-ra vonatkozó feltevéseiből könnyen levezethető, hogy **K** *nem kompakt,* s hogy *érvényes a* **111**.3 *tulajdonság;* ennek igazolását mellőzzük.

További tárgyalásunk a **K** folytonos számtestre vonatkozik. Ha A tetszőleges halmaz (azaz **K** tetszőleges részhalmaza) és z a **K** testnek valamely eleme, akkor $A.z$-vel jelöljük az A-hoz tartozó a számokból és z-ből alkotott $a.z$ szorzatok összességét; hasonlóan $z.A$ jelenti a $z.a$ szorzatok, és $A+z$ az $a+z$ összegek halmazát.

111.5. *Ha A kompakt, zárt halmaz, és V nyílt halmaz, s ha az $x_1, x_2, \ldots$ számok sorozata x-hez konvergál, akkor abból a feltevésből, hogy $A.x \subset V$, következik: $A.x_n \subset V$, minden elég nagy n-re.*

Bizonyítás. Ellenkező esetben legyenek $n_1, n_2, \ldots$ olyan indexek, amelyekre $A.x_{n_i}$ nem tartozik V-hez; legyen a_{n_i} az A halmaznak olyan pontja, melyre $a_{n_i}.x_{n_i}$ nem tartozik V-hez. Az a_{n_i} sorozatnak van legalább egy, A-hoz tartozó a sűrűsödési pontja. Kiválasztunk az a_{n_i} sorozatból egy, a-hoz konvergáló részsorozatot (**109**.4), ezt is a_{n_i}-vel jelöljük. Mivel $a_{n_i} \to a$ (olvasd: a_{n_i} *konvergál* a-hoz), és $x_{n_i} \to x$, ezért a szorzat folytonossága miatt: $a_{n_i}.x_{n_i} \to a.x$. Az $A.x \subset V$ feltevés értelmében az $a.x$ pont V-hez tartozik, s mivel V nyílt halmaz, ezért valamely n_i indextől kezdve $a_{n_i}.x_{n_i}$ is V-hez tartoznék, a_{n_i}-re vonatkozó feltevésünkkel ellentétben.

111.6. *Ha A tetszőleges halmaz és W zárt halmaz, s ha az $x_1, x_2, \ldots$ sorozat x-hez konvergál, akkor abból a feltevésből, hogy minden n-re $A.x_n \subset W$, következik: $A.x \subset W$.*

Bizonyítás. Legyen a az A halmaz tetszőleges pontja; mivel $a.x_n \to a.x$, s mert az $a.x_n$ sorozat elemei feltevés szerint a W zárt halmazhoz tartoznak, a sorozat limesze: $a.x$ is W-hez tartozik.

A (**K**-hoz tartozó) x *szám hatványsorozatá*nak nevezzük az x pozitív egész kitevőjű $x, x^2, x^3, \ldots$ hatványaiból álló sorozatot.

111.7. *Ha 0 az x szám hatványsorozatának sűrűsödési pontja, akkor a sorozat 0-hoz konvergál. Van továbbá x-nek olyan környezete, hogy bármely, ahhoz tartozó y szám hatványsorozata is 0-hoz konvergál.*

Bizonyítás. Legyen V a 0 pontnak tetszőleges, kompakt környezete; V burkolója, $\overline{V}$ zárt és kompakt halmaz. Mivel 0 az x^n sorozatnak sűrűsödési pontja, s mert $\overline{V}.0=0 \subset V$, ezért **111**.5 szerint az x^n sorozatnak olyan x^m elemére, mely a 0 pont elég kicsiny környezetében fekszik, fennáll a következő vonatkozás:

$$\overline{V}.x^m \subset V.$$

Ha y az x pont elég kicsiny környezetének pontja, akkor y^m is az x^m pontnak olyan kicsiny környezetéhez tartozik, hogy **111**.5 szerint

$$\overline{V}.y^m \subset V.$$

Ennek a vonatkozásnak ismételt alkalmazásából adódik:

$$\overline{V}.y^{qm} \subset \overline{V}.y^{(q-1)m} \subset \ldots \subset \overline{V}.y^m \subset V. \tag{1}$$

Ha z a $\bar{V}$ halmaz tetszőleges, 0-tól különböző pontja, akkor tehát

$$z.y^{qm} \subset V \subset \bar{V},$$

s ebből

$$y^{qm} \subset z^{-1}.\bar{V}.$$

E szerint az $y^m, y^{2m}, \ldots, y^{qm}, \ldots$ sorozat összes eleme a $z^{-1}.\bar{V}$ kompakt halmazhoz tartozik, s ezért a sorozatnak van legalább egy t sűrűsödési pontja. Ha $t \neq 0$, akkor válasszunk ki egy olyan $y^{q_1 m}, y^{q_2 m}, \ldots$ részsorozatot, mely t-hez konvergál; legyen minden k-ra $q_k - q_{k-1} > 1$. Az $y^{(q_k - q_{k-1})m}$ $(k=1, 2, \ldots)$ sorozat az e egység-elemhez konvergál. Másrészt az (1) vonatkozás folytán

$$\bar{V}.y^{(q_k - q_{k-1})m} \subset \bar{V}.y^m \subset V;$$

alkalmazzuk a **111**.6 tételt a $W = \bar{V}.y^m$ zárt halmazra s az e-hez konvergáló $y^{(q_k - q_{k-1})m}$ sorozatra, adódik, hogy

$$\bar{V} = \bar{V}.e \subset \bar{V}.y^m \subset V.$$

Ez azt jelentené, hogy V zárt és nyílt halmaz; mivel **K** összefüggő, V azonos lenne a **K** térrel (**109**.2); ez azonban ellenmondás, mivel V kompakt, **K** nem kompakt halmaz.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az $y^m, y^{2m}, \ldots$ sorozat 0-hoz konvergál. Ebből következik, hogy minden n-re az $y^{m+n}, y^{2m+n}, \ldots$ sorozat is, s ezért az $n=0, 1, 2, \ldots, m-1$ értékeknek megfelelő sorozatok egyesítéséből származó $y, y^2, y^3, \ldots$ sorozat is 0-hoz konvergál.

111.8. Jelöljük D-vel **K** amaz elemeinek halmazát, melyeknek hatványsorozata 0-hoz konvergál. A **111**.7 tétel szerint *D nyílt halmaz; mivel 0 a D halmazhoz tartozik, D tartalmazza a 0 pont valamely környezetét.*

Ha x a D halmazhoz tartozik, azaz $x, x^2, \ldots \to 0$, akkor **111**.3 szerint $x^{-1}, x^{-2}, \ldots$ divergens sorozat. Jelöljük F-fel azoknak az elemeknek összességét, amelyeknek hatványsorozata divergens. *D és F elemei egymáshoz reciprok elemek s F is nyílt halmaz.*

Legyen E azoknak az elemeknek összessége, amelyek nem tartoznak sem D-hez, sem F-hez. *E zárt halmaz;* bármely elemének hatványsorozata nem tartalmaz sem divergens, sem 0-hoz konvergáló részsorozatot (l. **111**.7).

Könnyen belátható, hogy **K**-*nak tetszőleges x elemével a $-x$ elem a D, E, F részhalmazok közül ugyanahhoz tartozik.*

Jelöljük $D \dot{+} E$-vel azoknak az elemeknek összességét, melyek vagy D-hez, vagy E-hez tartoznak.

$D \dot{+} E$ kompakt halmaz. Legyen ugyanis $x_1, x_2, \ldots$ tetszőleges divergens sorozat; **111**.3 szerint $x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots \to 0$. Mivel D tartalmazza 0-nak egy környezetét, ezért elég nagy n-re $x_n^{-1} \subset D$, tehát D értelmezése szerint $x_n^{-1}, x_n^{-2}, \ldots \to 0$. Ebből **111**.3 szerint következik, hogy az $x_n, x_n^2, \ldots$ sorozat divergens, azaz $x_n \subset F$. A megadott $x_1, x_2, \ldots$ divergens sorozat minden, elég nagy indexű eleme tehát F-hez tartozik; $D \dot{+} E$ nem tartalmaz divergens sorozatot, azaz kompakt.

111.9. *Minden $m>1$ egész számnak megfelel legalább egy olyan ζ_m elem, melyre $\zeta_m \subset \overline{D}$, és $m.\zeta_m$ nem tartozik $\overline{D}^{m-1}$-hez.* ($\overline{D}$ jelenti D zárt burkolóját, azaz D pontjainak és sűrűsödési pontjainak halmazát; D^k azoknak az elemeknek halmazát, melyek előállíthatók k számú, D-hez tartozó elem összegeként; $\overline{D}^k$ jelenti D^k zárt burkolóját.)

B i z o n y í t á s. Határozzuk meg **K**-nak olyan y elemét (a 0 pont elég kicsiny környezetében), melyre

$$(D\,.\,y)^{2m-2} \subset D.$$

Befedhetjük a $\overline{D}$ halmazt ν számú, $D.y$-nal egyenlő környezettel (**109**.11). Legyen $N=m.\nu$; a D^N nyílt halmaz *határának* tetszőleges z pontját előállíthatjuk

$$z = x_1 + x_2 + \ldots + x_N \quad (x_n \subset \overline{D})$$

összeg alakjában. Az $N=m.\nu$ számú x_n között van legalább m olyan elem, amely ugyanahhoz a $D.y$-nal egyenlő $(D.y)+a$ környezethez tartozik; legyenek ezek például $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Az x_1-a, $x_2-a, \ldots$, $x_{m-1}-a$, x_m-a elemek $D.y$-hoz tartoznak, s a $-D.y=D.y$ vonatkozás folytán $a-x_m$ is $D.y$-hoz tartozik; ezért az

$$(x_1-a)+(a-x_m)+(x_2-a)+(a-x_m)+\ldots+(x_{m-1}-a)+(a-x_m)$$

$2m-2$ tagból álló összeg, y meghatározása szerint D-hez tartozik, azaz:

$$(x_1-x_m)+(x_2-x_m)+\ldots+(x_{m-1}-x_m) \subset D.$$

Mivel

$$x_{m+1}+\ldots+x_N \subset \overline{D}^{N-m},$$

a két utóbbi vonatkozásból összeadással kapjuk (l. **109**.10), hogy

$$z-m\,.\,x_m=(x_1-x_m)+\ldots+(x_{m-1}-x_m)+x_{m+1}+\ldots+x_N \subset D^{N-m+1}$$

Ha tehát $m.x_m \subset \overline{D}^{m-1}$ volna, akkor ebből s az előbbi vonatkozásból összeadással adódnék, hogy

$$(z - m.x_m) + m.x_m = z \subset D^N,$$

ellentétben azzal a feltevéssel, hogy z a D^N nyílt halmaz határához tartozik. Jelöljük az x_m pontot ζ_m-mel; erre teljesül a tételben foglalt állítás.

111.10. *Ha m és n pozitív egész számok, akkor az $\frac{m}{n}\cdot e$ elem D-hez, E-hez vagy F-hez tartozik, a szerint, hogy $m<n$, $m=n$, illetve $m>n$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\frac{m}{n}\cdot e \subset D \dotplus E$; ez esetben $\frac{m}{n}\cdot e$ hatványsorozata nem tartalmaz divergens részsorozatot. Ha x jelenti D tetszőleges elemét, akkor $x^k \to 0$ s ezért **111.5** szerint

$$\left(\frac{m}{n}\cdot e\right)^k \cdot x^k \to 0 \quad (k \to \infty);$$

mivel $\frac{m}{n}\cdot e$ felcserélhető x-szel (**106.24**), ezért

$$\left(\frac{m}{n}\cdot e\right)^k . x^k = \left(\frac{m}{n}\cdot x\right)^k \to 0;$$

azaz minden, D-hez tartozó x-re $\frac{m}{n}\cdot x$ is D-hez tartozik. Ha D változó x pontja a **111.9**-ben meghatározott ζ_m-hez tart, akkor az ugyancsak D-hez tartozó $\frac{m}{n}\cdot x$ elem $\frac{m}{n}\cdot \zeta_m$-hez tart, tehát az utóbbi $\overline{D}$-hez tartozik. Ebből következik, hogy $m.\zeta_m \subset \overline{D}^n$, s mert **111.9** szerint $m.\zeta_m$ nem tartozik $\overline{D}^{m-1}$-hez, ezért $m-1<n$, azaz: $m \leqq n$.

Ha az $\frac{m}{n}\cdot e$ elem az $F \dotplus E$ halmazhoz tartozik, akkor a reciprok $\frac{n}{m}\cdot e$ elem $D \dotplus E$-hez tartozik, tehát előbbi eredményünk szerint $n \leqq m$. A két eredmény összefoglalásából adódik, hogy ha $\frac{m}{n}\cdot e \subset E$, akkor $m=n$; ha pedig $m<n$, illetve $m>n$, akkor $\frac{m}{n}\cdot e$ a D, illetve az F halmazhoz tartozik.

Mivel az x és $-x$ elemek a D, E, F halmazok közül ugyanahhoz tartoznak, előbbi eredményünkből következik, hogy ha m és n tetszőleges egész számok és $n \neq 0$, akkor $\frac{m}{n}.e$ a $D, E,$ illetve F halmazhoz tartozik a szerint, hogy $|m| < |n|$, $|m| = |n|$, illetve $|m| > |n|$.

111.11. *Az* $e, 2e, 3e, \ldots$ *sorozat divergens, az* $e, \frac{e}{2}, \frac{e}{3}, \ldots$ *sorozat 0-hoz konvergál.*

Ha ugyanis az $e, 2e, 3e, \ldots$ sorozatnak volna egy $n_1e, n_2e, \ldots$ konvergens részsorozata ($n_1 < n_2 < \ldots$), akkor az $(n_2-n_1)e, (n_3-n_2)e, \ldots$ sorozat 0-hoz konvergálna, holott az előző tétel szerint a sorozat minden eleme D-n kívül fekszik, D pedig tartalmazza a 0 pontnak egy környezetét. Az $n.e$ sorozat divergenciájából **111**.3 szerint következik, hogy a reciprok $\frac{e}{n}$ sorozat 0-hoz konvergál.

A **111**.5 és 11 eredményből következik, hogy *ha n elég nagy, akkor a* $D\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot e\right)$ *halmaz a* 0 *pontnak tetszőleges kis környezetéhez tartozik.*

111.12 *Ha az* $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$, $r_2 = \frac{m_2}{n_2}, \ldots$ *racionális számok sorozata 0-hoz konvergál, akkor a* **K** *számtest* $r_1e, r_2e, \ldots$ *elemei 0-hoz konvergálnak.*

Legyen ugyanis V a 0 pont tetszőleges környezete ; minden, elég nagy pozitív egész p számra $D.\left(\frac{1}{p}.e\right) \subset V$. Az r_k sorozat elemeire, elég nagy indextől kezdve $|r_kp| < 1$, ezért **111**.10 szerint

$$r_kp.e = \frac{m_kp}{n_k}.e \subset D,$$

ebből következik :

$$\frac{m_k}{n_k}.e \subset D.\left(\frac{1}{p}.e\right) \subset V.$$

111.13. *Ha az* $r_1, r_2, \ldots$ *racionális számok sorozata konvergál egy r valós számhoz, akkor a* **K** *számtest* $r_1e, r_2e, \ldots$ *elemeinek sorozata konvergens.*

Legyen ugyanis p olyan pozitív egész szám, melyre $|r_k| < p$, akkor

$$\frac{r_k}{p}.e \subset D$$

(**111**.10), tehát D kompaktsága folytán van az $\frac{r_k}{p}.e$ sorozatnak legalább egy z' sűrűsödési pontja ; az $r_k.e$ sorozatnak sűrűsödési pontja $z = pz'$. Kiválasztunk egy olyan $r'_k.e$ részsorozatot, mely z-hez konvergál. Mivel az $r_k - r'_k$ racionális számok sorozata 0-hoz konvergál, **111**.12 szerint $(r_k - r'_k).e \to 0$; ebből és az $r'_k.e \to z$ vonatkozásból összeadással kapjuk, hogy $r_k.e \to z$.

111.14. *Ha az $r_1, r_2 \dots$ racionális számok sorozata r-hez és az $r'_1, r'_2, \dots$ racionális számok sorozata r'-höz konvergál, s ha $r \neq r'$, akkor az $r_k e$ és az $r'_k e$ sorozatok limesze különböző.*

Legyen ugyanis p olyan pozitív egész szám, hogy elég nagy k indexre $p.|r_k - r'_k| > 1$; a $p(r_k - r'_k).e$ elem **111**.10 szerint nem tartozik D-hez, tehát $(r_k - r'_k).e$ nem tartozik $D.\left(\frac{1}{p}.e\right)$ hez, amely tartalmazza a 0 pontnak egy környezetét. Mivel az $(r_k - r'_k)e$ sorozat nem konvergál 0-hoz, ezért az $r_k e$ és az $r'_k e$ sorozatok limesze különböző.

Az $r_k e$ sorozat limeszét $r.e$-vel jelöljük, ahol $r = \lim r_k$.

A **111**.13 és 14 tételből következik, hogy az r valós számok és a **K** számtest $r.e$ elemei kölcsönösen egyértelmű és folytonos módon felelnek meg egymásnak. Mivel bármely r racionális számra nézve az $r.e$ elem felcserélhető a **K** számtest minden elemével, ugyanez érvényes tetszőleges r valós számra is. E szerint:

111.15. *Van a* **K** *számtestnek egy olyan* **C** *részhalmaza, mely maga is számtest, s a valós számok testének kölcsönösen egyértelmű, folytonos és izomorf vonatkozással felel meg. A* **C** *számtest elemei felcserélhetők* **K** *minden elemével.*

111.16. *A* **K** *számtestnek* **C***-re vonatkozóan véges bázisa van*, azaz megadható **K**-nak véges számú olyan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ eleme, hogy ezekkel s **C**-hez tartozó $a_1, a_2, \dots, a_n$ együtthatókkal **K** bármely x eleme

$$x = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_n\xi_n$$

alakban állítható elő.

Bizonyítás. Legyen $\xi_1 = e$. Ha a **C** számtest nem azonos **K**-val, akkor *van E-nek olyan ξ_2 eleme, amely nem állítható elő egy* **C***-hez tartozó y s egy D-hez tartozó z elem összegeként.* Legyen ugyanis x tetszőleges, **C**-hez nem tartozó elem. Ha minden n pozitív egész számra

$$nx = y_n + z_n, \text{ azaz } x = \frac{y_n}{n} + \frac{z_n}{n} \quad (y_n \subset \mathbf{C}\ ,\ z_n \subset D),$$

akkor, mivel a z_n sorozat kompakt (**111**.8), és $\frac{e}{n} \to 0$ (**111**.11), ezért

$$\frac{z_n}{n} = z_n \cdot \frac{e}{n} \to 0, \quad \text{és} \quad \frac{y_n}{n} \to x.$$

De mert **C** zárt halmaz, a **C**-hez tartozó $\frac{y_n}{n}$ elemek x limesze is **C**-hez tartoznék, x megválasztásával ellentétben.

Azoknak az elemeknek összessége, amelyek előállíthatók **C** és D egy-egy elemének összegeként, nyílt halmazt alkotnak, mely az előbbi bekezdés szerint nem azonos **K**-val, s ezért van legalább egy t határpontja. Legyenek $t_1, t_2, \ldots$ olyan elemek, amelyek előállíthatók **C** és D egy-egy elemének összegeként: $t_n = y_n + z_n$ ($y_n \subset$ **C**, $z_n \subset D$), s melyeknek sorozata t-hez konvergál. A $z_1, z_2, \ldots$ sorozatnak van legalább egy z_0 sűrűsödési pontja, mivel D kompakt; ezért az $y_n = t_n - z_n$ sorozatnak sűrűsödési pontja $y = t - z_0$. A $t = y + z_0$ kifejezés miatt z_0 nem tartozhatik D-hez, de mert z_0 a D-hez tartozó z_n pontok sűrűsödési pontja, ezért z_0 *az E halmazhoz tartozik. A z_0 elem nem állítható elő egy* **C**-*hez tartozó y' s egy D-hez tartozó z' elem összegeként,* különben

$$t = (y + y') + z'$$

a **C**-hez tartozó $y + y'$ s a D-hez tartozó z' elem összege volna, t megválasztásával ellentétben.

Jelöljük ξ_2-vel a fenti eljárással meghatározott z_0 elemet, s $\mathbf{C}_2$-vel azoknak az elemeknek összességét, amelyek **C**-hez tartozó a_1, a_2 együtthatókkal $a_1\xi_1 + a_2\xi_2$ alakban állíthatók elő. $\mathbf{C}_2$ *zárt halmaz,* mint könnyen belátható. Ha $\mathbf{C}_2$ nem azonos **K**-val, akkor a fenti eljárással meghatározzuk E-nek olyan ξ_3 elemét, amely nem állítható elő egy $\mathbf{C}_2$-höz tartozó y és egy D-hez tartozó z elem összegeként; s így tovább.

A $\xi_1, \xi_2, \ldots$ elemek meghatározására adott eljárás véges számú lépés után véget ér. Meghatározásuk szerint ugyanis a $\xi_i - \xi_j$ különbségek közül egyik sem tartozik D-hez. Ha $V = D.y$ a 0 pont olyan környezete, hogy $V^2 \subset D$, s ha az E kompakt halmazt ν számú, V-vel egyenlő környezettel befedjük (**109**.11), akkor E bármely $N = 2\nu$ pontja közül legalább kettő ugyanahhoz a V-vel egyenlő környezethez, s mivel $-V = V$, ezért különbségük D-hez tartozik. E szerint a ξ_n elemek száma $< N$, azaz véges. (A $\xi_1, \xi_2, \ldots$ elemek a **K** számrendszer $1, i, \ldots$ egységei, mint utólag könnyen belátható.) Ezzel bebizonyítottuk a **111**.16 tételt.

Ebből következik, hogy *a* **K** *számtest a* **C** *számtestre vonatkozó hiperkomplex számrendszer;* mivel **C** a valós számok testével izomorf, ezért a Frobenius-féle tétel feltevései teljesülnek (**110**.1). Ebből következik, hogy *a* **K** *számtest a valós, vagy a komplex számok, vagy a valós quaterniók testével izomorf;* bebizonyítottuk ezzel a Pontrjagin-féle tételt (**111**.4).

Ha ki akarjuk zárni a quaterniókat, fel kell tennünk, hogy a **K** számtest kommutatív; ezzel aequivalens az a feltétel, hogy a geometriában érvényes a PAPPUS-féle tétel (**106**.9). Ilyen módon eljutottunk a valós és a komplex projektív geometria jellemzéséhez, amelyet a következő tételben mondunk ki:

111.17. Tétel. *Legyen adva pontok, egyenesek és síkok olyan összessége, amelyre teljesülnek a projektív geometria összetartozási axiómái* (**P I**), *továbbá a következő feltételek:*

α) Bármely egyenes pontjai összefüggő és kompakt topologikus teret alkotnak, melyben érvényes az első megszámlálhatósági axióma.

β) Ha a, b, c egy síkban fekvő három különböző egyenes, s A és B az a és b egyenes két különböző pontja, akkor az AB és c egyenesek C metszéspontja folytonos módon változik az A és B pontok folytonos változásával.

γ) A geometriában érvényes a PAPPUS-*féle tétel.*

A fenti feltételekkel jellemzett geometria a közönséges valós vagy komplex projektív geometria.

A valós és a komplex projektív geometria megkülönböztetésére sokféle mód van; például a LÜROTH—ZEUTHEN-féle tétel érvényessége jellemzi a valós projektív geometriát:

A fenti feltételekkel jellemzett geometria a valós projektív geometria, ha az egyenes bármely három különböző pontja által származtatott harmonikus pontrendszer az egyenesen mindenütt sűrű. Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor a geometria a komplex projektív geometria.

IRODALOM.

BAKER, H. F., Principles of Geometry, I—II. Cambridge, 1929, 1930. (2. kiadás.)
BIEBERBACH, L., Einleitung in die höhere Geometrie. Leipzig, 1933.
BONOLA, R., LIEBMANN, H., Die nicht-euklidische Geometrie. Leipzig, 1908.
CARTAN E., Leçons sur la géométrie projective complexe. Paris, 1931.
COOLIDGE, J. L., The Elements of Non-euclidean Geometry. Oxford, 1909.
DICKSON, L. E., Algebras and their Arithmetics. Chicago, 1923.
DOEHLEMANN, K., Geometrische Transformationen, I—II. Leipzig, 1902, 1908.
ENRIQUES, F., Lezioni di geometria proiettiva. Bologna, 1920. (4. kiadás.)
FORDER, H. G., The Foundations of Euclidean Geometry. Cambridge, 1927.
FRICKE R., KLEIN, F., Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, I. Leipzig, 1897.
GODEAUX, L., Leçons de géométrie projective. Paris, 1933.
HESSENBERG, G., Grundlagen der Geometrie. Berlin, 1930.
HILBERT, D., Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 1930. (7. kiadás.)
JUEL, C., Vorlesungen über projektive Geometrie. Berlin, 1934.
KLEIN, F., Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie. Berlin, 1928.
PONTRJAGIN, L., Topological Groups. Princeton, 1939.
SEVERI, F., Geometria proiettiva. Firenze, 1926. (2. kiadás.)
SEVERI, F., Complementi di geometria proiettiva. Bologna, 1906.
VEBLEN, O., YOUNG, J. W., Projective Geometry, I—II. Boston, 1910, 1918.
VAN DER WAERDEN, B. L., Moderne Algebra, I—II. Berlin, 1937, 1940. (2. kiadás.)
WHITEHEAD, A. N., The Axioms of Projective Geometry. Cambridge, 1906.

Idézett dolgozatok.

KLEIN, F., Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. (Erlanger Programm.) Mathem. Annalen, 43 (1872), 63—100. o.
MOULTON, F. R., A simple non-desarguesian plane geometry. Transact. Amer. Math. Soc., 3 (1902), 192—195. o.
NEWMAN, M. H. A., On the theorem of Pappus. Proc. Cambridge Phil. Soc., 22 (1925), 919—923. o.
PONTRJAGIN, L., Über stetige algebraische Körper. Annals of Math. (2), 33 (1932), 163—174. o.
SCHOR, D., Neuer Beweis eines Satzes aus den Grundlagen der Geometrie von Hilbert. Mathem. Annalen, 58 (1904), 427—433. o.

TÁRGYMUTATÓ.

Felelős kiadó : Dr. Kerékjártó Béla.
3545 Franklin-Társulat nyomdája. — vitéz Litvay Ödön.